УДК 517.9

СХЕМИ ПОВНОГО УСЕРЕДНЕННЯ В ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЮ СИСТЕМОЮ

О. Д. Кічмаренко

Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова,
вул. Дворянська, 2, Одеса, 65000, Україна
e-mail: olga.kichmarenko@gmail.com

For nonlinear controlled functional-differential systems, the possibility of applying the averaging method on a finite interval without the condition of asymptotic control constancy is proved and an algorithm for constructing the corresponding controls over the original and averaged systems is proposed.

Для нелинейных управляемых функционально-дифференциальных систем обоснована возможность применения метода усреднения на конечном промежутке без условия асимптотического постоянства управления, предложен алгоритм построения соответствующих управлений исходной и усредненной систем.

1. Вступ. Строге обґрунтування методу усереднення отримано в роботах Н. М. Крилова, М. М. Боголюбова [1]. Фундаментальні розробки різних алгоритмів методу усереднення і розширення систем рівнянь, для яких можна застосувати метод, одержано в роботах М. М. Боголюбова, Ю. О. Митропольського [2], А. М. Самойленка [3], О. М. Філатова, М. М. Хапаєва [4, 5] та ін. Обґрунтування методу усереднення для диференціальних рівнянь із запізненням запропоновано в [6], а також у [7, 8], для диференціальних рівнянь із максимумом — у [9 – 12]. Подальше узагальнення методу усереднення на функціонально-диференціальні рівняння можна знайти, наприклад, у роботах J. Hale [13, 14] та B. Lehman, S. Weibel [15]. Застосування методу усереднення для дослідження задач оптимального керування запропонував М. М. Моісеєв [16]. Один із підходів — усереднення крайової задачі принципу максимуму Л. С. Понтрягіна. При цьому виникають суттєві труднощі, пов'язані з розривністю функції правої частини диференціальних рівнянь крайової задачі. Принципово інший підхід у використанні методу усереднення ґрунтується на безпосередньому усередненні рівнянь керованого руху. Цей метод ставить у відповідність точній задачі оптимального керування більш просту задачу оптимального керування, розв'язання якої можна проводити будь-яким чисельним методом. В. О. Плотніков [17] переніс згаданий метод на загальний випадок вимірних керувань і обґрунтував його, розробивши метод усереднення диференціальних включень. Застосування методу усереднення до функціонально-диференціальних систем з асимптотично сталим керуванням запропоновано в [18].

Мета даної роботи — довести можливість застосування методу усереднення на скінченному проміжку для функціонально-диференціальних систем з керуванням, яке входить нелінійно та без умови асимптотичної сталості керування.

2. Необхідні позначення і постановка задачі. Введемо необхідні в подальшому позначення та функціональні простори. Оберемо дійсне число $h \geq 0$ та зафіксуємо його. Позначимо через $C_n([-h, 0]; \mathbb{R}^n)$ банахів простір неперервних визначених на $[-h, 0]$ векторфункцій, які діють у простір $\mathbb{R}^n$, з рівномірною метрикою $\|\varphi\|_C = \max_{\theta\in[-h;0]}|\varphi(\theta)|$, де $|\cdot|$ — норма в $\mathbb{R}^n$, при цьому через $\|\cdot\|$ будемо позначати норму матриці, узгоджену з нормою вектора.

Нехай $x \in C_n([0,\infty);\mathbb{R}^n)$, початкова функція φ належить $C_n([-h,0];\mathbb{R}^n)$ при деякому $h \geq 0$. Якщо $x(0) = \varphi(0)$, то функція

$$x(t,\varphi) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-h,0], \\ x(t), & t \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

є неперервною.

Стандартним чином введемо елемент $x_t(\varphi) \in C_n([-h,0];\mathbb{R}^n)$ для кожного $t \geq 0$ при $\theta \in [-h,0]$ як $x_t(\varphi) = x(t+\theta,\varphi)$. Надалі використовуватимемо x_t замість $x_t(\varphi)$.

