УДК 517.946

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

А. Б. Ткач

Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко
Украина, 01033, Киев, ул. Владимирская, 64

By a modification of the numerical-analytic method we establish conditions for existence of solutions periodic in t with period T for systems of partial integro-differential equations with an impulsive effect.

За допомогою узагальнення чисельно-аналітичного методу встановлюються умови існування періодичних по t з періодом T розв'язків системи інтегро-диференціальних рівнянь з частинними похідними з імпульсним збуренням.

Введение. Численно-аналитический метод отыскания периодических решений, предложенный А. М. Самойленко [1] для отыскания периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, допускает многочисленные обобщения. В монографии [2] численно-аналитический метод обобщен на системы уравнений с частными производными. В статье [3] численно-аналитический метод отыскания периодических решений развит для систем уравнений с частными производными с импульсным воздействием.

В статьях О. Д. Нуржанова, Б. Е. Турбаева, Н. А. Перестюка, Г. Х. Сарафовой, М. А. Хекимовой [4 – 6] изучаются условия существования периодических решений систем интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов. В настоящей работе численно-аналитический метод обобщается на системы интегро-дифференциальных уравнений с частными производными с импульсным воздействием вида

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} = B(t,x)u(t,x) + f\Bigg(t, x, u(t,x), u'_t(t,x), \int\limits_0^x \int\limits_t^{t+T} \phi(t,s,x,\eta,u(s,\eta),u'_s(s,\eta))ds d\eta\Bigg) \text{ при } t \neq t_i, \tag{1}$$

$$\Delta \left. \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \right|_{t=t_i} = D_i(x)u(\tau_i,x) + q_i(x,u(\tau_i,x),u'_t(\tau_i,x)). \tag{2}$$

Здесь u, f, ϕ, $q_i \in E_n$, $(n \times n)$-матрицы $B(t,x)$, $D_i(x)$, $i \in Z$, непрерывны относительно своих аргументов. Вектор-функции f, ϕ, q_i и матрицы D_i, $i \in Z$, удовлетворяют равенствам

$$f(t,x,u,u'_t,z) = f(t+T,x,u,u'_t,z),$$

$$\phi(t,s,x,\eta,u,u'_t) = \phi(t+T,s,x,\eta,u,u'_t) = \phi(t,s+T,x,\eta,u,u'_t),$$

$$D_{i+s}(x) = D_i(x), \tag{3}$$

$$q_{i+s}(x,u,u'_t) = q_i(x,u,u'_t)$$

для некоторого натурального числа s, T — период системы.

Будем искать периодическое по t с периодом T решение системы (1), (2), удовлетворяющее условиям

$$u(t,0) = u_0(t)+\nu(0), \quad u(0,x) = u_0(0)+\nu(x). \tag{4}$$

Вектор-функция $u_0(t)$ задана, непрерывна, периодична по t с периодом T, имеет непрерывную производную и удовлетворяет неравенствам

$$\left|u_0(t)\right| \le N, \quad \left|u'_0(t)\right| \le N_1, \tag{5}$$

а вектор-функция $\nu(x)$ находится в процессе построения периодического решения.

Предполагаем, что матрицы $B(t,x)$, $D_i(x)$ и вектор-функции $f(t,x,u,u'_t,z)$, $\phi(t,s,x,\eta,$ $u,u'_t)$ и $q_i(x,u,u'_t)$, $i \in Z$, удовлетворяют следующим условиям:

I. Матрица $B(t,x)$ определена и непрерывна в области Ω_0: $(t,x) \in (-\infty,+\infty)\times[-a,a]$, периодична по t с периодом T и элементы матрицы B определены соотношениями

$$B_{ij} = \sup_{(t,x)\in\Omega} \left|\left\{B(t,x)\right\}_{ij}\right|. \tag{6}$$

II. Матрицы $D_i(x)$, $i \in Z$, определены и непрерывны при $x \in [-a,a]$, матрица D_0 определяется равенствами

$$D_{0\,kj} = \sup_{x\in[-a,a]} \left|\left\{D_i(x)\right\}_{kj}\right|. \tag{7}$$

III. Матрица $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T B(\xi,x)d\xi+\dfrac{1}{T}\sum_{i=1}^{S} D_i(x)$ невырождена, а элементы матрицы B^0 определены соотношениями

$$B^0_{ij} = \sup_{x\in[-a,a]} \left|\left\{\left[\frac{1}{T}\int\limits_0^T B(\xi,x)d\xi + \frac{1}{T}\sum^{S} D_i(x)\right]^{-1}\right\}_{ij}\right|. \tag{8}$$

