УДК 517.925

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРАВИЛЬНО И БЫСТРО МЕНЯЮЩИМИСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В. М. Евтухов

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова
ул. Дворянская, 2, г. Одесса, 65026, Украина
e-mail: emden@farlep.net

Н. П. Колун

Военная академия
Фонтанская дорога, 10, г. Одесса, 65009, Украина
e-mail: nataliiakolun@ukr.net

The conditions of the existence and asymptotic representations as $t \uparrow \omega$ $(\omega \leq +\infty)$ for a class of monotone solutions of the second-order differential equations with regularly and rapidly varying nonlinearities are established.

Встановлюються умови існування й асимптотичні при $t \uparrow \omega$ $(\omega \leq +\infty)$ зображення одного класу монотонних розв'язків диференціального рівняння другого порядку з правильно та швидко змінними нелінійностями.

1. Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t) \varphi_i(y), \tag{1.1}$$

в котором $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $i = \overline{1, m}$, $p_i \colon [a, \omega[\to]0, +\infty[$, $i = \overline{1, m}$, — непрерывные функции, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$; $\varphi_i \colon \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$, $i = \overline{1, m}$, где Δ_{Y_0} — односторонняя окрестность Y_0, Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, непрерывные функции при $i = \overline{1, l}$ и дважды непрерывно дифференцируемые при $i = \overline{l+1, m}$ такие, что

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_i(\lambda y)}{\varphi_i(y)} = \lambda^{\sigma_i}, \quad i = \overline{1, l} \quad \text{для любого} \quad \lambda > 0, \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered} \varphi_i'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}, \\ \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi_i(y) \in \{0, +\infty\}, \qquad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_i''(y)\varphi_i(y)}{\varphi_i'^2(y)} = 1, \quad i = \overline{l+1, m}. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Из условий (1.2) и (1.3) следует, что при $i \in \{1, \ldots, l\}$ каждая из функций φ_i является правильно меняющейся при $y \to Y_0$ функцией порядка σ_i, а при $i \in \{l+1, \ldots, m\}$ каждая из функций φ_i и ее производная первого порядка являются быстро меняющимися при $y \to Y_0$ функциями (см. монографию В. Марича [1, с. 2–4] (введение)).

В силу определения правильно меняющейся функции справедливы представления вида

$$\varphi_i(y) = |y|^{\sigma_i} L_i(y), \quad i = \overline{1, l}, \tag{1.4}$$

где $L_i,\ i = \overline{1,l},$ — медленно меняющиеся функции при $y \to Y_0$, т. е. такие, что

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{L_i(\lambda y)}{L_i(y)} = 1 \quad \text{для любого} \quad \lambda > 0, \quad i = \overline{1,l}.$$

Из (1.3) непосредственно вытекают предельные соотношения

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)} = \pm\infty, \quad i = \overline{l+1,m}. \tag{1.5}$$

Определение 1.1. *Решение y уравнения (1.1) называется $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решением, где $-\infty \le$ $\le \lambda_0 \le +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0,\omega[\subset [a,\omega[$ и удовлетворяет условиям*

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & \pm\infty, \end{cases} \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \tag{1.6}$$

Известны результаты об асимптотическом поведении $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений дифференциального уравнения (1.1) в случае, когда в правой части уравнения (1.1) стоит одно слагаемое с правильно или быстро меняющейся нелинейностью (см. работы [2, 3] и работу А. Г. Черниковой [4]). Также исследовался случай $l = m$, когда все нелинейности в правой части дифференциального уравнения (1.1) являются правильно меняющимися функциями (см., например, работы [5, 6]). Общий же случай, когда в правой части уравнения (1.1) кроме слагаемых с правильно меняющимися нелинейностями присутствуют слагаемые с быстро меняющимися нелинейностями, до настоящего времени не исследовался.

В данной работе при $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ устанавливаются условия существования $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений дифференциального уравнения (1.1), а также асимптотические при $t\uparrow\omega$ представления для таких решений и их производных первого порядка в случае, когда $l < m$ и для некоторого $s \in \{l+1,\ldots,m\}$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))} = 0 \quad \text{при} \quad i \in \{1,\ldots,m\}\setminus\{s\}, \tag{1.7}$$

т. е. когда на каждом таком решении y уравнения (1.1) правая часть уравнения эквивалентна при $t\uparrow\omega$ одному слагаемому с быстро меняющейся нелинейностью.

