УДК 517.956.223

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ГОЛОМОРФНОГО ВЕКТОРА МЕТОДОМ БУЛИГАНА – ЖИРО

Ж. А. Токибетов, А. С. Сарсекеева, Р. А. Болтирекова

Казах. нац. ун-т им. аль-Фараби
пр. аль-Фараби, 71, Алматы, 050040, Казахстан
e-mail: aigul.sarsekeyeva@gmail.com
raushanboltirekova123@gmail.com

Conditions that guarantee the possibility of reducing a natural analog of the typical boundary-value problem for the Cauchy – Riemann system are found. The Riemann – Hilbert problem for the holomorphic vector in the multidimensional domain is reduced to the integral Fredholm equation.

Знайдено умови, що гарантують можливість зведення природного аналога типової крайової задачі для системи Коші – Рімана. Задача Рімана – Гільберта для голоморфного вектора в багатовимірній області зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма.

Вектор $U(s,u,v,w) \in C^{(1,0)}(D)$, следуя [1], будем называть голоморфным в области D, если в этой области он удовлетворяет эллиптической системе уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} &u_x + v_y + w_z = 0, \qquad s_x - v_z + w_y = 0, \\ &s_y + u_z - w_x = 0, \qquad s_z - u_y + v_x = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Аналог задачи Римана – Гильберта для системы (1) формулируется так: найти регулярное в области D с гладкой границей Γ решение U системы (1), удовлетворяющее на границе Γ условиям [2]

$$a_j s + b_j u + c_j v + d_j w = h_j, \quad j = 1, 2, \tag{2}$$

где $a_j,\ b_j,\ c_j,\ d_j,\ h_j$ — заданные, непрерывные по Гельдеру на Γ, функции.

Сведем задачу Римана – Гильберта для голоморфного в трехмерной области вектора к интегральному уравнению Фредгольма с помощью метода Булигана – Жиро [2].

Пользуясь общим представлением решения системы (1) через производные двух произвольных гармонических функций σ и ω в виде [3]

$$s = \sigma_x, \qquad u = \omega_x - \sigma_y, \qquad v = \omega_y + \sigma_x, \qquad w = \omega_x, \tag{3}$$

авторы получили условия, гарантирующие возможность сведения задачи (2) для системы (1) в полупространстве E к уравнениям Фредгольма [4].

Однако представление (3) не является общим представлением решения, оно является лишь частным видом найденного представления общего решения системы (1) через производные двух произвольных гармонических функций σ и ω:

$$u = (A, \nabla\sigma) - (B, \nabla\omega), \qquad s = (B, \nabla\sigma) + (C, \nabla\omega),$$

$$v = (D, \nabla\sigma) + (E, \nabla\omega), \qquad w = (F, \nabla\sigma) + (G, \nabla\omega), \tag{4}$$

где

$$A = (\alpha_1, \beta_1, -\beta_2), \qquad B = (\alpha_2, \beta_2, \beta_1), \qquad C = (-\alpha_1, \beta_1, -\beta_2), \qquad D = (-\beta_1, \alpha_1, \alpha_2),$$
$$E = (\beta_2, -\alpha_2, -\alpha_1), \qquad F = (\beta_2, -\alpha_2, \alpha_1), \qquad G = (\beta_1, \alpha_1, -\alpha_2),$$

$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2,\ \beta = \beta_1 + i\beta_2$ — произвольные комплексные числа. Отсюда видим, что (3) получается из представления (4) при $\alpha = 1,\ \beta = 0$.

Подставляя представление решений (4) в задачу (2), сведем ее к задаче типа задачи с наклонной производной для гармонических функций σ и ω:

$$(R_j, \nabla\sigma) + (S_j, \nabla\omega) = h_j, \quad j = 1, 2, \tag{5}$$

где $R_j = a_j B + b_j A + c_j D + d_j F,\ S_j = a_j C - b_j B + c_j D + d_j G$ — заданные, непрерывные по Гельдеру на Γ, функции, зависящие от $a_j,\ b_j,\ c_j,\ d_j,\ \alpha,\ \beta$.