IV. Вектор-функция $f(t,x,u_1,u_2,u_3)$ определена в области

$$\Omega : (t,x,u_1,u_2,u_3) \in (-\infty,+\infty)\times[-a,a]\times D_1\times D_2\times D_3,$$

где $D_1 = \{u_1 : b \le u_1 \le c\}$, $D_2 = \{u_2 : |u_2| \le b_1\}$, $D_3 = \{u_3 : |u_3| \le b_2\}$, непрерывна по всем аргументам в этой области, периодична по t с периодом T и удовлетворяет неравенствам

$$|f(t, x, u_1, u_2, u_3)| \le M,$$

$$\left| f\left(t, x, u_0(t), u_0'(t), \int\limits_0^x \int\limits_t^{t+T} \phi(t, s, x, \eta, u_0(s), u_0'(s)) ds d\eta \right)\right| \le M_1, \tag{9}$$

$$|f(t, x, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3) - f(t, x, u_1, u_2, u_3)| \le K_1|\overline{u}_1 - u_1| + K_2|\overline{u}_2 - u_2| + K_3|\overline{u}_3 - u_3|. \tag{10}$$

Здесь элементы матриц K_1, K_2, K_3 неотрицательны, b, c, b_1, b_2 — векторные постоянные, причем векторы b_1, b_2 определены ниже.

V. Вектор-функция $\phi(t, s, x, \eta, u_1, u_2)$ определена и непрерывна в области

$$\Omega_1 : (t, s, x, \eta, u_1, u_2) \in (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \times [-a, a] \times [-a, a] \times D_1 \times D_2,$$

периодична по первым двум аргументам с периодом T и удовлетворяет неравенствам

$$\begin{gathered} |\phi(t, s, x, \eta, u_1, u_2)| \le \overline{M}, \\ |\phi(t, s, x, \eta, \overline{u}_1, \overline{u}_2) - \phi(t, s, x, \eta, u_1, u_2)| \le K_4|\overline{u}_1 - u_1| + K_5|\overline{u}_2 - u_2|. \end{gathered} \tag{11}$$

VI. Вектор-функции $q_i(x, u_1, u_2)$, $i = 1, 2, \ldots$, определены в области Ω_2:

$$\Omega_2 : (x, u_1, u_2) \in [-a, a] \times D_1 \times D_2,$$

непрерывны по своим аргументам в области Ω_2 и удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered} |q_i(x, u_1, u_2)| \le M_1, \quad |q_i(x, u_0(\tau_i), u_0'(\tau_i))| \le M_2, \\ |q_i(x, \overline{u}_1, \overline{u}_2) - q_i(x, u_1, u_2)| \le L_1|\overline{u}_1 - u_1| + L_2|\overline{u}_2 - u_2|. \end{gathered} \tag{12}$$

VII. Собственные числа матрицы P,

$$\begin{aligned} P = {} & \left(B + \frac{2sD_0}{T}\right)\left(\left(a\frac{T}{2}B + asD_0\right)B^0 + a\frac{T}{2}E\right) + \\ & + \left(K_1 + aTK_3K_4 + \frac{2sL_1}{T}\right)\left(\left(a\frac{T}{2}B + asD_0\right)B^0 + a\frac{T}{2}E + B^0\right) + \\ & + \left(K_2 + aTK_3K_5 + \frac{2sL_2}{T}\right)\left(aBB^0 + aE\right), \end{aligned} \tag{13}$$

лежат в круге единичного радиуса.

VIII. Векторные постоянные b, c и вектор-функция $u_0(t)$ удовлетворяют неравенству

$$b + S \le u_0(t) + \nu_0(x) \le c - S, \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}\nu_0(x) = &\left[\frac{1}{T}\int\limits_0^T B(\xi, x)d\xi + \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{s} D_i(x)\right]^{-1} \times \left\{\frac{-1}{T}\int\limits_0^T \left[B(\xi, x)u_0(\xi) + \right.\right.\\ &\left.+ f\left(\xi, x, u_0(\xi), u_0'(\xi), \int\limits_0^x \int\limits_\xi^{\xi+T} \phi(\xi, s, x, p, u_0(s), u_0'(s))dsdp\right)\right]d\xi -\\ &\left.- \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{s}\left[D_i(x)u_0(\tau_i) + q_i(x, u_0(\tau_i), u_0'(\tau_i))\right]\right\},\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}S = &a\frac{T}{2}\left(B + \frac{2sD_0}{T}\right)B^0(E-P)^{-1}R + a\frac{T}{2}(E-P)^{-1}R +\\ &+ B^0P(E-P)^{-1}R + a\frac{T}{2}Q_1 + aQ_2 + B^0R\end{aligned} \tag{16}$$