2. Некоторые вспомогательные утверждения. В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что

$$\Delta_{Y_0} = \Delta_{Y_0}(b), \quad \Delta_{Y_0}(b) = \begin{cases} [b,Y_0[, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} \text{ — левая окрестность } \quad Y_0, \\ ]Y_0,b], & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} \text{ — правая окрестность } \quad Y_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

и число b удовлетворяет неравенствам

$$|b| < 1 \quad \text{при} \quad Y_0 = 0 \qquad \text{и} \qquad b > 1 \quad (b < -1) \quad \text{при} \quad Y_0 = +\infty \quad (Y_0 = -\infty).$$

При доказательстве основных результатов понадобятся некоторые свойства дважды непрерывно дифференцируемой функции $f\colon \Delta_{Y_0}(b) \to]0,+\infty[$, удовлетворяющей условиям

$$f'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}(b), \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} f(y) \in \{0,+\infty\}, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{f''(y)f(y)}{f'^2(y)} = 1. \tag{2.2}$$

Перед тем как сформулировать эти свойства, введем следующие обозначения:

$$Z_0 = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} f(y) = \begin{cases} \text{либо} \quad 0, \\ \text{либо} \quad +\infty, \end{cases} \qquad \Delta_{Z_0}(c_0) = \begin{cases} \text{либо} \quad [c_0, Z_0[, \\ \text{либо} \quad]Z_0, c_0], \end{cases} \quad c_0 = f(b).$$

В работе А. Г. Черниковой [4] показано, что для каждой дважды непрерывно дифференцируемой функции $f\colon \Delta_{Y_0}(b) \to]0, +\infty[$, удовлетворяющей условиям (2.2), существует функция $g\colon \Delta_{Y_0}(b) \to \mathbb{R}$, которая называется дополняющей для f, такая, что

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} \frac{f(y + ug(y))}{f(y)} = e^u \quad \text{для любого} \quad u \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Кроме того, установлены следующие леммы.

Лемма 2.1. *Если дважды непрерывно дифференцируемая функция* $f\colon \Delta_{Y_0}(b) \to]0, +\infty[$ *удовлетворяет условиям (2.2) и имеет дополняющую функцию* g, *то для любой функции* $u\colon \Delta_{Y_0}(b) \to \mathbb{R}$ *такой что*

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} u(y) = u_0 \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} f(y + u(y)g(y)) = Z_0,$$

имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} \frac{f(y + u(y)g(y))}{f(y)} = e^{u_o}.$$

Более того, функция g *определяется однозначно с точностью до эквивалентных при* $y \to Y_0$ *функций. В качестве функции* g *может быть выбрана, например, одна из следующих:*

$$\frac{\displaystyle\int_Y^y \left(\int_Y^t f(u)du \right) dt}{\displaystyle\int_Y^y f(x)dx} \sim \frac{\displaystyle\int_Y^y f(x)dx}{f(y)} \sim \frac{f(y)}{f'(y)} \sim \frac{f'(y)}{f''(y)} \quad \textit{при} \quad y \to Y_0,$$

где

$$Y = \begin{cases} b, & \textit{если} \quad Z_0 = +\infty, \\ Y_0, & \textit{если} \quad Z_0 = 0. \end{cases}$$

Лемма 2.2. *Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция* $f\colon \Delta_{Y_0}(b) \to]0, +\infty[$ *удовлетворяет условиям (2.2) и имеет дополняющую функцию* g. *Тогда для нее существует непрерывная строго монотонная обратная функция* $f^{-1}\colon \Delta_{Z_0}(c_0) \to \Delta_{Y_0}(b)$, *которая является медленно меняющейся при* $z \to Z_0$ *и удовлетворяет предельному соотношению*

$$\lim_{\substack{z \to Z_0 \\ z \in \Delta_{Z_0}(c_0)}} \frac{f^{-1}(\lambda z) - f^{-1}(z)}{g(f^{-1}(z))} = \ln \lambda \quad \textit{при любом} \quad \lambda > 0.$$

Более того, для любого $\Lambda > 1$ *данное предельное соотношение выполняется равномерно по* $\lambda \in \in [1/\Lambda, \Lambda]$.

В дальнейшем также потребуется еще одно вспомогательное утверждение об априорных асимптотических свойствах $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений уравнения (1.1).