Будемо говорити, що функція $x(t)$ є розв'язком початкової задачі

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x_t), \qquad x(s) = \varphi(s), \quad s \in [-h,0], \quad \varphi \in C_n, \tag{2}$$

на $[0,\infty)$, якщо для кожного $t \geq 0$ функція $x(t,\varphi)$ з (1) задовольняє співвідношення

$$x(t,\varphi) = \varphi(0) + \int\limits_0^t f(s,x_s(\varphi))ds. \tag{3}$$

Розглянемо задачу оптимального керування системою, яка описується функціонально-диференціальним рівнянням вигляду

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon\left[f(t,x_t) + A(x(t))\psi(t,u)\right], \qquad x(s) = \varphi(s), \quad s \in [-h,0], \tag{4}$$

з критерієм якості

$$J_\varepsilon[u] = \Phi\left(x\left(L\varepsilon^{-1},u\right)\right) \to \inf, \tag{5}$$

де $t \geq 0$, x — n-вимірний фазовий вектор, $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $f\colon \mathbb{R}_+ \times C_n \to \mathbb{R}^n$, $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $\psi\colon \mathbb{R}_+ \times U \to \mathbb{R}^m$, вектор керування $u(t) \in U$, $U \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^r)$, $L > 0$ — деяка константа.

Керування $u(t)$ вважається допустимим для задачі (4), (5), якщо виконуються такі умови:

A1) функція $u(t)$ є локально інтегровною при $t \geq 0$;

A2) $u(t) \in U$ для $t \geq 0$.

Через $x(t,u)$ позначимо розв'язок рівняння (4) при фіксованому допустимому керуванні $u(t)$.

Розв'язком задачі (4), (5) є пара $(x^*(t),u^*(t))$, якщо $u^*(t)$ — допустиме керування та $J_\varepsilon[u^*] = \inf_{u\in U} J_\varepsilon[u]$, а $x^*(t)$ — траєкторія, що відповідає керуванню $u^*(t)$.

3. Усереднення функціонально-диференціальних рівнянь, що містять керування. Усереднену керовану систему, яка відповідатиме вихідній системі (4), побудуємо у такий спосіб.

Для кожного елемента $\varphi \in C_n$ через $\bar{\varphi} \in C_n$ позначимо такий, що $\bar{\varphi}(t) = \varphi(0)$ при $t \in [-h,0]$. За відображенням $f(t,\varphi)\colon \mathbb{R}_+ \times C_n \to \mathbb{R}^n$ будуємо відображення $\tilde{f}(t,x)\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ таким чином. Для кожного $x \in \mathbb{R}^n$ розглянемо елемент $\varphi \in C_n$ такий, що $\varphi(0) = x$. Тоді $\tilde{f}(t,x) = f(t,\bar{\varphi})$. Очевидно, що $\tilde{f}$ є вже скінченновимірним відображенням.

Нехай виконана така умова:

B1) рівномірно за $x \in \mathbb{R}^n$ існує границя

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \tilde{f}(t,x)dt = \overline{f}(x). \tag{6}$$

Тоді функціонально-диференціальному рівнянню (4) поставимо у відповідність усереднене рівняння

$$\frac{dy}{dt} = \left[\,\overline{f}(y(t)) + A(y(t))v\right], \quad y(0) = \varphi(0), \tag{7}$$

де

$$v \in V = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \psi(t,U)dt, \tag{8}$$

v — новий вектор керування, інтеграл у (8) розуміємо в сенсі Аумана [19], збіжність — у сенсі метрики Хаусдорфа.

Для системи (7) розглянемо задачу оптимального керування з критерієм якості

$$\bar{J}_\varepsilon[v] = \Phi\left(y(L\varepsilon^{-1}, v)\right) \to \inf. \tag{9}$$

Керування $v(\varepsilon t)$ вважається допустимим для задачі (7), (9), якщо виконуються такі умови:

A3) функція $v(\varepsilon t)$ є локально інтегровною при $t \geq 0$;

A4) $v(\varepsilon t) \in V$ для $t \geq 0$.

Через $y(t,v)$ позначимо розв'язок рівняння (7) при фіксованому допустимому керуванні $v(\varepsilon t)$.

Аналогічно будемо розуміти $(y^*(\varepsilon t), v^*(\varepsilon t))$ як розв'язок задачі (7), (9), якщо $v^*(\varepsilon t)$ — допустиме керування та $\bar{J}_\varepsilon\left[v^*\right] = \inf\limits_{v\in V} J_\varepsilon[v]$, а $y^*(\varepsilon t)$ — траєкторія, що відповідає керуванню $v^*(\varepsilon t)$.