Теперь рассмотрим задачу (5) для системы (1) в случае, когда область D является полупространством $E \equiv \{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z > 0\} > 0$, а коэффициенты в граничном условии (5) постоянны. Введем в рассмотрение следующие обозначения: $X = (x, y, z)$ — точка полупространства $E,\ P = (\xi, \eta, \zeta)$ — точка плоскости $\Gamma \equiv \{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 0\}$, а $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ — расстояние между точками X и P. Кроме того, определим из соотношений

$$(R_j, \nabla M_k) + (S_j, \nabla N_k) = \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right), \quad j, k = 1, 2, \tag{6}$$

$M_k,\ N_k,\ k = 1, 2,$ являющиеся регулярными гармоническими функциями переменных $X = (x, y, z)$ в полупространстве $E \equiv \{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z > 0\}$. Здесь ∇ — оператор градиента по переменным $x,\ y,\ z,$ скобки обозначают, как и в (4), (5), скалярное произведение, а $\delta_{j\,k}$ — символ Кронекера, т. е. $\delta_{jj} = 1,\ \delta_{jk} = 0,$ если $j \neq k$. Далее, как и в [4], по методу Булигано – Жиро решение задачи (5) для гармонических функций ω и σ будем искать в виде

$$\begin{aligned} \omega(X) &= \int\limits_\Gamma [M_1(X,P)\mu_1(P) + M_2(X,P)\mu_2(P)]\, d_P\Gamma, \\ \sigma(X) &= \int\limits_\Gamma [N_1(X,P)\mu_1(P) + N_2(X,P)\mu_2(P)] d_P\Gamma, \end{aligned} \tag{7}$$

где μ_1 и μ_2 — функции, относительно которых нужно получить систему интегральных уравнений.

Легко видеть, что из уравнений (6) при $k = 2,\ j = 1,$ следует брать выражения

$$M_1(X, P) = (S_2, \nabla\Omega), \qquad N_1(X, P) = -(R_2, \nabla\Omega).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (6) при $k = 1$, $j = 1$, для определения Ω получаем следующее уравнение:

$$(R_1, \nabla(S_2, \nabla\Omega)) - (S_1, \nabla(R_2, \nabla\Omega)) = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right),$$

т. е. гармоническая функция Ω должна быть решением уравнения второго порядка

$$\begin{aligned}\left(R_1^1 S_2^1 - S_1^1 R_2^1\right)\Omega_{xx} + \left(R_1^2 S_2^2 - S_1^2 R_2^2\right)\Omega_{yy} + \left(R_1^3 S_2^3 - S_1^3 R_2^3\right)\Omega_{zz} + \\ + \left(R_1^1 S_2^2 + R_1^2 S_2^1 - S_1^1 R_2^2 - S_1^2 R_2^1\right)\Omega_{xy} \\ + \left(R_1^1 S_2^3 + R_1^3 S_2^1 - S_1^1 R_2^3 - S_1^3 R_2^1\right)\Omega_{xz} + \\ + \left(R_1^2 S_2^3 + R_1^3 S_2^2 - S_1^2 R_2^3 - S_1^3 R_2^2\right)\Omega_{yz} = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right),\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$R_j = \left(R_j^1, R_j^2, R_j^3\right), \qquad S_j = \left(S_j^1, S_j^2, S_j^3\right), \quad j = 1, 2,$$

