УДК 517.919

КВАЗІПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ФУНКЦІОНАЛЬНО-СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

В. О. Єрьоменко, А. М. Алілуйко

Терноп. нац. економ. ун-т
e-mail: aliluyko@imath.kiev.ua

We establish sufficient conditions for the existence of quasiperiodic solutions of functional-singularly perturbed linear ordinary higher-order differential equations for an arbitrary quasiperiodic inhomogeneity.

Встановлено достатні умови існування квазіперіодичних розв'язків функціонально-сингулярно збурених лінійних звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків для довільної квазіперіодичної неоднорідності.

1. Задача про існування квазіперіодичних розв'язків лінійних звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків у випадку відмінного від нуля коефіцієнта при старшій похідній розв'язується за допомогою методів, розроблених в [1, 2]. Випадок, коли цей коефіцієнт набирає нульові значення, наскільки відомо авторам, повністю не вивчений.

Позначимо через $C^r(\mathcal{T}_m)$ простір векторних або матричних функцій $F(\varphi),\ \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, що набувають дійсних значень, періодичних з періодом 2π за кожною зі змінних $\varphi_i,\ i = \overline{1, m}$, таких, що є неперервними разом із усіма похідними до порядку r включно; $|F(\varphi)|_r = \max\limits_{0 \le |\rho| \le r} \max\limits_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \|D^\rho F(\varphi)\|$, де $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_m)$ — цілочисловий вектор із невід'ємними координатами, $|\rho| = \rho_1 + \ldots + \rho_m$ і $D^\rho = \dfrac{\partial^{|\rho|}}{\partial\varphi_1^{\rho_1} \ldots \partial\varphi_m^{\rho_m}}$, $\langle\, . \,, . \,\rangle$ — скалярний добуток в R^n, $\|\,.\,\|$ — евклідова векторна або узгоджена матрична норма.

Об'єктом дослідження є система диференціальних рівнянь

$$\varphi^{(1)} = \omega, \qquad \varepsilon a(\varphi)x^{(n+1)} + x^{(n)} + b_1(\varphi)x^{(n-1)} + \ldots + b_n(\varphi)x = f(\varphi), \tag{1}$$

де $\varphi \in R^m,\ \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ — частотний базис, $x \in R,\ \varepsilon$ — малий додатний параметр, дійсні скалярні функції $a,\ b_1, \ldots, b_n,\ f \in C^r(\mathcal{T}_m),\ r \ge 0,\ y^{(s)} = d^s y/dt^s,\ a(\varphi)$ перетворюється в нуль на множині довільної структури.

Вивчаються питання: 1) за яких умов система (1) має гладкий квазіперіодичний розв'язок $x_0(\omega t, \varepsilon)$ для довільної квазіперіодичної неоднорідності; 2) якщо "вироджене" рівняння

$$y^{(n)} + b_1(\omega t)y^{(n-1)} + \ldots + b_n(\omega t)y = f(\omega t) \tag{2}$$

має квазіперіодичний розв'язок $y_0(\omega t)$ для довільної квазіперіодичної неоднорідності, то який зв'язок між функціями $x_0(\omega t, \varepsilon)$ та $y_0(\omega t)$ у процесі $\varepsilon \to 0$; 3) яка оцінка максимального значення параметра ε, при якому зберігається квазіперіодичний розв'язок $x_0(\omega t, \varepsilon)$.

Випадок $m = 1$ досліджено у [3]. У роботі [4] вивчалася система

$$\varphi^{(1)} = \omega, \qquad \varepsilon A(\varphi)x^{(2)} + B(\varphi)x^{(1)} + C(\varphi)x = f(\varphi),$$

де $x \in R^m,\ A$ — симетрична вироджена матриця. Зауважимо, що система (1) рівносильна системі диференціальних рівнянь, узагальнення якої має вигляд

$$\varepsilon^k A(t,\varepsilon)X^{(1)} = B(t,\varepsilon)X + F(t,\varepsilon),$$

де $k \geq 0,\ 0 < \varepsilon \ll 1$, квадратна матриця $A(t,\varepsilon)$ вироджується при всіх значеннях ε або при $\varepsilon = 0.$ Такі системи описують процеси, які зустрічаються в різних галузях сучасної науки та техніки [5].

У випадку $a(\varphi) \equiv 1$ друге рівняння системи (1) природньо назвати сингулярно збуреним відносно рівняння (2), а наявність нулів функції $a(\varphi)$ дозволяє назвати збурення рівняння (2) функціонально-сингулярним. Нарешті, наявність параметра в (1) обумовлена, зокрема, таким фактом [6]: скалярне рівняння $(\sin t)x^{(1)} = bx - (\sin t)^k$, де b — ціле додатне число, має періодичний розв'язок, гладкість r якого визначається нерівністю $b - r\cos t > 0.$

2. Система (1) рівносильна системі рівнянь

$$\varphi^{(1)} = \omega,$$

$$\operatorname{diag}\{E_n, \varepsilon a(\varphi)\}X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -b_n(\varphi) & -b_{n-1}(\varphi) & -b_{n-2}(\varphi) & \dots & -b_1(\varphi) & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (\varphi) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

де $X = \operatorname{col}\left(x, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\right),\ E_n$ — одинична матриця порядку $n.$ Зауважимо, що в роботі [7] досліджувалися, зокрема, системи з виродженою діагональною матрицею при похідних і домінантними діагональними елементами матриці при векторові невідомих. Для розв'язування системи (3) не можна також використати методи, викладені в [5], оскільки матриця при похідних має змінний ранг.