и векторы R, Q_1, Q_2 определены равенствами

$$\begin{aligned}R = &\left(B + \frac{2sD_0}{T}\right)\left(a\frac{T}{2}Q_1 + aQ_2\right) + \left(K_1 + aTK_3K_4 + \frac{2sL_1}{T}\right) \times\\ &\times \left(a\frac{T}{2}Q_1 + aQ_2 + B^0N_0\right) + \left(K_2 + aTK_3K_5 + \frac{2sL_2}{T}\right)aQ_1,\\ Q_1 = &\ B(N + B^0N_0) + M_1,\\ Q_2 = &\ sD_0(N + B^0N_0) + sM_2,\end{aligned} \tag{17}$$

причем

$$N_0 = BN + M_1 + \frac{s}{T}D_0N + \frac{s}{T}M_2. \tag{17'}$$

Последовательность вектор-функций $\{u_n(t, x)\}$, периодических по t с периодом T, выбираем в виде

$$u_0(t, x) = u_0(t) + \nu_0(x),$$

$$u_{n+1}(t,x) = u_0(t) + \nu_0(x) + \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i(x) + \int_0^x \int_0^t \Bigg\{ \Bigg[B(\xi,\eta) u_n(\xi,\eta) +$$

$$+ f\Bigg(\xi,\eta,\overline{u}_n(\xi,\eta),\overline{u}'_{n\xi}(\xi,\eta),\int_0^\eta \int_\xi^{\xi+T} \phi(\xi,s,\eta,p,\overline{u}_n(s,p),\overline{u}'_{ns}(s,p))dsdp\Bigg)\Bigg] - \overline{\Bigg[B(\xi,\eta)u_n(\xi,\eta)+}$$

$$\overline{+f\Bigg(\xi,\eta,\overline{u}_n(\xi,\eta),\overline{u}'_{n\xi}(\xi,\eta),\int_0^\eta \int_\xi^{\xi+T} \phi(\xi,s,\eta,p,\overline{u}_n(s,p),\overline{u}'_{ns}(s,p))dsdp\Bigg)\Bigg]}\Bigg\} d\xi d\eta +$$

$$+ \int_0^x \Bigg[\sum_{0\le\tau_i\le t} \big(D_i(\eta)u_n(\tau_i,\eta) + q_i(\eta,\overline{u}_n(\tau_i,\eta),\overline{u}'_{n\xi}(\tau_i,\eta))\big)\Bigg] d\eta -$$

$$- \int_0^x t \overline{\Bigg[\sum_{0\le\tau_i\le t} \Big(D_i(\eta)u_n(\tau_i,\eta) + q_i(\eta,\overline{u}_n(\tau_i,\eta),\overline{u}'_{n\xi}(\tau_i,\eta))\Big)\Bigg]} d\eta, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{18}$$

Здесь

$$\overline{[Bu_n + f]} = \frac{1}{T}\int_0^T [Bu_n + f]\, dt, \qquad \sum_{0\le\tau_i\le t} q_i = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{s} q_i, \quad \overline{u}_n(t,x) = u_n(t,x) - \delta_n(x). \tag{19}$$

Вектор-функции $\nu_0(x), \delta_1(x), \delta_2(x), \ldots$ определяются при $n = 0,1,2,\ldots$ из условий

$$\frac{1}{T}\int_0^T \Bigg[B(\xi,x)u_n(\xi,x)+$$

$$+ f\Bigg(\xi,\eta,\overline{u}_n(\xi,x),\overline{u}'_{n\xi}(\xi,x),\int_0^x \int_\xi^{\xi+T} \phi(\xi,s,x,p,\overline{u}_n(s,p),\overline{u}'_{ns}(s,p))dsdp\Bigg)\Bigg] d\xi +$$