а

$$\begin{aligned}
S_2^1 &= -a_2\alpha_1 - b_2\alpha_2 + c_2\beta_2 + d_2\beta_1, & S_2^2 &= a_2\beta_1 - b_2\beta_2 - c_2\alpha_2 + d_2\alpha_1, \\
S_2^3 &= -a_2\beta_2 - b_2\beta_1 - c_2\alpha_1 - d_2\alpha_2, & R_2^1 &= a_2\alpha_2 + b_2\alpha_1 - c_2\beta_1 + d_2\beta_2, \\
R_2^2 &= a_2\beta_2 + b_2\beta_1 - c_2\alpha_1 - d_2\alpha_2, & R_2^3 &= a_2\beta_1 - b_2\beta_2 + c_2\alpha_2 + d_2\alpha_1, \\
S_1^1 &= -a_1\alpha_1 - b_1\alpha_2 + c_1\beta_2 + d_1\beta_1, & S_1^2 &= a_1\beta_1 - b_1\beta_2 - c_1\alpha_2 + d_1\alpha_1, \\
S_1^3 &= -a_1\beta_2 - b_1\beta_1 - c_1\alpha_1 - d_1\alpha_2, & R_1^1 &= a_1\alpha_2 + b_1\alpha_1 - c_1\beta_1 + d_1\beta_2, \\
R_1^2 &= a_1\beta_2 + b_1\beta_1 + c_1\alpha_1 - d_1\alpha_2, & R_1^3 &= a_1\beta_1 - b_1\beta_2 + c_1\alpha_2 + d_1\alpha_1.
\end{aligned}$$

Аналогично находим ядра M_2, N_2 по формулам

$$M_2(X, P) = (S_1, \nabla\Omega), \qquad N_2(X, P) = (R_1, \nabla\Omega). \tag{9}$$

Таким образом, видим, что если существует гармоническое в области E решение уравнения (8), то можно построить ядра M_k, N_k, $k = 1, 2$, для представлений (7). Затем, подставив (7) в (5) и устремив точку X к границе Γ области E, в силу (6) для функций μ_k, $k = 1, 2$, получим распадающуюся систему двух уравнений Фредгольма:

$$\mu_k(Q) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\mu_k(P)\,d_P\Gamma = \frac{1}{2\pi}h_k(Q), \quad k = 1, 2,$$

где $Q \in E$, $P \in \Gamma$.

Теперь рассмотрим вопрос существования в полупространстве E гармонической функции Ω, являющейся решением уравнения (8). Сначала заметим, что в уравнении (8) производная в правой части берется по координатам точки P и, очевидно, тогда имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial_P n}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial_X n}\left(\frac{1}{r}\right) = -\lambda_1\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} - \lambda_2\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} - \lambda_3\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}, \quad \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 = 1.$$

На основании этого равенства с учетом того, что

$$\Delta\Omega \equiv \frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2} = 0,$$

при произвольной постоянной ν уравнение (8) записываем в виде

$$\begin{aligned}
&\left(R_1^1S_2^1 - S_1^1R_2^1\right)\Omega_{xx} + \left(R_1^2S_2^2 - S_1^2R_2^2\right)\Omega_{yy} + \left(R_1^3S_2^3 - S_1^3R_2^3\right)\Omega_{zz} + \nu\Delta\Omega + \\
&\quad + \left(R_1^1S_2^2 + R_1^2S_2^1 - S_1^1R_2^2 - S_1^2R_2^1\right)\Omega_{xy} + \left(R_1^1S_2^3 + R_1^3S_2^1 - S_1^1R_2^3 - S_1^3R_2^1\right)\Omega_{xz} + \\
&\quad + \left(R_1^2S_2^3 + R_1^3S_2^2 - S_1^2R_2^3 - S_1^3R_2^2\right)\Omega_{yz} = \\
&= -\lambda_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) - \lambda_2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) - \lambda_3\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right).
\end{aligned} \tag{10}$$

Выясним, при каких $\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3$ и $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ левую часть (10) можно представить в виде

$$\left(\lambda_1\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial}{\partial y} + \lambda_3\frac{\partial}{\partial z}\right)(\nu_1\Omega_x + \nu_2\Omega_y + \nu_3\Omega_z). \tag{11}$$