Введем функцию $\pi_\omega\colon [a, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases} \qquad \beta = \operatorname{sign} \pi_\omega(t).$$

Лемма 2.3. *Если $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0; 1\}$, то для каждого $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решения уравнения (1.1) имеют место асимптотические соотношения*

$$\frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}[1 + o(1)], \qquad \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = \frac{1 + o(1)}{\lambda_0 - 1} \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.4}$$

Справедливость этого утверждения непосредственно вытекает из работы [7] (см. следствие 10.1).

3. Основные результаты. Прежде всего введем необходимые для дальнейшего изложения вспомогательные обозначения. Будем считать, что область определения функций φ_i, $i = \overline{1, m}$, определяется формулой (2.1). Далее, положим

$$\mu_i = \operatorname{sign} \varphi_i'(y), \quad i = \overline{l + 1, m}, \qquad \nu_0 = \operatorname{sign} b, \qquad \nu_1 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0}(b) = [b, Y_0[, \\ -1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0}(b) =]Y_0, b]. \end{cases}$$

Учитывая определение $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решения дифференциального уравнения (1.1), заметим, что числа ν_0 и ν_1 определяют знаки любого $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решения и его первой производной (соответственно) в некоторой левой окрестности ω. Ясно, что условия

$$\nu_0 \nu_1 < 0, \quad \text{если} \quad Y_0 = 0, \qquad \nu_0 \nu_1 > 0, \quad \text{если} \quad Y_0 = \pm\infty, \tag{3.1}$$

являются необходимыми для наличия $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений. Если же для таких решений уравнения (1.1), кроме того, выполняются условия (1.7), то $\operatorname{sign} y''(t) = \alpha_s$ в некоторой левой окрестности ω, и при этом

$$\nu_1 \alpha_s < 0, \quad \text{если} \quad \lim_{t \uparrow \omega} y'(t) = 0, \qquad \nu_1 \alpha_s > 0, \quad \text{если} \quad \lim_{t \uparrow \omega} y'(t) = \pm\infty. \tag{3.2}$$

Введем функции

$$H_i(y) = \int\limits_{B_i}^{y} \frac{dx}{\varphi_i(x)}, \quad \text{в которых} \quad B_i = \begin{cases} b, & \text{если} \quad \displaystyle\int_b^{Y_0} \frac{dy}{\varphi_i(y)} = \pm\infty, \\ Y_0, & \text{если} \quad \displaystyle\int_b^{Y_0} \frac{dy}{\varphi_i(y)} = \text{const}, \end{cases} \qquad i = \overline{l + 1, m}.$$

Отметим некоторые свойства функций H_i, $i = \overline{l + 1, m}$. Так как для каждого $i \in \{l + 1, \ldots, m\}$ $H_i'(y) = \dfrac{1}{\varphi_i(y)} > 0$ при $y \in \Delta_{Y_0}(b)$, то H_i — возрастающая на $\Delta_{Y_0}(b)$, а также существует обратная функция $H_i^{-1}\colon \Delta_{Z_i}(c_i) \to \Delta_{Y_0}(b)$, где ввиду второго из условий (1.3) и возрастания H_i^{-1}

$$Z_i = \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} H_i(y) = \begin{cases} \text{либо} \quad 0, \\ \text{либо} \quad +\infty, \end{cases}$$
$$\Delta_{Z_i}(c_i) = \begin{cases} [c_i, Z_i[, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0}(b) = [b, Y_0[, \\ ]Z_i, c_i], & \text{если} \quad \Delta_{Y_0}(b) =]Y_0, b], \end{cases} \qquad c_i = H_i(b). \tag{3.3}$$

В силу правила Лопиталя в форме Штольца и последнего из условий (1.3) имеем

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{H_i(y)}{\frac{1}{\varphi_i'(y)}} = \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{\dfrac{1}{\varphi_i(y)}}{-\dfrac{\varphi_i''(y)}{\varphi_i'^2(y)}} = -\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{\varphi'^2(y)}{\varphi_i''(y)\varphi_i(y)} = -1.$$

А значит,

$$H_i(y) \sim -\frac{1}{\varphi_i'(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0 \qquad \text{и} \qquad \operatorname{sign} H_i(y) = -\mu_i \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}(b). \tag{3.4}$$