Введемо у розгляд квадратні матриці порядку $n+1$:

$$V(\varphi,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon z_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon z_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1+\varepsilon z_n & 0 \\ -\varepsilon a z_1 & -\varepsilon a z_2 & \dots & -\varepsilon a z_n & 1 \end{pmatrix},$$

$$W(\varphi,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n & 1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

де $z_1(\varphi,\varepsilon), z_2(\varphi,\varepsilon),\dots,z_n(\varphi,\varepsilon)$ задовольняють нелінійну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon a(\varphi)z_1^{(1)} + [1+\varepsilon a(\varphi)z_n]z_1 + b_n(\varphi) = 0, \\ \varepsilon a(\varphi)z_2^{(1)} + \varepsilon a(\varphi)z_1 + [1+\varepsilon a(\varphi)z_n]z_2 + b_{n-1}(\varphi) = 0, \\ \varepsilon a(\varphi)z_3^{(1)} + \varepsilon a(\varphi)z_2 + [1+\varepsilon a(\varphi)z_n]z_3 + b_{n-2}(\varphi) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon a(\varphi)z_n^{(1)} + \varepsilon a(\varphi)z_{n-1} + [1+\varepsilon a(\varphi)z_n]z_n + b_1(\varphi) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Якщо система (5) має гладкий розв'язок $(z_1(\varphi,\varepsilon), z_2(\varphi,\varepsilon),\dots,z_n(\varphi,\varepsilon))$ такий, що для деякого $\varepsilon^0>0$ і всіх $\varphi\in\mathcal{T}_m,\ \varepsilon\in\left(0,\varepsilon^0\right]$ виконуються нерівності

$$1+\varepsilon z_i(\varphi,\varepsilon)\neq 0, \quad i=\overline{1,n}, \tag{6}$$

то матриці $V(\varphi,\varepsilon),\ W(\varphi,\varepsilon)$ є невиродженими і при цьому система рівнянь (3) після заміни $X=W(\varphi,\varepsilon)Y$ і множення зліва на $V(\varphi,\varepsilon)$ набере виду

$$\varphi^{(1)}=\omega,$$

$$\operatorname{diag}\{E_n,\varepsilon a(\varphi)\}Y^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1-\varepsilon a z_n \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(\varphi) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

де $Y=\operatorname{col}(y_1,y_2,\dots,y_{n+1})$.

3. Дослідимо систему рівнянь (5), векторна форма якої має вигляд

$$\varepsilon a(\varphi)z^{(1)} + [P(\varphi,\varepsilon)+\varepsilon a(\varphi)z_nE_n]z = b(\varphi), \tag{8}$$

де

$$P(\varphi,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \varepsilon a(\varphi) & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon a(\varphi) & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon a(\varphi) & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -b_n \\ -b_{n-1} \\ \vdots \\ -b_1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Здійснивши у рівнянні (8) заміну

$$z = u + b(\varphi), \tag{9}$$

отримаємо

$$\varepsilon a(\varphi)u^{(1)} + [P_1(\varphi,\varepsilon)+\varepsilon a(\varphi)u_nE_n]u = \varepsilon g(\varphi),$$

де

$$P_1(\varphi,\varepsilon)=\begin{pmatrix}1-\varepsilon ab_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\varepsilon ab_n\\ \varepsilon a & 1-\varepsilon ab_1 & 0 & \dots & 0 & -\varepsilon ab_{n-1}\\ 0 & \varepsilon a & 1-\varepsilon ab_1 & \dots & 0 & -\varepsilon ab_{n-2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon a & 1-2\varepsilon ab_1\end{pmatrix},$$

$$g=-a\left\{b^{(1)}+\left[b_1E_n-\begin{pmatrix}O_{1\times n-1} & O_{1\times 1}\\ E_{n-1} & O_{n-1\times 1}\end{pmatrix}\right]b\right\},\quad u=\operatorname{col}(u_1,u_2,\dots,u_n),$$

$O_{k\times l}$ — нульова $k\times l$-матриця.

Оцінимо мінімальне власне значення матриці

$$\frac{P_1+P_1^*}{2}=\begin{pmatrix}1-\varepsilon ab_1 & \frac{\varepsilon a}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-\varepsilon ab_n}{2}\\ \frac{\varepsilon a}{2} & 1-\varepsilon ab_1 & \frac{\varepsilon a}{2} & 0 & \dots & 0 & \frac{-\varepsilon ab_{n-1}}{2}\\ 0 & \frac{\varepsilon a}{2} & 1-\varepsilon ab_1 & \frac{\varepsilon a}{2} & \dots & 0 & \frac{-\varepsilon ab_{n-2}}{2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-\varepsilon ab_1 & \frac{-\varepsilon a(b_2-1)}{2}\\ \frac{-\varepsilon ab_n}{2} & \frac{-\varepsilon ab_{n-1}}{2} & \frac{-\varepsilon ab_{n-2}}{2} & \frac{-\varepsilon ab_{n-3}}{2} & \dots & \frac{-\varepsilon a(b_2-1)}{2} & 1-2\varepsilon b_1\end{pmatrix},$$

де зірочка — операція транспонування матриці. Для цього знайдемо $\lambda_{\min}(P_2)$ і $\lambda_{\max}(P_3)$, де

$$P_2=\begin{pmatrix}1-\varepsilon ab_1 & \frac{\varepsilon a}{2} & 0 & \dots & 0 & 0\\ \frac{\varepsilon a}{2} & 1-\varepsilon ab_1 & \frac{\varepsilon a}{2} & \dots & 0 & 0\\ 0 & \frac{\varepsilon a}{2} & 1-\varepsilon ab_1 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-\varepsilon ab_1 & \frac{\varepsilon a}{2}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\varepsilon a}{2} & 1-\varepsilon ab_1\end{pmatrix},$$

$$P_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & \frac{b_n}{2}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{b_{n-1}}{2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{b_2}{2}\\ \frac{b_n}{2} & \frac{b_{n-1}}{2} & \dots & \frac{b_2}{2} & b_1\end{pmatrix},$$