Для этого, произведя дифференцирование в (11), затем сравнив коэффициенты Ω_{xx}, $\Omega_{yy},\ \Omega_{zz},\ \Omega_{xy},\ \Omega_{xz},\ \Omega_{yz}$ в левой части (10) и (11), получим равенства

$$\tau_1 + \nu = \nu_1\lambda_1, \qquad \tau_2 + \nu = \nu_2\lambda_2, \qquad \tau_3 + \nu = \nu_3\lambda_3, \qquad \tau = \sum_{k=1}^{3}\tau_k,$$

$$\rho = \lambda_1\nu_2 + \lambda_2\nu_1, \qquad \gamma = \lambda_1\nu_3 + \lambda_3\nu_1, \qquad \delta = \lambda_2\nu_3 + \lambda_3\nu_2.$$

Здесь введены обозначения

$$\tau_1 = R_1^1S_2^1 - S_1^1R_2^1, \qquad \tau_2 = R_1^2S_2^2 - S_1^2R_2^2, \qquad \tau_3 = R_1^3S_2^3 - S_1^3R_2^3,$$

$$\rho = R_1^1S_2^2 + R_1^2S_2^1 - S_1^1R_2^2 - S_1^2R_2^1, \qquad \gamma = R_1^1S_2^3 + R_1^3S_2^1 - S_1^1R_2^3 - S_1^3R_2^1,$$

$$\delta = R_1^2S_2^3 + R_1^3S_2^2 - S_1^2R_2^3 - S_1^3R_2^2.$$

Из этой системы для определения $\nu,\ \nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3$ получим линейную алгебраическую систему четырех уравнений

$$-3\nu + \lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 + \lambda_3\nu_3 = \tau,$$

$$\lambda_1\nu_2 + \lambda_2\nu_1 = \rho,$$

$$\lambda_1\nu_3 + \lambda_3\nu_1 = \gamma,$$

$$\lambda_2\nu_3 + \lambda_3\nu_2 = \delta.$$

Если выполнено неравенство

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0, \tag{12}$$

то из последней системы уравнений однозначно находим ν и $\nu_i,\ i = 1, 2, 3,$ по формулам

$$\nu = \frac{1}{6\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\Big[-\delta\lambda_1^3 - \gamma\lambda_2^3 - \rho\lambda_3^3 + \lambda_1^2(\gamma\lambda_2 + \rho\lambda_3) +$$

$$+ \lambda_2^2(\delta\lambda_1 + \rho\lambda_3) + \lambda_3^2(\delta\lambda_1 + \gamma\lambda_2) - 2\tau\lambda_1\lambda_2\lambda_3\Big],$$

$$\nu_1 = \frac{-\delta\lambda_1 + \gamma\lambda_2 + \rho\lambda_3}{2\lambda_2\lambda_3}, \qquad \nu_2 = \frac{\delta\lambda_1 - \gamma\lambda_2 + \rho\lambda_3}{2\lambda_1\lambda_3}, \qquad \nu_3 = \frac{\delta\lambda_1 + \gamma\lambda_2 - \rho\lambda_3}{2\lambda_1\lambda_2}. \tag{13}$$

Отсюда видим, что при выполнении неравенства (12) соотношения (13) гарантируют возможность представления левой части (9) в виде (10), т. е. при выборе коэффициентов в виде (13) из (9) находим

$$\nu_1\Omega_x + \nu_2\Omega_y + \nu_3\Omega_z = -\frac{1}{r}.$$

Следовательно, можем положить $\Omega(X, P)$ в следующем виде [4]:

$$\Omega(X, P) = \ln\Big[\nu_1(x-a) + \nu_2(y-b) + \nu_3(z-c)\pm$$

$$\pm\left(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2\right)\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}\Big].$$

Здесь знаки $+$ или $-$ выбираются так, чтобы особенности логарифма лежали вне области E, т. е. Ω не имела особенностей внутри полупространства E. Для того чтобы в замкнутом полупространстве $E \cup \Gamma$ функция Ω, а с нею и функции $M_k,\ N_k,\ k = 1, 2,$ не имели особенностей кроме точки P, должно выполняться неравенство

$$\lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 + \lambda_3\nu_3 \neq 0,$$