Из первого из этих соотношений также следует, что

$$\frac{H_i'(y)}{H_i(y)} = \frac{\frac{1}{\varphi_i(y)}}{H_i(y)} \sim -\frac{\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)}, \qquad \frac{H_i''(y)H_i(y)}{H_i'^2(y)} = \frac{-\dfrac{\varphi_i'(y)}{\varphi_i^2(y)}H_i(y)}{\dfrac{1}{\varphi_i^2(y)}} \sim 1 \quad \text{при} \quad y \to Y_0. \tag{3.5}$$

Поэтому каждая из функций $H_i,\ i \in \{l+1, \ldots, m\}$, удовлетворяет условиям леммы 2.1, согласно которой в качестве дополняющей функции для каждой функции H_i соответственно может быть выбрана одна из эквивалентных функций

$$\frac{H_i'(y)}{H_i''(y)} \sim \frac{H_i(y)}{H_i'(y)} \sim -\frac{\varphi_i(y)}{\varphi_i'(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0. \tag{3.6}$$

В дальнейшем понадобятся также обозначения

$$J_i(t) = \int\limits_{A_i}^{t} \pi_\omega(\tau)p_{0i}(\tau)d\tau, \quad A_i = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \displaystyle\int_a^\omega \pi_\omega(\tau)p_{0i}(\tau)d\tau = \pm\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \displaystyle\int_a^\omega \pi_\omega(\tau)p_{0i}(\tau)d\tau = \text{const}, \end{cases}$$
$$q_i(t) = \frac{\alpha_i(\lambda_0-1)\pi_\omega^2(t)p_{0i}(t)\varphi_i\left(H_i^{-1}\left(\alpha_i\left(\lambda_0-1\right)J_i(t)\right)\right)}{H_i^{-1}(\alpha_i(\lambda_0-1)J_i(t))},$$
$$G_i(t) = \frac{y\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)}\Bigg|_{y=H_i^{-1}(\alpha_i(\lambda_0-1)J_i(t))}, \quad \Phi_i(t) = \frac{y\left(\dfrac{\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)}\right)'}{\dfrac{\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)}}\Bigg|_{y=H_i^{-1}(\alpha_i(\lambda_0-1)J_i(t))}, \quad i=\overline{l+1,m},$$

в которых $p_{0i}\colon [a,\omega[\to]0,+\infty[$ — такие непрерывно дифференцируемые функции, что $p_{0i}(t) \sim p_i(t)$ при $t \uparrow \omega$.

Теорема 3.1. *Пусть* $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0;1\}$, *для некоторого* $s \in \{l+1,\dots,m\}$ *функция* p_s *представима в виде*

$$p_s(t) = p_{0s}(t)[1 + r_s(t)], \quad \text{где} \quad \lim_{t\uparrow\omega} r_s(t) = 0, \tag{3.7}$$

$p_{0s}\colon [a,\omega[\to]0,+\infty[$ *— непрерывно дифференцируемая функция,* $r_s\colon [a,\omega[\to]-1,+\infty[$ *— непрерывная функция, и справедливы условия*

$$\frac{\varphi_s(y)\varphi_i'(y)}{\varphi_s'(y)\varphi_i(y)} = O(1) \quad \text{при} \quad y \to Y_0 \quad (y \in \Delta_{Y_0}(b)) \quad \text{для любого} \quad i \in \{l+1,\dots,m\}. \tag{3.8}$$

Тогда для существования у дифференциального уравнения (1.1) $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$*-решений, удовлетворяющих условиям (1.7), необходимо, чтобы выполнялись неравенства*

$$\alpha_s\nu_0\lambda_0 > 0, \quad \alpha_s\mu_s(\lambda_0 - 1)J_s(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in]a,\omega[, \tag{3.9}$$

а также условия

$$\alpha_s(\lambda_0 - 1)\lim_{t\uparrow\omega} J_s(t) = Z_s, \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_s'(t)}{J_s(t)} = \pm\infty, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} q_s(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \tag{3.10}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i\left(H_s^{-1}\left(\alpha_s\left(\lambda_0-1\right)J_s(t)\right)\right)}{p_s(t)\varphi_s\left(H_s^{-1}\left(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)\right)\right)} = 0 \quad \text{при любом} \quad i \in \{1,\dots,m\}\setminus\{s\}. \tag{3.11}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$y(t) = H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\left[1 + \frac{o(1)}{G_s(t)}\right] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \tag{3.12}$$

$$y'(t) = \frac{\lambda_0 H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.13}$$