урахувавши, що

$$\frac{1}{2}\left[P_1(\varphi,\varepsilon)+P_1^*(\varphi,\varepsilon)\right]=P_2(\varphi,\varepsilon)-\varepsilon a(\varphi)P_3(\varphi). \tag{10}$$

Оскільки власні значення матриці порядку n

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

визначаються за формулою [8, с. 244] $\lambda_k = a - 2\sqrt{\beta\gamma}\cos\dfrac{k\pi}{n+1},\ k = \overline{1,n}$, то

$$\lambda_{\min}(P_2) = 1 - \varepsilon\big|a(\varphi)\big|\left(|b_1(\varphi)| + \cos\frac{\pi}{n+1}\right).$$

Для характеристичного многочлена $\Delta_n(\lambda) = \det[P_3(\varphi) - \lambda E_n]$ матриці $P_3(\varphi)$ виконуються рекурентні співвідношення $\Delta_n(\lambda) = -\lambda\Delta_{n-1}(\lambda) - (-\lambda)^{n-2}b_n^2/4$, розглядаючи які як різницеві рівняння, отримуємо

$$\Delta_n(\lambda) = (-\lambda)^{n-2}\left(\lambda^2 - b_1\lambda - \frac{1}{4}\sum_{i=2}^{n} b_i^2\right),$$

звідки

$$\lambda_{\max}(P_3(\varphi)) = \left\{b_1(\varphi) + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2(\varphi)\right]^{1/2}\right\}\Big/2. \tag{11}$$

З урахуванням (10), (11) отримаємо

$$\langle P_1(\varphi,\varepsilon)\xi,\xi\rangle \geq (1 - \varepsilon p(\varphi))\|\xi\|^2 \quad \forall\varphi \in \mathcal{T}_m,$$

де

$$p(\varphi) = |a(\varphi)|\left[\cos\frac{\pi}{n+1} + \left(3|b_1(\varphi)| + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2(\varphi)}\right)\Big/2\right].$$

Нехай

$$p_0 = \max_{\varphi\in\mathcal{T}_m} p(\varphi), \qquad \varepsilon_0 = \frac{(1-\gamma)}{p_0}, \qquad \gamma = \mathrm{const} \in (0{,}5; 1). \tag{12}$$

Тоді для всіх $\varphi \in \mathcal{T}_m,\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ виконується нерівність

$$\langle P_1(\varphi,\varepsilon)\xi,\xi\rangle \geq \gamma\|\xi\|^2. \tag{13}$$

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \varphi^{(1)} = \omega, \\ \varepsilon a(\varphi)u^{(1)} + \big[P_1(\varphi,\varepsilon) + \varepsilon a(\varphi)u_n E_n\big]u = \varepsilon g(\varphi), \end{cases} \tag{14}$$

у припущенні, що $a(\varphi), b_1(\varphi), \dots, b_n(\varphi) \in C^2(\mathcal{T}_m)$. Рівністю $u = v(\varphi,\varepsilon)$ визначається гладкий інваріантний тор [1] цієї системи рівнянь, якщо має місце тотожність

$$\varepsilon a(\varphi)\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial v}{\partial\varphi_i}\,\omega_i+\big[P_1(\varphi,\varepsilon)+\varepsilon a(\varphi)v_n(t)E_n\big]v=\varepsilon g(\varphi),$$

де v_n — n-та компонента вектора v. Враховуючи комутативність функції $\varepsilon a(\varphi)$ з довільною матричною функцією, отримуємо, що функція $u=v(\varphi,\varepsilon)$ визначає гладкий інваріантний тор системи

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{d\tau}=\varepsilon a(\varphi)\omega,\\[2mm] \dfrac{du}{d\tau}+[P_1(\varphi,\varepsilon)+\varepsilon a(\varphi)u_nE_n]u=\varepsilon g(\varphi).\end{cases}\tag{15}$$

Для знаходження інваріантного тора $u=U(\varphi,\varepsilon)$ нелінійної по u системи рівнянь (15) використаємо один із процесів лінеаризації, розглянутий в [1]. Задамо нульову ітерацію процесу функцією $U_0(\varphi,\varepsilon)=0,\ \varphi\in\mathcal{T}_m,$ і визначимо послідовність торів

$$u=U_{i+1}(\varphi,\varepsilon),\qquad \varepsilon\in(0,\overline{\varepsilon_0}],\quad \overline{\varepsilon_0}\le\varepsilon_0,\quad i=0,1,2,\ldots,$$

кожний з яких є інваріантним тором системи

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{d\tau}=\varepsilon a(\varphi)\omega,\\[2mm] \dfrac{du}{d\tau}+[P_1(\varphi,\varepsilon)+\varepsilon a(\varphi)U_{i,n}(\varphi,\varepsilon)E_n]u=\varepsilon g(\varphi),\end{cases}$$

де $U_{i,n}$ — n-та компонента вектора U_i.