Зауважимо, що (7) — це звичайне диференціальне рівняння при допустимому керуванні $v(\varepsilon t)$.

Основним результатом даної роботи є обґрунтування чисельно-асимптотичного методу розв'язання задачі оптимального керування функціонально-диференціальною системою (4), (5) шляхом розв'язання усередненої задачі оптимального керування системою, яка описується звичайними диференціальними рівняннями (7), (9).

Нехай далі виконуються такі умови:

B2) відображення $f(t,\varphi)\colon \mathbb{R}_+ \times C_n \to \mathbb{R}^n$ неперервне за сукупністю змінних;

B3) відображення $f(t,\varphi)\colon \mathbb{R}_+ \times C_n \to \mathbb{R}^n$ задовольняє умову Ліпшиця по φ з константою λ, тобто існує константа $\lambda > 0$ така, що для довільних $\varphi_1, \varphi_2 \in C_n$ виконується нерівність

$$|f(t,\varphi_1) - f(t,\varphi_2)| \leq \lambda \|\varphi_1 - \varphi_2\|_C;$$

B4) існує константа $M > 0$ така, що $|f(t,0)| \leq M$;

B5) матричнозначна функція $A(x)$ рівномірно обмежена константою M і задовольняє умову Ліпшиця з константою λ;

B6) функція $\psi(t,u)$ неперервна по t та u і обмежена константою M_1.

Встановимо відповідність між функціями керування $u(t) \in U$ точної задачі (4) та функціями керування $v(\varepsilon t) \in V$ усередненої задачі (7) за *таким алгоритмом*:

1. Кожному допустимому керуванню $v(\tau) \in V,\ \tau = \varepsilon t,$ поставимо у відповідність керування $u(t) \in U$ таким чином:

а) обчислюємо точки $v_i = \dfrac{1}{T_1}\displaystyle\int_{iT_1}^{(i+1)T_1} v(\tau)\,d\tau,$ де T_1 — довільна константа;

б) будуємо керування $u(t) = \{u_i(t),\ iT_1 \le t < (i+1)T_1,\ i = 0, 1, \ldots\},$ де $u_i(t)$ знаходимо з умови

$$\min_{u\in U}\left\|\frac{1}{T_1}\int\limits_{iT_1}^{(i+1)T_1}\psi(t,u)dt - v_i\right\| = \left\|\frac{1}{T_1}\int\limits_{iT_1}^{(i+1)T_1}\psi(t,u_i)dt - v_i\right\|. \tag{10}$$

2. Керуванню $u(t) \in U$ ставимо у відповідність $v(\tau) \in V$ у такий спосіб:

а) обчислюємо $w_i = \dfrac{1}{T_1}\displaystyle\int_{iT_1}^{(i+1)T_1}\psi(t, u_i(t))dt;$

б) будуємо керування $v(\varepsilon t) = \{v_i,\ iT_1 \le t < (i+1)T_1,\ i = 0, 1, \ldots\}$, де v_i визначаємо з умови

$$\min_{v\in V}\|w_i - v\| = \|w_i - v_i\|. \tag{11}$$

Знаходження керування $u_i(t)$ в (10) можливе не завжди, але умова рівномірної обмеженості функції $\psi(t,u)$ гарантує існування розв'язку задачі мінімізації (10). Дійсно, з рівномірної обмеженості функції $\psi(t,u)$ випливає інтегральна обмеженість відображення $\psi(t,U)$, а тому опуклість і компактність множини точок

$$\left\{\frac{1}{T_1}\int\limits_{iT_1}^{(i+1)T_1}\psi(t,u_i)dt\,\middle|\, u_i \in U\right\},$$

що є наслідком узагальнення теореми Ляпунова [20]. Отже, існує точка цієї множини, найближча до v_i, тобто існує керування $u_i(t)$ в (10).

Таким чином, для будь-якого допустимого керування $v(\tau) \in V$ усередненої системи існує ступінчасте керування $u(t)$ вихідної системи і, навпаки, для будь-якого допустимого керування $u(t) \in U$ вихідної системи існує ступінчасте керування усередненої системи $v(\tau) \in V$.

Наступна теорема узагальнює метод усереднення для функціонально-диференціальних рівнянь, коли їх права частина залежить від функціональних параметрів.