Доказательство. Пусть $y\colon [t_0,\omega[\to\mathbb{R}$ — произвольное $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решение дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.7). Тогда в силу (1.1), (1.7) и (3.7)

$$y''(t) = \alpha_s p_{0s}(t)\varphi_s(y(t))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.14}$$

Из этого соотношения ясно, что данное решение и его производные первого и второго порядков сохраняют знаки на некотором промежутке $[t_1,\omega[\subset[t_0,\omega[$, причем

$$\operatorname{sign} y(t) = \nu_0, \quad \operatorname{sign} y'(t) = \nu_1, \quad \operatorname{sign} y''(t) = \alpha_s.$$

Согласно лемме 2.3

$$\nu_0\nu_1 = \operatorname{sign}[\lambda_0(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)], \qquad \nu_1\alpha_s = \operatorname{sign}[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)] \quad \text{при} \quad t\in]a,\omega[,$$

откуда, в частности, следует первое из неравенств (3.9). Кроме того, из (3.14) с учетом второго из соотношений (2.4) леммы 2.3 следует

$$\frac{y'(t)}{\varphi_s(y(t))} = \alpha_s(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)p_{0s}(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.15}$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от t_1 до t $(t \in]t_1, \omega[)$, получаем

$$\int\limits_{y(t_1)}^{y(t)} \frac{dx}{\varphi_s(x)} = \alpha_s(\lambda_0 - 1) \int\limits_{t_1}^{t} \pi_\omega(\tau) p_{0s}(\tau)[1 + o(1)]\, d\tau \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.16}$$

Поскольку в силу первого из условий (1.6) $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0$, то из (3.16) ясно, что несобственные интегралы

$$\int\limits_{y(t_1)}^{Y_0} \frac{dx}{\varphi_s(x)} \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{t_1}^{\omega} \pi_\omega(\tau) p_{0s}(\tau)\, d\tau$$

сходятся или расходятся одновременно. Ввиду этого факта и выбора пределов интегрирования A_s и B_s в функциях J_s и H_s соотношение (3.16) может быть записано в виде

$$H_s(y(t)) = \alpha_s(\lambda_0 - 1) J_s(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.17}$$

Отсюда с учетом второго из условий (3.4) следует, что справедливо второе из неравенств (3.9). В силу же первого из условий (3.4) из (3.15) и (3.17) вытекает, что

$$\frac{y'(t)\varphi_s'(y(t))}{\varphi_s(y(t))} = -\frac{\pi_\omega(t) p_{0s}(t)}{J_s(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

и поэтому ввиду первого из асимптотических соотношений (2.4)

$$\frac{y(t)\varphi_s'(y(t))}{\varphi_s(y(t))} = -\frac{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega^2(t) p_{0s}(t)}{\lambda_0 J_s(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Из данного соотношения в силу (1.5) и определения $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решения непосредственно следует справедливость второго из предельных условий (3.10).

Теперь из (3.17) находим, что

$$y(t) = H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1) J_s(t)[1 + o(1)]) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.18}$$

Функция H_s, как было установлено ранее, удовлетворяет условиям леммы 2.1 и в качестве ее дополняющей функции может быть выбрана функция $g_s(y) = -\dfrac{\varphi_s(y)}{\varphi_s'(y)}$. Кроме того, с учетом условий $\alpha_s(\lambda_0 - 1) \lim\limits_{t\uparrow\omega} J_s(t) = Z_s$ и $\alpha_s(\lambda_0 - 1) J_s(t) \in \Delta_{Z_s}(c_s)$ при $t \in [t_1, \omega[$, вытекающих из (3.17) и (3.3), существует $t_2 \in [t_1, \omega[$ такое, что функция $z(t) = \alpha_s(\lambda_0 - 1) J_s(t)[1 + o(1)]$ такова, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} z(t) = Z_s \qquad \text{и} \qquad z(t) \in \Delta_{Z_s}(c_s) \quad \text{при} \quad t \in [t_2, \omega[. \tag{3.19}$$