Розглянемо систему рівнянь

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\varepsilon a(\varphi)\omega,\qquad \frac{du}{d\tau}+P_1(\varphi,\varepsilon)u=\varepsilon g(\varphi)\tag{16}$$

і з'ясуємо умови існування та властивості інваріантного тора $u=U_1(\varphi,\varepsilon)$, який визначає перше наближення вказаного ітераційного процесу. Оскільки $a(\varphi)\in C^2(\mathcal{T}_m)$, то задача Коші $\dfrac{d\varphi}{d\tau}=\varepsilon a(\varphi)\omega,\ \varphi|_{\tau=0}=\varphi,$ при кожному фіксованому $\varphi\in\mathcal{T}_m$ має єдиний розв'язок $\varphi_\tau(\varphi,\varepsilon)$, який неперервно залежить від φ.

Нехай $\Omega_s^\tau(\varphi,\varepsilon),\ (\Omega_s^s(\varphi,\varepsilon)=E_n)$ — фундаментальна матриця системи рівнянь

$$\frac{du}{d\tau}=-P_1(\varphi_\tau(\varphi,\varepsilon),\varepsilon)u.$$

Оскільки коефіцієнти другого рівняння (1) за припущенням належать $C^2(\mathcal{T}_m)$, то $P_1(\varphi,\varepsilon)\in$ $\in C^2(\mathcal{T}_m)$, а тому $\varphi_\tau(\varphi,\varepsilon),\ \Omega_s^\tau(\varphi,\varepsilon)\in C^2(\mathcal{T}_m)$ для всіх $\tau,s\in R,\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$. Із нерівності (13) випливає, що

$$G_0(s,\varphi,\varepsilon)=\begin{cases}\Omega_s^0(\varphi,\varepsilon), & s\le 0,\\[2mm] 0, & s>0,\end{cases}\tag{17}$$

для всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ є функцією Гріна [1] задачі про інваріантний тор системи

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\varepsilon a(\varphi)\omega,\qquad \frac{du}{d\tau}=-P_1(\varphi,\varepsilon)u,$$

при цьому

$$\left\|G_0(s,\varphi,\varepsilon)\right\| \leq \sqrt{n}\exp\{\gamma s\}, \qquad s \leq 0, \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0], \quad \varphi \in \mathcal{T}_m, \tag{18}$$

а система рівнянь (16) має інваріантний тор

$$u = U_1(\varphi,\varepsilon) = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(s,\varphi,\varepsilon) g(\varphi_s(\varphi,\varepsilon))ds, \qquad \varphi \in \mathcal{T}_m, \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0], \tag{19}$$

такий, що

$$|U_1(\varphi,\varepsilon)|_0 \leq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\gamma}\,|g(\varphi)|_0, \qquad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0], \quad \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{20}$$

З'ясуємо гладкість інваріантного тора (19) і оцінимо мінімальне значення додатної сталої K, незалежної від φ та ε, для якої виконується нерівність

$$|U_1(\varphi,\varepsilon)|_1 \leq \varepsilon K |g(\varphi)|_1 \tag{21}$$

для всіх $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Стандартним чином [1] доводиться нерівність

$$\left\|D^1_\varphi \varphi_\tau(\varphi,\varepsilon)\right\| \leq \sqrt{m}\exp\{\varepsilon\alpha\tau\}, \qquad \tau \leq 0, \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0],$$

де стала α визначається співвідношенням

$$\min_{\|\xi\|=1} \left\langle (\partial a(\varphi)\omega/\partial\varphi)\xi, \xi\right\rangle \geq \alpha, \tag{22}$$

з урахуванням якої та нерівності (18) для всіх $s \leq 0$ отримуються оцінки

$$\left\|\left[D^1_\varphi G_0(s,\varphi,\varepsilon)\right] g(\varphi_s(\varphi,\varepsilon))\right\| \leq \frac{Mn\sqrt{m}}{|\alpha|}|g(\varphi)|_0 \exp\{(\gamma+\varepsilon\alpha)s\},$$

$$\left\|G_0(s,\varphi,\varepsilon) D^1_\varphi g(\varphi_s(\varphi,\varepsilon))\right\| \leq \sqrt{nm}|g(\varphi)|_1 \exp\{(\gamma+\varepsilon\alpha)s\},$$

$$|G_0(s,\varphi,\varepsilon)g(\varphi_s(\varphi,\varepsilon))|_1 \leq \sqrt{nm}\left(1+\frac{M\sqrt{n}}{|\alpha|}\right)|g(\varphi)|_1 \exp\{(\gamma+\varepsilon\alpha)s\},$$

де

$$M = \left[n|ab_1|_1^2 + \sum_{i=1}^{n}|ab_i|_1^2 + (n-1)|a|_1^2\right]^{1/2}.$$

Якщо покласти $\gamma = 0{,}5 + \dfrac{|\alpha|}{2(p_0+|\alpha|)}$, то з (12) маємо

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2(p_0+|\alpha|)}, \tag{23}$$

$\gamma - \varepsilon|\alpha| \geq 0{,}5$ для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, а з (19) одержуємо шукану оцінку (21), де

$$K = 2\sqrt{nm}\left(1 + M\,\frac{\sqrt{m}}{|\alpha|}\right). \tag{24}$$

Отже, $U_1(\varphi,\varepsilon)$ належить $C^1(\mathcal{T}_m)$ і неперервна по ε рівномірно відносно φ.

Реалізація ітераційного процесу вимагає вивчення умов, при яких система рівнянь

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \varepsilon a(\varphi)\omega, \qquad \frac{dh}{d\tau} + [P_1(\varphi,\varepsilon) + \varepsilon a(\varphi)p_1(\varphi,\varepsilon)E_n]h = \varepsilon g(\varphi) \tag{25}$$

має інваріантний тор $h = u(\varphi,\varepsilon) \in C^1(\mathcal{T}_m)$ для всіх скалярних функцій $p_1(\varphi,\varepsilon)$ і $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$, де $\varepsilon_1 = \mathrm{const} > 0,\ \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$.