$$+ \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{S} [D_i(x)u_n(\tau_i,x) + q_i(x,\overline{u}_n(\tau_i,x),\overline{u}'_{n\xi}(\tau_i,x))] = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{20}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть система интегро-дифференциальных уравнений с частными производными с импульсным воздействием (1), (2) удовлетворяет условиям I – VIII. Тогда существует единственное решение системы (1), (2), периодическое по t с периодом T. Это решение является равномерным в области Ω_0 пределом последовательности (18) – (20) периодических по t с периодом T функций $u_n(t,x)$ и удовлетворяет системе интегро-дифференциальных уравнений*

$$u(t,x) = u_0(t) + \nu(x) + \int_0^x \int_0^t \Bigg[B(\xi,\eta)u(\xi,\eta) +$$

$$+ f\left(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u'_\xi(\xi,\eta),\int_0^\eta \int_\xi^{\xi+T} \phi(\xi,s,\eta,p,u(s,p),u'_s(s,p))dsdp\right)\Bigg] d\xi d\eta +$$

$$+ \int_0^x \left[\sum_{0\le\tau_i\le t} (D_i(\eta)u(\tau_i,\eta) + q_i(x,u(\tau_i,\eta),u'_\xi(\tau_i,\eta))) \right] d\eta, \tag{21}$$

где вектор-функция $\nu(x)$ является равномерным по $x \in [-a,a]$ пределом последовательности

$$\left\{ \nu_0(x) + \sum_{i=1}^n \delta_i(x) \right\}, \quad \nu(x) = \lim_{n\to\infty} \left[\nu_0(x) + \sum_{i=1}^n \delta_i(x) \right].$$

2. Доказательство теоремы. Периодичность по t периода T последовательности (18) – (20) функций $u_n(t,x)$ следует из ее структуры.

Для доказательства равномерной сходимости последовательности $\{u_n(t,x)\}$ оценим сначала разность $u_1(t,x) - u_0(t,x)$. Рассмотрим соотношение (18) при $n = 0$. Из этого соотношения находим вектор-функцию $\nu_0(x)$ в виде (15).

Используя соотношения (6) – (8), неравенства (5), (9), (12), из соотношения (15) получаем оценку

$$|\nu_0(x)| \le B^0 N_0, \tag{22}$$

где вектор N_0 определен равенством (17′).

Тогда, используя лемму 1 [3], для разности $\overline{u}_1(t,x) - u_0(t,x)$ получаем неравенство

$$\begin{gathered} |\overline{u}_1(t,x) - u_0(t,x)| \le a\alpha(t)Q_1 + aQ_2, \\ |\overline{u}'_{1t}(t,x) - u'_{0t}(t,x)| \le aQ_1, \end{gathered} \tag{23}$$

где векторы Q_1 и Q_2 определены равенствами (17) и функция

$$\alpha(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right).$$

Вычитая из (18) при $n = 1$ выражение (18) при $n = 0$ и используя условия Липшица (10), (11), оценки (22), (23) и лемму 1 работы [3], для вектор-функции $\delta_1(x)$ получаем оценку

$$|\delta_1(x)| \le B^0 R, \tag{24}$$

где вектор R определен равенством (17).

Теперь, оценивая разность $\overline{u}_2(t,x) - u_1(t,x)$ и используя оценки (23), (24), находим

$$|\overline{u}_2(t,x) - u_1(t,x)| \leq \left(a\frac{T}{2}B + aD_0 s\right) B^0 R + a\frac{T}{2}R,$$

$$|\overline{u}'_{2t}(t,x) - u'_{1t}(t,x)| \leq aBB^0R + aR.$$

Продолжая последовательно процесс оценки $\delta_2(x), \delta_3(x), \ldots, |\overline{u}_3(t,x) - u_2(t,x)|, |\overline{u}_4(t,x) - -u_3(t,x)|, \ldots$, получаем

$$|\delta_{n+1}(t,x)| \leq B^0 P^n R,$$

$$\Big|u_{n+1}(t,x) - u_n(t,x)\Big| \leq a\frac{T}{2}\left(B + \frac{2sD_0}{T}\right) B^0 P^{n-1} R + a\frac{T}{2}P^{n-1}R + B^0P^nR,$$

$$\Big|\overline{u}'_{(n+1)t}(t,x) - u'_{nt}(t,x)\Big| \leq aBB^0P^{n-1}R + aP^{n-1}R.$$