Теорема 3.1. *Нехай в області* $Q = \{t \ge 0,\ \varphi \in \mathrm{C}_n,\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in U \subset \mathrm{comp}\,(\mathbb{R}^r)\}$ *виконані умови B1) – B6).*

Тоді для довільних $\eta > 0$ *і* $L > 0$ *існує* $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$ *таке, що для будь-яких* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *і* $t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$ *справедливі такі твердження:*

1) розв'язки $x(t,u)$ *і* $y(\varepsilon t, v)$ *задач (4) і (7) визначені на* $t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$;

2) для будь-якого допустимого керування $u(t) \in U$ *системи (4) існує керування* $v(\varepsilon t)$ *системи (7) таке, що*

$$|x(t) - y(\varepsilon t)| \le \eta, \tag{12}$$

де $x(t)$ *— розв'язок системи (4) з керуванням* $u(t),$ $y(\varepsilon t)$ *— розв'язок системи (7) з керуванням* $v(\varepsilon t)$ *і* $x(0) = y(0) = \varphi(0).$

3) для будь-якого допустимого керування $v(\varepsilon t) \in V$ системи (7) існує керування $u(t)$ системи (4) таке, що справедлива оцінка (12).

Доведення. Для доведення першого твердження теореми зауважимо, що за умовами B2) – B4) функція правої частини вихідного рівняння (4) є неперервною за сукупністю змінних, задовольняє умову Ліпшиця та обмежена, а отже, й функція правої частини усередненої системи (7) є обмеженою та задовольняє умову Ліпшиця і умову лінійного росту, а тому при фіксованих допустимих керуваннях $u(t)$ і $v(\varepsilon t)$ розв'язки задач (4) і (7) існують, єдині і необмежено продовжувані вправо.

Доведемо твердження 2. Нехай $u(t)$ — деяке допустиме керування системи (4), а $x(t)$ — відповідна йому траєкторія, визначена для всіх $t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$, $v(\varepsilon t)$ — керування усередненої системи (7), побудоване за алгоритмом (11), а $y(\varepsilon t)$ — відповідна йому траєкторія.

Переходячи від (4) і (7) до відповідних інтегральних зображень на $t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$, отримуємо нерівність

$$|x(t) - y(\varepsilon t)| \leq \varepsilon \left| \int_0^t \left[f(s, x_s) - f(s, y(\varepsilon s))\right] ds \right| + \varepsilon \left| \int_0^t \left[\tilde{f}(s, y(\varepsilon s)) - \overline{f}(y(\varepsilon s))\right] ds \right| +$$

$$+ \varepsilon \int_0^t \|A(x(s)) - A(y(\varepsilon s))\| \, |\psi(s, u(s))| \, ds +$$

$$+ \varepsilon \left| \int_0^t A(y(\varepsilon s)) \left[\psi(s, u(s) - v(\varepsilon s)\right] ds \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon\lambda \int_0^t \|x_s - y(\varepsilon s)\|_{C_n} ds + \varepsilon \left| \int_0^t \left[\tilde{f}(s, y(\varepsilon s)) - \overline{f}(y(\varepsilon s))\right] ds \right| +$$

$$+ \varepsilon\lambda M_1 \int_0^t |x(s) - y(\varepsilon s)| ds + \varepsilon \left| \int_0^t A(y(\varepsilon s)) \left[\psi(s, u(s) - v(\varepsilon s)\right] ds \right|. \qquad (13)$$

За означенням

$$\|x_s - y(\varepsilon s)\|_{C_n} = \max_{\theta \in [-h;0]} |x(s+\theta) - y(\varepsilon s)| \leq \max_{\theta \in [-h;s]} |x(s+\theta) - y(\varepsilon s)| = \delta(s).$$

З (13), застосовуючи лему Гронуолла – Беллмана, одержуємо нерівність

$$\delta(t) \leq \beta e^{\lambda(1+M_1)L}, \qquad (14)$$

де

$$\beta = \varepsilon \left| \int_0^t \left[\tilde{f}(s, y(\varepsilon s)) - \overline{f}(y(\varepsilon s))\right] ds \right| + \varepsilon \left| \int_0^t A(y(\varepsilon s)) \left[\psi(s, u(s) - v(\varepsilon s)\right] ds \right|. \qquad (15)$$