Лема. *Нехай* $a(\varphi), b_1(\varphi), b_2(\varphi), \ldots, b_n(\varphi) \in C^2(\mathcal{T}_m),\ p_1(\varphi,\varepsilon) \in C^1(\mathcal{T}_m)$ *— довільна скалярна функція така, що*

$$|p_1(\varphi,\varepsilon)|_0 \leq 4\varepsilon\sqrt{n}|g(\varphi)|_0, \qquad |p_1(\varphi,\varepsilon)|_1 \leq 2\varepsilon K|g(\varphi)|_1, \tag{26}$$

де стала K *визначена рівністю (24).*

Тоді можна вказати додатне число $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ *таке, що система рівнянь (25) має інваріантний тор* $h = u(\varphi,\varepsilon) \in C^1(\mathcal{T}_m)$ *такий, що*

$$|u(\varphi,\varepsilon)|_0 \leq 4\varepsilon\sqrt{n}|g(\varphi)|_0, \qquad |u(\varphi,\varepsilon)|_1 \leq 2\varepsilon K|g(\varphi)|_1 \tag{27}$$

для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$.

Доведення. Розглянемо інтегральне рівняння

$$u = \varepsilon G a(\varphi)p_1(\varphi,\varepsilon)u + \varepsilon G g(\varphi), \tag{28}$$

де G — оператор, заданий на функціях $\psi(\varphi,\varepsilon) \in C^1(\mathcal{T}_m)$ рівністю

$$G\psi(\varphi,\varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(s,\varphi,\varepsilon)\psi(\varphi_s(\varphi,\varepsilon),\varepsilon)ds,$$

G_0 — функція Гріна (17), $\varphi_s(\varphi,\varepsilon),\ \varphi_0 = \varphi,$ — розв'язок першого рівняння системи (25).

Оцінимо норму оператора $Ga(\varphi)p_1(\varphi,\varepsilon)$ у просторах $C(\mathcal{T}_m)$ та $C^1(\mathcal{T}_m)$. Враховуючи співвідношення, що використовувалися при доведенні (20) і (21), а також (26), для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ отримаємо

$$|Ga(\varphi)p_1(\varphi,\varepsilon)|_0 \leq 8n\varepsilon|a|_0|g|_0, \qquad |Ga(\varphi)p_1(\varphi,\varepsilon)|_1 \leq 2\varepsilon K^2|a|_1|g|_1.$$

Покладемо

$$\varepsilon_1 = \min\left\{\varepsilon_0; (2K)^{-1}(|a|_1|g|_1)^{-1/2}\right\}.$$

Тоді для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$ виконується нерівність $\varepsilon|Ga(\varphi)p_1(\varphi,\varepsilon)|_1 \leq 1/2$ і рівняння (28) має в $C^1(\mathcal{T}_1)$ єдиний розв'язок

$$u(\varphi,\varepsilon) = \varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}[\varepsilon Ga(\varphi)p_1(\varphi,\varepsilon)]^k Gg(\varphi),$$

який з урахуванням (20), (21) для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$ задовольняє нерівності (27) і є неперервним по ε рівномірно відносно φ, що й завершує доведення леми.

Покладемо у системі рівнянь (25) $p_1(\varphi,\varepsilon) = U_{1,n}(\varphi,\varepsilon),\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$. Завдяки нерівностям (20) і (21) виконується нерівність (26), а тому згідно з лемою для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$ інваріантний тор $h = U_2(\varphi,\varepsilon),\ \varphi \in \mathcal{T}_m,$ системи (25) існує та задовольняє нерівності

$$|U_2(\varphi,\varepsilon)|_0 \le 4\varepsilon\sqrt{n}|g(\varphi)|_0, \qquad |U_2(\varphi,\varepsilon)|_1 \le 2\varepsilon K|g(\varphi)|_1, \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_1].$$

Цього достатньо, щоб по другій ітерації знайти третю, поклавши в системі (25) $p_1(\varphi,\varepsilon) = U_{2,n}(\varphi,\varepsilon)$.

Припустимо, що для обраного $\varepsilon_1 > 0$ вже знайдені ітерації для $i = 1, 2, \ldots, k-1$ і всі вони задовольняють нерівності вигляду (27). Наступне k-те наближення визначається тоді з системи рівнянь (25), де $p_1(\varphi,\varepsilon) = U_{k-1,n}(\varphi,\varepsilon)$, як її інваріантний тор

$$h = U_k(\varphi,\varepsilon), \qquad \varphi \in \mathcal{T}_m, \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_1]. \tag{29}$$

Але оскільки для $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$ $U_{k-1}(\varphi,\varepsilon)$ задовольняє нерівності вигляду (27), то й стосовно $U_{k-1,n}(\varphi,\varepsilon)$ виконуються нерівності вигляду (26), а тому згідно з лемою тор (29) існує, причому

$$|U_k(\varphi,\varepsilon)|_0 \le 4\varepsilon\sqrt{n}|g(\varphi)|_0, \qquad |U_k(\varphi,\varepsilon)|_1 \le 2\varepsilon K|g(\varphi)|_1, \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_1]. \tag{30}$$

Метод повної математичної індукції гарантує, що для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$ довільна з ітерацій процесу визначена і задовольняє нерівності вигляду (30).