Далее имеем

$$\delta_{n+k}(x)| \leq B^0 P^{n+k-1} R,$$

$$\Big|u_{n+k}(t,x) - u_n(t,x)\Big| \leq a\frac{T}{2}\left(B + \frac{2sD_0}{T}\right) B^0 P^{n-1} \sum_{i=0}^{k-1} P^i R + \\ + a\frac{T}{2}P^{n-1}\sum_{i=0}^{k-1} P^i R + B^0 P^n \sum_{i=0}^{k-1} P^i R, \tag{25}$$

$$\Big|u'_{(n+k)t}(t,x) - u'_{nt}(t,x)\Big| \leq aBB^0P^{n-1}\sum_{i=0}^{k-1} P^i R + aP^{n-1}\sum_{i=0}^{k-1} P^i R, \tag{26}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |\delta_i(x)| \leq B^0 \sum_{i=0}^{n-1} P^i R.$$

Из условия VII и неравенств (25) вытекает равномерная по $(t,x) \in (-\infty, +\infty) \times \times[-a,a]$ сходимость последовательности (18) – (20) функций $u_n(t,x)$ к предельной функции $u_\infty(t,x)$, периодической по t с периодом T. Из (18) и (20) при $n \to \infty$ следует, что $u_\infty(t,x)$ удовлетворяет системе интегро-дифференциальных уравнений (21).

Равномерная по $x \in [-a,a]$ сходимость последовательности

$$\left\{\nu_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \delta_i(x)\right\}$$

следует из условия VII и неравенства (26), при этом

$$\nu(x) = \lim_{n\to\infty}\left\{\nu_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \delta_i(x)\right\}.$$

Из неравенств (25) вытекают оценки

$$\Big|u_\infty(t,x) - u_n(t,x)\Big| \le a\frac{T}{2}\left(B + \frac{2sD_0}{T}\right)B^0P^{n-1}(E-P)^{-1}R +$$
$$+ a\frac{T}{2}P^{n-1}(E-P)^{-1}R + B^0P^n(E-P)^{-1}R,$$

$$|u'_{\infty t}(t,x) - u'_{nt}(t,x)| \le aBB^0P^{n-1}(E-P)^{-1}R + aP^{n-1}(E-P)^{-1}R.$$

Легко видеть, что $u'_{\infty t}(t,x) \in D_2$, если выбрать

$$b_1 = N_1 + aQ_1 + aBB^0(E-P)^{-1}R + a(E-P)^{-1}R$$

и

$$b_2 = aT\overline{M}.$$

Для доказательства единственности периодического по t с периодом T решения предполагаем существование двух решений $u(t,x)$ и $z(t,x)$ системы (1) – (4).

Используя периодическое по t решение (21) и соотношения (20) при $n \to \infty$, после k итераций для разности $u(t,x) - z(t,x)$ получаем оценки

$$|u(t,x) - z(t,x)| \le a\frac{T}{2}P^kG,$$
$$\Big|u'_t(t,x) - z'_t(t,x)\Big| \le aP^kG, \tag{27}$$

где вектор G определен равенством

$$G = \left(B + K_1 + aTK_3K_4 + \frac{2sD_0}{T} + \frac{2sL_1}{T}\right)\Big|u(t,x) - z(t,x)\Big|_0 +$$
$$+ \left(K_2 + aTK_3K_5 + \frac{2sL_2}{T}\right)\Big|u'_t(t,x) - z'_t(t,x)\Big|_0,$$

причем

$$|u(t,x) - z(t,x)|_0 = \sup_{(t,x)\in\Omega_0} |u(t,x) - z(t,x)|_0.$$

Из неравенств (27) и условия VII при $k \to \infty$ следует единственность периодического по t с периодом T решения системы уравнений (1) – (4).

Теорема доказана.

1. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 1965. — **17**, № 4. — С. 16 – 23.

2. *Самойленко А. М., Ткач Б. П.* Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. — Киев: Наук. думка, 1992. — 208 с.

3. *Tkach A. B.* Numerical-analytic method of finding periodic solutions for systems of partial differential equations with pulse influence // Nonlinear Oscillations. — 2001. — **4**, № 2. — P. 278 – 288.

4. *Перестюк Н. А., Сарафова Г. Х., Хекимова М. А.* Периодические решения слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Вестн. Киев. ун-та. Математика и механика. — 1980. — Вып. 22. — С. 96–101.

5. *Нуржанов О. Д.* О периодических решениях нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Аналитические методи теории дифференциальных уравнений. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. — С. 88–103.

6. *Турбаев Б. Е.* О периодических решениях слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. — 1986. — **38**. № 2. — С. 211–214.

Получено 14.07.2004