Оцінимо перший доданок у (15). Для цього поділимо інтервал $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на m рівних частин точками $t_i = \dfrac{iL}{\varepsilon m}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$. Нехай $t \in [t_k, t_{k+1})$ для деякого $k \in [0, m-1]$. Тоді маємо

$$\varepsilon \left| \int_0^t \left[\tilde{f}(s, y(\varepsilon s)) - \overline{f}(y(\varepsilon s)) \right] ds \right| \le \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left| \tilde{f}(s, y(\varepsilon s)) - \tilde{f}(s, y(\varepsilon t_i)) \right| ds + \right.$$

$$\left. + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left| \overline{f}(y(\varepsilon s)) - \overline{f}(y(\varepsilon t_i)) \right| ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left| \tilde{f}(s, y(\varepsilon t_i)) - \overline{f}(y(\varepsilon t_i)) \right| ds \right] +$$

$$+ \varepsilon \left[\int_{t_k}^{t} \left| \tilde{f}(s, y(\varepsilon s)) - \tilde{f}(s, y(\varepsilon t_k)) \right| ds + \int_{t_k}^{t} \left| \overline{f}(y(\varepsilon s)) - \overline{f}(y(\varepsilon t_k)) \right| ds + \right.$$

$$\left. + \int_{t_k}^{t} \left| \tilde{f}(s, y(\varepsilon t_k)) - \overline{f}(y(\varepsilon t_k)) \right| ds \right] \le$$

$$\le \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \left[2\lambda \int_{t_i}^{t_{i+1}} |y(\varepsilon s) - y(\varepsilon t_i)| \, ds + \frac{L}{\varepsilon m} F\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) \right] +$$

$$+ \varepsilon \left[2\lambda \int_{t_k}^{t} |y(\varepsilon s) - y(\varepsilon t_k)| \, ds + \frac{L}{\varepsilon m} F\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) \right] \le$$

$$\le 2\varepsilon\lambda M(1 + M_1)L + LF\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) + 2\lambda M(1 + M_1)\frac{L}{m} + \frac{L}{m} F\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right). \qquad (16)$$

Зауважимо, що для отримання оцінки (16) ми використали умови B3) і B4), причому ці ж умови будуть виконуватися і для функції правої частини усередненої системи. Окрім того, оскільки в (6) збіжність рівномірна, то існує спадна функція $F(T)$ така, що $\lim\limits_{T \to \infty} T = 0$, а тому доданки з (15) можна оцінити так:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left| \tilde{f}(s, y(\varepsilon t_i)) - \overline{f}(y(\varepsilon t_i)) \right| ds \le \frac{L}{\varepsilon m} F\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right).$$

Тепер оцінимо другий доданок у (15), скориставшись розбиттям інтервала $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на m рівних частин:

$$\varepsilon \left| \int_0^t A(y(\varepsilon s)) \left[\psi(s, u(s)) - v(\varepsilon s) \right] ds \right| \le$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |A(y(\varepsilon s)) - A(y(\varepsilon t_i))| \, |\psi(s, u(s)) - v(\varepsilon s)| \, ds +$$

$$+ \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} A(y(\varepsilon t_i)) \left[\psi(s, u(s)) - v(\varepsilon s) \right] ds \right| +$$

$$+ \varepsilon \left| \int_{t_k}^{t} A(y(\varepsilon s)) \left[\psi(s, u(s)) - v(\varepsilon s) \right] ds \right| \leq$$

$$\leq 2M_1 L \left(\lambda + M + \frac{M}{m} \right). \tag{17}$$

Тоді, в (15) і в (14) відповідно маємо:

$$\delta(t) \leq \Bigg[2\varepsilon \lambda M (1 + M_1) L + LF \left(\frac{L}{\varepsilon m} \right) + 2\lambda M (1 + M_1) \frac{L}{m} +$$

$$+ \frac{L}{m} F \left(\frac{L}{\varepsilon m} \right) + 2M_1 L \left(\lambda + M + \frac{M}{m} \right) \Bigg] e^{\lambda (1 + M_1) L} =$$

$$= \varsigma(m, \varepsilon). \tag{18}$$

Відповідним вибором достатньо великого m і достатньо малого ε величина $\varsigma(m, \varepsilon)$ може бути зроблена як завгодно малою. Тому оцінка (12) є справедливою для довільного $\eta > 0$.