Доведемо збіжність ітераційного процесу. Для цього розглянемо різницю

$$w_{k+1}(\varphi,\varepsilon) = U_{k+1}(\varphi,\varepsilon) - U_k(\varphi,\varepsilon), \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_1].$$

Оскільки функції $U_k(\varphi,\varepsilon)$ належать $C^1(\mathcal{T}_m),\ k = 1, 2, \ldots,$, то інваріантний тор відповідної системи рівнянь, який нею визначається, є гладким. Тому

$$\varepsilon a(\varphi)\,\frac{dU_{k+1}(\varphi,\varepsilon)}{dt} = -[P_1(\varphi,\varepsilon) + \varepsilon a(\varphi)U_{k,n}(\varphi,\varepsilon)E_n]U_{k+1}(\varphi,\varepsilon) + \varepsilon g(\varphi)$$

для всіх $\varphi \in \mathcal{T}_m,\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$. Тоді вектор-функція $w_{k+1}(\varphi,\varepsilon)$ задовольняє рівняння

$$\varepsilon a(\varphi)\,\frac{dw_{k+1}(\varphi,\varepsilon)}{dt} = -[P_1(\varphi,\varepsilon) + \varepsilon a(\varphi)U_{k,n}(\varphi,\varepsilon)E_n]w_{k+1}(\varphi,\varepsilon) - \varepsilon a(\varphi)w_{k,n}U_k. \tag{31}$$

Інваріантний тор $h = w_{k+1}(\varphi,\varepsilon),\ \varphi \in \mathcal{T}_m,\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$, системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \varepsilon a(\varphi)\omega, \quad \frac{dh}{d\tau} = -[P_1(\varphi,\varepsilon) + \varepsilon a(\varphi)U_{k,n}(\varphi,\varepsilon)E_n]h + \varepsilon g_k(\varphi,\varepsilon), \tag{32}$$

де

$$g_k(\varphi,\varepsilon) = -a(\varphi)w_{k,n}(\varphi,\varepsilon)U_k(\varphi,\varepsilon), \tag{33}$$

є періодичним розв'язком рівняння (31), якщо $h \in C^1(\mathcal{T}_m)$. З урахуванням нерівностей (30) система рівнянь (32) задовольняє умови леми, у відповідності з якою для $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$

$$|w_{k+1}(\varphi,\varepsilon)|_0 \le 4\varepsilon\sqrt{n}|g_k(\varphi,\varepsilon)|_0, \qquad |w_{k+1}(\varphi,\varepsilon)|_1 \le 2\varepsilon K|g_k(\varphi,\varepsilon)|_1.$$

Використавши (30) та (33), отримаємо для $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$

$$|w_{k+1}(\varphi,\varepsilon)|_0 \le 16\varepsilon^2 n|a|_0|g|_0|w_k(\varphi,\varepsilon)|_0, \qquad |w_{k+1}(\varphi,\varepsilon)|_1 \le 4\varepsilon^2 K^2|a|_1|g|_1|w_k(\varphi,\varepsilon)|_1.$$

Покладемо

$$\varepsilon_2 = \Big(2K\sqrt{2|a|_1|g|_1}\Big)^{-1}. \tag{34}$$

Тоді для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$, $|w_{k+1}(\varphi, \varepsilon)|_l \leq |w_k(\varphi, \varepsilon)|_l/2$ і $|w_{k+1}(\varphi, \varepsilon)|_l \leq (0{,}5)^k|w_1(\varphi, \varepsilon)|_l$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $l = 0; 1$, що забезпечує збіжність послідовності $U_k(\varphi, \varepsilon)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, в $C^1(\mathcal{T}_m)$. А тому з урахуванням повноти простору $C^1(\mathcal{T}_m)$ існує функція $U(\varphi, \varepsilon)$, яка належить $C^1(\mathcal{T}_m)$ для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ і така, що $\lim_{k\to\infty} U_k(\varphi, \varepsilon) = U(\varphi, \varepsilon)$ рівномірно по $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$. Здійснивши граничний перехід у нерівностях (30), отримаємо

$$|U(\varphi, \varepsilon)|_0 \leq 4\varepsilon\sqrt{n}|g(\varphi)|_0, \qquad |U(\varphi, \varepsilon)|_1 \leq 2\varepsilon K|g(\varphi)|_1, \qquad \varphi \in \mathcal{T}_m, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_2], \tag{35}$$

звідки випливає неперервність по ε в точці $\varepsilon = 0$ функцій $U(\varphi, \varepsilon)$, $D^1_\varphi U(\varphi, \varepsilon)$ рівномірно відносно $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Отже, система рівнянь (15) має інваріантний тор $u = U(\varphi, \varepsilon) \in C^1(\mathcal{T}_m)$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $\varepsilon \in \in (0, \varepsilon_2]$, для якого виконуються нерівності (35). А тому система (14) має квазіперіодичний розв'язок $u = U(\omega t, \varepsilon) \in C^1(\mathcal{T}_m)$, а з урахуванням (9) система рівнянь (8) має розв'язок

$$z(\omega t, \varepsilon) = U(\omega t, \varepsilon) + b(\omega t). \tag{36}$$

Знайдемо $\varepsilon_3 \in (0, \varepsilon_2]$ таке, що для всіх $\varphi \in \mathcal{T}_m, \varepsilon \in (0, \varepsilon_3]$ виконуються всі нерівності (6). Використавши (35) і (36), одержимо

$$\varepsilon_3 = \min\left\{\varepsilon_2; \frac{-|b|_0 + \left[|b|_0^2 + 16\sqrt{n}|g|_0\right]^{1/2}}{8\sqrt{n}|g|_0}\right\}. \tag{37}$$

Таким чином, матриці $V(\varphi, \varepsilon)$, $W(\varphi, \varepsilon)$, визначені (4), належать $C^1(\mathcal{T}_m)$, якщо $\varepsilon \in \in (0, \varepsilon_2]$, і не вироджені для всіх $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3]$. Тому система рівнянь (3) зводиться до рівносильної системи (7).