а свою очередь, это означает, что луч, содержащий особенности функции Ω, не лежит на плоскости. Последнее условие можно записать и в таком виде:

$$\sum_{k=1}^{3}\left(R_1^kS_2^k - S_1^kR_2^k\right) + 3\nu \neq 0. \tag{14}$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема. *Задача Римана – Гильберта (2) для системы (1) в полупространстве* $E \equiv \{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z > 0\}$ *приводится к системе интегральных уравнений Фредгольма (7) при выполнении условий*

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0 \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=1}^{3}\left(R_1^k S_2^k - S_1^k R_2^k\right) + 3\nu \neq 0,$$

где $R_1^k,\ S_2^k,\ R_2^k,\ S_1^k$ *и* ν *определяются по формулам (8) и (13).*

Таким образом, при соблюдении найденных, гарантирующих возможность приведения задачи (5) для системы (1) в полупространстве E к уравнениям Фредгольма, условий (12), (14), задача (5) разрешима, если выполняется конечное число условий ортогональности, наложенных на функции $h_j,\ j = 1, 2,$ из (5). Как известно, чтобы завершить исследование задачи (1), (5), нам остается рассмотреть соответствующую для нее однородную задачу. Если однородная задача имеет не более конечного числа линейно независимых решений, то задача (1), (5) нетерова. Нетеровость задачи (1), (2) всегда будет нарушаться, если однородное уравнение будет иметь бесконечное число регулярных в полупространстве E линейно независимых решений. Следует отметить, что вопрос о том, все ли решения однородной задачи можно таким образом получить, остается открытым, т. е., как и для задачи о наклонной производной, особенно важным является исследование эквивалентности этой редукции задачи (5) [2].

Замечание. Условие (12) означает, что все $\lambda_i \neq 0$. Поэтому если областью рассмотрения будет полуплоскость $E \equiv \{z > 0\}$, то в этом случае задача построения ядер в формуле (7) приводится, как и выше, к построению частных гармонических решений (8) так, чтобы правая часть (8) на границе области имела особенности. Например, при выполнении условий [2]

$$\begin{gathered} R_1^1 S_2^1 - S_1^1 R_2^1 = R_1^2 S_2^2 - S_1^2 R_2^2, \\ R_1^3 S_2^3 - S_1^3 R_2^3 - R_1^2 S_2^2 + S_1^2 R_2^2 = \lambda \neq 0, \\ R_1^1 S_2^2 + R_1^2 S_2^1 - S_1^1 R_2^2 - S_1^2 R_2^1 = 0, \\ R_1^1 S_2^3 + R_1^3 S_2^1 - S_1^1 R_2^3 - S_1^3 R_2^1 = 0, \\ R_1^2 S_2^3 + R_1^3 S_2^2 - S_1^2 R_2^3 - S_1^3 R_2^2 = 0 \end{gathered} \tag{15}$$

с использованием гармоничности Ω уравнение (8) сводится к виду

$$\lambda\Omega_{zz} = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Следовательно, можно положить

$$\Omega = \lambda\frac{\partial}{\partial n}\Big\{(z-c)\ln\Big[z - c \pm \big((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\big)^{\frac{1}{2}}\Big] \mp \\ \mp \left[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\right]^{\frac{1}{2}}\Big\},$$

где $P = (a, b, c)$, а вопрос о выборе знаков приведен выше.

Таким образом, при нарушении условий (12), например, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 = 1$, условия (15) обеспечивают нахождение ядер $M_k(X,P)$ и $N_k(X,P)$ в (7).

Литература

1. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических систем уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 204 с.
2. *Янушаускас А. И.* Задача о наклонной производной теории потенциала. – Новосибирск: Наука, 1985. – 262 с.
3. *Янушаускас А. И.* Некоторые обобщения голоморфного вектора // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 4. – С. 699 – 705.
4. *Токибетов Ж. А.* Об одной задаче для голоморфного в полупространстве вектора // Исследования по многомерным эллиптическим системам уравнений в частных производных. – Новосибирск, 1986. – С. 100 – 105.

Получено 24.05.2017