Теорему 3.1 доведено.

Зауважимо, що оцінка (12) є рівномірною за всіма u і v та $\varphi(0)$, тобто ε_0 не залежить від керувань u і v та від початкової функції.

4. Чисельно-асимптотичний метод розв'язання задачі оптимального керування функціонально-диференціальною системою. Розглянемо задачі оптимального керування (4), (5) і (7), (9) та встановимо зв'язок між ними. Для керувань вихідної і усередненої систем у п. 3 розроблено алгоритми відповідності.

Припустимо, що виконуються такі умови:

C1) функція $\Phi(\cdot) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ задовольняє умову Ліпшиця з константою μ;

C2) задача (4), (5) має розв'язок; через u^* позначимо оптимальне керування цієї задачі.

Зауважимо, що множина (8) допустимих керувань усередненої системи (7) є опуклим компактом, тоді й множина досяжності усередненої системи (7) є компактною [21], а отже, задача (7), (9) має розв'язок. Позначимо через v^* оптимальне керування усередненої задачі (7), (9).

Близькість розв'язків вихідної функціонально-диференціальної системи й усередненої, яка описується звичайними диференціальними рівняннями, встановлено в теоремі 3.1. Для оцінки близькості значень термінальних критеріїв якості вихідної й усередненої задач на відповідних керуваннях доведемо наступні леми.

Лема 4.1. *Нехай виконуються умови C1), C2) та існує допустиме керування* $v^0 \in V$ *таке, що відповідна йому траєкторія* $y(t)$ *близька до оптимальної траєкторії* $x^*(t)$ *задачі (4), (5), а саме, для деякого малого* $\eta_1 > 0$ *при* $t \in [t_0, T]$ *виконується* $|x^*(t) - y(t)| < \eta_1$.

Тоді $\left|J[u^*] - \bar{J}[v^*]\right| < \mu\eta_1$.

Доведення. Нехай, наприклад, $J[u^*] \leqslant \bar{J}[v^*]$. З умови C1) і вибору керування v^0 маємо

$$\left|J[u^*] - \bar{J}[v^0]\right| = |\Phi(x^*(T)) - \Phi(y(T))| \leq \mu\, |x^*(T) - y(T)| \leq \mu\eta_1,$$

тобто

$$J[u^*] \geq \bar{J}[v^0] - \mu\eta_1. \tag{19}$$

Оскільки v^* — оптимальне керування задачі (7), (9), то

$$\bar{J}[v^*] \leq \bar{J}[v^0]. \tag{20}$$

З (19) і (20) отримаємо $\bar{J}[v^0] \geq \bar{J}[v^*] \geq J[u^*] \geq \bar{J}[v^0] - \mu\eta_1$ та, віднімаючи $\bar{J}[v^*]$ з останньої нерівності, маємо $J[u^*] - \bar{J}[v^*] \geq \bar{J}[v^0] - \bar{J}[v^*] - \mu\eta_1$.

Тоді з (20) виконується нерівність $J[u^*] - \bar{J}[v^*] \geq -\mu\eta_1$. Але за припущенням $J[u^*] - \bar{J}[v^*] \leq 0 < \mu\eta_1$. Отже, $-\mu\eta \leq J[u^*] - \bar{J}[v^*] < \mu\eta_1$.

Лему 4.1 доведено.

Лема 4.2. *Нехай виконується умова C1) та існує таке керування* u^0 *для задачі (4), (5), що відповідна йому траєкторія* $x(t)$ *є близькою до оптимальної траєкторії* $y^*(t)$ *задачі (7), (9), тобто для малого* $\eta_2 > 0$ *виконується* $|x(t) - y^*(t)| < \eta_2$ *при* $t \in [t_0, T]$.

Тоді $\left|J[u^*] - \bar{J}[v^*]\right| < \mu\eta_2$.

Доведення. Нехай $J[u^*] > \bar{J}[v^*]$. Як і при доведенні леми 4.1, маємо

$$J[u^0] \geq J[u^*] > \bar{J}[v^*] \geq J[u^0] - \mu\eta_2.$$

Віднімаючи $J[u^*]$ з останньої нерівності, одержуємо

$$\bar{J}[v^*] - J[u^*] \geq J[u^0] - J[u^*] - \mu\eta_2.$$

Тоді є справедливою нерівність $\bar{J}[v^*] - J[u^*] \geq -\mu\eta_2$, або $J[u^*] - \bar{J}[v^*] \leq \mu\eta_2$. Але за умовою леми $J[u^*] - \bar{J}[v^*] > 0 > -\mu\eta_2$. Отже, $-\mu\eta < J[u^*] - \bar{J}[v^*] \leq \mu\eta_2$.