4. Розглянемо останнє рівняння системи (7):

$$\varphi^{(1)} = \omega, \qquad \varepsilon a(\varphi)y^{(1)}_{n+1} = -\{1 + \varepsilon a(\varphi)[u_n(\varphi, \varepsilon) - b_1(\varphi)]\}y_{n+1} + f(\varphi), \tag{38}$$

де u_n — остання компонента вектор-функції $U(\varphi, \varepsilon)$.

Якщо система рівнянь

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \varepsilon a(\varphi)\omega, \qquad \frac{dy_{n+1}}{d\tau} = -\{1 + \varepsilon a(\varphi)[u_n(\varphi, \varepsilon) - b_1(\varphi)]\}y_{n+1} + f(\varphi), \tag{39}$$

для деякого $\varepsilon_4 \in (0, \varepsilon_3]$ має інваріантний тор $y_{n+1} = v(\varphi, \varepsilon) \in C^1(\mathcal{T}_m)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_4]$, то система (38) має гладкий квазіперіодичний розв'язок.

Покладемо

$$\varepsilon_4 = \min\left\{\varepsilon_3; \frac{-(|ab_1|_0 + |\alpha|) + \left[(|ab_1|_0 + |\alpha|)^2 + 8\sqrt{n}|a|_0|g|_0\right]^{1/2}}{8\sqrt{n}|a|_0|g|_0}\right\}, \tag{40}$$

де число α визначене в (22). Тоді з урахуванням першої нерівності (35) для всіх $\varepsilon \in \in (0, \varepsilon_4]$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$

$$1 - \varepsilon\big\{|a(\varphi)|_0|u_n(\varphi, \varepsilon)|_0 + |a(\varphi)b_1(\varphi)|_0 + |\alpha|\big\} \geq 1/2,$$

а інваріантний тор системи (39) має вигляд

$$y_{n+1}^0(\varphi,\varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{G}_0(s,\varphi,\varepsilon) f(\varphi_s(\varphi,\varepsilon))ds, \qquad \varphi \in \mathcal{T}_m, \quad 0 < \varepsilon \le \varepsilon_4,$$

де

$$\overline{G}_0(s,\varphi,\varepsilon) = \begin{cases} \exp\left\{ -\int_s^0 \{1 + \varepsilon a(\varphi_\tau(\varphi,\varepsilon))[u_n(\varphi_\tau(\varphi,\varepsilon),\varepsilon) - b_1(\varphi_\tau(\varphi,\varepsilon))]\} \, d\tau \right\}, & s \le 0, \\ 0 & s > 0, \end{cases}$$

$\varphi_\tau(\varphi,\varepsilon),\ \varphi_0(\varphi,\varepsilon) = \varphi,$ — розв'язок першого рівняння системи (39). При цьому $y_{n+1}^0(\varphi,\varepsilon) \in$ $\in C_1(\mathcal{T}_m)$ для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_4],\ y_{n+1}^0(\varphi,0) = f(\varphi),\ |y_{n+1}^0(\varphi,\varepsilon)|_0 \le 2|f(\varphi)|_0,$ а тому

$$y_{n+1}^0(\varphi,\varepsilon) = f(\varphi) + \overline{y}^0(\varphi,\varepsilon), \qquad \bar{y}_{n+1}^0(\varphi,0) = 0. \tag{41}$$

В результаті система рівнянь (7) зводиться до вигляду

$$\varphi^{(1)} = \omega, \qquad Y_1^{(1)} = [B(\varphi) + B_1(\varphi,\varepsilon)]Y_1 + f_1(\varphi,\varepsilon), \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_4], \tag{42}$$

де

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -b_n & -b_{n-1} & -b_{n-2} & \dots & -b_1 \end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ U_1 & U_2 & \dots & U_n \end{pmatrix}, \tag{43}$$

$$U(\varphi,\varepsilon) = \mathrm{col}\,\left(U_1^0(\varphi,\varepsilon), \dots, \dots U_n^0(\varphi,\varepsilon)\right),$$

$$f_1(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\,\left(0, \dots, 0, y_{n+1}^0(\varphi,\varepsilon)\right), \quad Y_1 = \mathrm{col}\,(y_1, y_2, \dots, y_n)\,. \tag{44}$$

Нехай $G^0(\tau,\varphi)$ — функція Гріна системи рівнянь

$$\varphi^{(1)} = \omega, \qquad x_1^{(1)} = B(\varphi)x$$

така, що

$$\left\|G^0(\tau,\varphi)\right\| \le M_0 \exp\{-\gamma_0|\tau|\}, \quad -\infty < \tau < \infty, \tag{45}$$

де M_0 і γ_0 — додатні сталі, які не залежать від φ. Тоді друге рівняння (42) рівносильне інтегральному рівнянню

$$Y_1 = TB_1(\varphi,\varepsilon)Y_1 + Tf_1(\varphi,\varepsilon), \tag{46}$$

де T — оператор, заданий на функціях $\psi(\varphi,\varepsilon) \in C^0(\mathcal{T}_m),\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_4],$ рівністю

$$T\psi(\varphi,\varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G^0(s,\varphi)\psi(\omega s,\varepsilon)\,ds.$$

Оцінюючи норму оператора $TB_1(\varphi,\varepsilon)$ у просторі $C^0(\mathcal{T}_m)$, використовуємо співвідношення (43), (44) і (35). В результаті для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_4]$ маємо

$$|TB_1(\varphi,\varepsilon)|_0 \leq 4\varepsilon\sqrt{n}M_0|g(\varphi)|_0/\gamma_0.$$

Покладемо

$$\varepsilon^0 = \min\left\{\varepsilon_4; \frac{\gamma_0}{8\sqrt{n}M_0|g(\varphi)|_0}\right\}. \tag{47}$$

Тоді для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon^0]$ $|TB_1(\varphi,\varepsilon)|_0 \leq 1/2$ і рівняння (46) має єдиний розв'язок

$$Y_1^0(\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}[TB_1(\varphi,\varepsilon)]^k Tf_1(\varphi,\varepsilon), \tag{48}$$

для якого

$$\left|Y_1^0(\varphi,\varepsilon)\right|_0 \leq 4M_0|f(\varphi)|_0/\gamma_0, \quad \varepsilon \in \left(0,\varepsilon^0\right].$$

Рівняння (2) рівносильне системі рівнянь

$$Y_0^{(1)} = B(\omega t)Y_0 + f_0(\omega t), \tag{49}$$

де

$$Y_0 = \mathrm{col}\left(y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}\right), \qquad f_0 = \mathrm{col}\,(0,\ldots,0,f).$$

При цьому її єдиний квазіперіодичний розв'язок має вигляд

$$Y_0(\omega t) = Tf_0(\omega t) = \int_{-\infty}^{\infty} G^0(s,\omega t) f_0(\omega s)ds,$$

а квазіперіодичний розв'язок рівняння (2) визначається рівністю

$$y_0(\omega t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1^0(s,\omega t) f_0(\omega s)ds, \tag{50}$$

де $G_1^0(s,\varphi)$ — перший рядок матричної функції Гріна $G^0(s,\varphi)$.

Із співвідношень (48), (43), (41), (49) і (50) отримується рівність

$$Y_1^0(\omega t,\varepsilon) = Tf_0 + \overline{Y}_1^0(\omega t,\varepsilon) = Y_0(\omega t) + \overline{Y}_1^0(\omega t,\varepsilon), \tag{51}$$

де вектор-функція $\overline{Y}_1^0(\omega t,\varepsilon)$ неперервна по ε і $\overline{Y}_1^0(\omega t,0) = 0$.

Отже, для всіх $\varepsilon \in \left(0,\varepsilon^0\right]$ система рівнянь (3) має квазіперіодичний розв'язок

$$X_0(\omega t,\varepsilon) = W(\omega t,\varepsilon)\begin{pmatrix} Y_1^0(\omega t,\varepsilon) \\ y_{n+1}^0(\omega t,\varepsilon)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1^0(\omega t,\varepsilon) \\ W_{n+1}(\omega t,\varepsilon)\begin{pmatrix} Y_1^0(\omega t,\varepsilon) \\ y_{n+1}^0(\omega t,\varepsilon)\end{pmatrix}\end{pmatrix},$$

де W_{n+1} — $(n+1)$-й рядок матриці $W(\omega t,\varepsilon)$. А тому квазіперіодичним розв'язком вихідної системи (1) є перша компонента вектора $Y_1^0(\omega t,\varepsilon)$, яка з урахуванням рівностей (50), (51) має вигляд $x_0(\omega t,\varepsilon) = y_0(\omega t) + \overline{Y}_{11}^0(\omega t,\varepsilon)$, де $Y_{11}^0(\omega t,\varepsilon)$ — перша компонента вектора $\overline{Y}_1(\omega t,\varepsilon)$, яка прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$.

У підсумку отримуємо таке твердження.

Теорема. *Нехай стосовно рівнянь (1) та (2) виконуються умови:*

1) $a, b_1, b_2, \ldots, b_n \in C^2(\mathcal{T}_m),\ f \in C(\mathcal{T}_m)$*;*

2) *існує функція Гріна* $G^0(\tau, \varphi)$ *диференціального оператора, породженого однорідною системою рівнянь, рівносильною рівнянню (2), така, що виконується нерівність (45).*

Тоді існує додатне число ε^0, *визначене співвідношеннями (23), (34), (37), (40), (47), таке що для всіх* $\varepsilon \in \left(0, \varepsilon^0\right]$ *та будь-якої неоднорідності* f *рівняння (1) має квазіперіодичний розв'язок* $x_0(\omega t, \varepsilon)$, *неперервний по* ε *рівномірно відносно* t *і такий, що* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} x_0(\omega t, \varepsilon) = y_0(\omega t)$, *де* $y_0(\omega t)$ *— квазіперіодичний розв'язок рівняння (2).*

Література

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – К.: Наук. думка, 1990. – 270 с.
3. *Єрьоменко В. О.* Періодичні розв'язки функціонально-сингулярно збурених лінійних звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки: Зб. наук. праць. – Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка. – 2012. – Вип. 6. – С. 97 – 115.
4. *Єрьоменко В. О., Алілуйко А. М.* Квазіперіодичні розв'язки лінійних вироджених систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 6. – С. 773 – 783.
5. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища шк., 2000. – 294 с.
6. *Мозер Ю.* Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, № 4. – С. 179 – 238.
7. *Симоконь В. Х., Трофимчук Е. П.* О регулярности линейных систем с вырожденной матрицей при производной // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 2. – С. 279 – 286.
8. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1973. – 352 с.

Одержано 16.05.2017,
після доопрацювання — 24.10.2018