Лему 4.2 доведено.

Лема 4.3. *Нехай одночасно існують* u^0 *— допустиме керування для задачі (4), (5) таке, що відповідна йому траєкторія* $x(t)$ *є близькою до оптимальної траєкторії* $y^*(t)$ *задачі (7), (9), тобто для малого* $\eta_2 > 0$ *виконується* $|x(t) - y^*(t)| < \eta_2$ *при* $t \in [t_0, T]$, *і* v^0 *— допустиме керування для задачі (7), (9) таке, що відповідна йому траєкторія* $y(t)$ *близька до оптимальної траєкторії* $x^*(t)$ *задачі (4), (5), а саме для деякого малого* $\eta_1 > 0$ *виконується* $|x^*(t) - y(t)| < \eta_1$ *при* $t \in [t_0, T]$.

Тоді справедливі співвідношення

$$\left|J[u^*] - \bar{J}[v^*]\right| < \mu\eta_3,$$

$$J[u^0] - J[u^*] \leqslant \sigma\eta_3,$$

$$\bar{J}[v^0] - \bar{J}[v^*] \leqslant \sigma\eta_3,$$

де $\eta_3 = \max\{\eta_1, \eta_2\}$.

Доведення. З двох оптимальних значень функціоналів вихідної й усередненої задач $J[u^*]$ і $\bar{J}[v^*]$ одна обов'язково більша (або дорівнює) за іншу, тому виконується або лема 4.1, або лема 4.2 та нерівність $\left|J[u^*] - \bar{J}[v^*]\right| < \mu\eta_3$. Тому

$$J\left[u^0\right] - J\left[u^*\right] = J\left[u^0\right] - \bar{J}\left[v^*\right] + \bar{J}\left[v^*\right] - J\left[u^*\right] \leq$$

$$\leq \left|J\left[u^0\right] - \bar{J}\left[v^*\right]\right| + \left|\bar{J}\left[v^*\right] - J\left[u^*\right]\right| \leq \mu\eta_2 + \mu\eta_3 < \sigma\eta_3,$$

де $\sigma = 2\mu$. Остання нерівність у лемі доводиться аналогічно.

Лему 4.3 доведено.

Наступна теорема доводить основний результат — близькість термінальних критеріїв якості вихідної й усередненої задач на відповідних керуваннях.

Теорема 4.1. *Нехай в області* $Q = \{t \geq 0, \varphi \in \mathrm{C}_n, x \in \mathbb{R}^n, u \in U \subset \mathrm{comp}\ (\mathbb{R}^r)\}$ *виконуються умови теореми 3.1, умови C1) та C2). Тоді для будь-яких* $\eta > 0$ *і* $L > 0$ *існує таке* $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, *що для* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *і* $t_0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}$ *виконуються нерівності*

$$\left|J\left[u^*\right] - \bar{J}\left[v^*\right]\right| < \eta,$$

$$J\left[u_{v^*}\right] - J\left[u^*\right] < \eta,$$

$$\bar{J}\left[v_{u^*}\right] - \bar{J}\left[v^*\right] < \eta,$$

де u_{v^*} *— побудоване за алгоритмом керування системи (4), яке відповідає оптимальному керуванню* v^* *задачі (7), (9), а* v_{u^*} *— побудоване за алгоритмом керування системи (7), яке відповідає оптимальному керуванню* u^* *задачі (4), (5).*

Доведення. Зауважимо, що алгоритм методу усереднення дозволяє побудувати у відповідність керуванню v^* задачі (7), (9) таке допустиме керування u_{v^*} задачі (4), (5), що відповідні траєкторії будуть близькими: $|x\left(t, u_{v^*}\right) - y^*\left(t, v^*\right)| < \eta$. Позначимо через ε_1 значення малого параметра ε_0, для якого за теоремою 3.1 виконується остання нерівність. Цей же алгоритм дозволяє побудувати у відповідність керуванню u^* задачі (4), (5) таке допустиме керування v_{u^*} задачі (7), (9), що існує значення малого параметра ε_2, при якому відповідні траєкторії будуть близькими: $|x^*\left(t, u^*\right) - y\left(t, v_{u^*}\right)| < \eta$. Застосовуючи лему 4.3, отримуємо нерівності теореми.

Теорему 4.1 доведено.

Отже, керування u_{v^*} є асимптотично оптимальним для точної задачі (4), (5), а керування v_{u^*} — асимптотично оптимальним для усередненої задачі (7), (9).

Таким чином, ми завершили обґрунтування чисельно-асимптотичного методу розв'язання задачі оптимального керування функціонально-диференціальною системою (4), (5), реалізація якого здійснюється так:

1. Для керованої функціонально-диференціальної системи (4) будуємо усереднену систему (7).
2. Будуємо множину допустимих керувань V усередненої системи (7) за формулою (8).
3. Розв'язуємо усереднену задачу оптимального керування (7), (9).
4. За оптимальним керуванням v^* усередненої задачі (7), (9) з використанням алгоритму відповідності керувань будуємо асимптотично оптимальне керування u_{v^*} вихідної задачі (4), (5).
5. Будуємо траєкторію $x(t, u_{v^*})$ вихідної системи (4), яка відповідає керуванню u_{v^*}.

6. Для асимптотично оптимального керування u_{v^*} знаходимо значення функціоналу якості (5), яке згідно з теоремою 4.1 відрізняється від оптимального значення на малу величину η.

Література

1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. – К.: Изд-во АН УССР, 1937. – 363 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
3. *Самойленко А. М., Мустафаев Х. З.* О принципе усреднения для одного класса систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Асимптотические методы и их применение в задачах математической физики. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 104 – 107.
4. *Филатов О. П., Хапаев М. М.* Усреднение систем дифференциальных включений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 160 с.
5. *Хапаев М. М.* О методе усреднения и некоторых задачах, связанных с усреднением // Дифференц. уравнения. – 1966. – **11**, № 5. – С. 600 – 608.
6. *Халанай А.* Метод усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Rev. math. pures et appl. Acad. RpR. – 1959. – **4**, № 3. – P. 467 – 483.
7. *Фодчук В. И.* О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом от параметра // Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, № 2. – С. 273 – 279.
8. *Фодчук В. И.* О построении асимптотических решений для нестационарных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и малым параметром // Укр. мат. журн. – 1962. – **14**, № 4. – С. 435 – 440.
9. *Bainov D. D., Hristova S. G.* Differential equations with maxima // Chapman & Hall/CRC Pure and Appl. Math. – 2011. – **291**. – 312 p.
10. *Plotnikov V. A., Kichmarenko O. D.* A note on the averaging method for differential equations with maxima // Iran. J. Optim. – 2009. – **1**, № 2. – P. 132 – 140.
11. *Kichmarenko O. D., Sapozhnikova K. Yu.* Full averaging scheme for differential equation with maximum // Contemp. Anal. Appl. Math. – 2015. – **3**, № 1. – P. 113 – 122.
12. *Dashkovskiy S., Hristova S., Kichmarenko O., Sapozhnikova K.* Behavior of the solution to the systems with maximum // Proc. 20th IFAC World Congr. – 2017. – P. 13467 – 13472.
13. *Hale J.* Introduction to functional differential equations. – New York: Springer, 1966.
14. *Hale J. K., Verduyn Lunel S. M.* Averaging in infinite dimensions // J. Integral Equations Appl. – 1990. – **2**, № 4. – P. 463 – 494.
15. *Lehman B., Weibel S.* Fundamental theorems of averaging for functional differential equations // J. Differential Equations. – 1999. – **152**. – P. 160 – 190.
16. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
17. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
18. *Кравець В. І., Ковальчук Т. В., Могильова В. В., Станжицький О. М.* Застосування методу усереднення до задач оптимального керування функціонально-диференціальними рівняннями // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 2. – С. 206 – 216.
19. *Aumann R. J.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. Appl. – 1965. – **12**, № 1. – P. 1 – 12.
20. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 85 с.
21. *Lee E. B., Markus L.* Foundations of optimal control theory. – Malabar (FL): Krieger Pub. Co., 1986. – 586 p.

Получено 04.04.18