Тогда, ввиду (3.19), согласно лемме 2.2 имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1) J_s(t)[1 + o(1)]) - H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1) J_s(t))}{-\dfrac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1) J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1) J_s(t))\right)}} =$$

$$= \lim_{\substack{z \to Z_s \\ z \in \Delta_{Z_s}(c_s)}} \frac{H_s^{-1}(z(1+o(1))) - H_s^{-1}(z)}{-\dfrac{\varphi_s(z)}{\varphi_s'(z)}} = 0,$$

откуда следует, что

$$H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)[1+o(1)]) = H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)) +$$
$$+ \frac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}\, o(1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

В силу этого соотношения из (3.18) получаем асимптотическое представление (3.12). Если же учесть, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)} = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} \frac{y\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)} = \pm\infty,$$

то (3.12) может быть записано в виде

$$y(t) = H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{3.20}$$

и поэтому ввиду первого из асимптотических соотношений (2.4) имеет место асимптотическое представление (3.13).

Далее, поскольку функция φ_s удовлетворяет условиям леммы 2.1 и в качестве ее дополняющей функции может быть выбрана функция $g_s(y) = \dfrac{\varphi_s(y)}{\varphi_s'(y)}$, то на основании леммы 2.1 с учетом условий $\lim\limits_{t\uparrow\omega} H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)) = Y_0$ и $H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)) \in \Delta_{Y_0}(b)$ при $t \in [t_2, \omega[$ получаем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\varphi_s\left(H_s^{-1}\left(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)\right) + \dfrac{\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)))}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}\left(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)\right)\right)}\, o(1)\right)}{\varphi_s\left(H_s^{-1}\left(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)\right)\right)} =$$
$$= \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} \frac{\varphi_s\left(y + \dfrac{\varphi_s(y)}{\varphi_s'(y)}\, o(1)\right)}{\varphi_s(y)} = 1.$$

Поэтому

$$\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)) + \frac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s'(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)))}\, o(1)\right) =$$
$$= \varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

откуда с учетом (3.12) имеем

$$\varphi_s(y(t)) = \varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.21}$$

Из (3.14) и (3.21) следует, что

$$y''(t) = \alpha_s p_{0s}(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

В силу этого представления и (3.13)

$$\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \frac{\alpha_s(\lambda_0-1)\pi_\omega^2(t)p_{0s}(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)))}{\lambda_0 H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Отсюда с учетом второго из асимптотических соотношений (2.4) вытекает справедливость третьего из условий (3.10).

Остается лишь установить справедливость условий (3.11).

Поскольку функции $\varphi_i,\ i=\overline{1,l}$, являются правильно меняющимися при $y\to Y_0,\ H_s^{-1}$ является медленно меняющейся при $z\to Z_s$ как обратная от быстро меняющейся функции H_s, а функция $z(t)=\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)[1+o(1)]$ удовлетворяет условиям (3.19), то

$$\varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)[1+o(1)])\right) = \\ = \varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \quad i=\overline{1,l}. \tag{3.22}$$

Если же $i\in\{l+1,\dots,m\}\setminus\{s\}$, то каждая из функций φ_i удовлетворяет условиям леммы 2.1 и в качестве их дополняющих функций могут быть выбраны соответственно функции $g_i(y)=\dfrac{\varphi_i(y)}{\varphi_i'(y)}$. Тогда на основании леммы 2.1 с учетом условий $\lim\limits_{t\uparrow\omega} H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)) = Y_0,\ H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\in\Delta_{Y_0}(b)$ при $t\in[t_2,\omega[$ и (3.8) получаем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)) + \dfrac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}o(1)\right)}{\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)))} =$$
$$= \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}}\frac{\varphi_i\left(y+g_i(y)\dfrac{\varphi_i'(y)\varphi_s(y)}{\varphi_i(y)\varphi_s'(y)}o(1)\right)}{\varphi_i(y)} =$$
$$= \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}}\frac{\varphi_i\left(y+g_i(y)\,O(1)\,o(1)\right)}{\varphi_i(y)} = \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}}\frac{\varphi_i\left(y+g_i(y)\,o(1)\right)}{\varphi_i(y)} = 1.$$

Поэтому при $i\in\{l+1,\dots,m\}\setminus\{s\}$

$$\varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)) + \frac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}o(1)\right) = \\ = \varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

откуда с учетом (1.5), (3.20) и (3.21) имеем

$$\varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)[1+o(1)])\right) = \\ = \varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \quad i=\overline{l+1,m}. \tag{3.23}$$

Из (3.18), (3.22) и (3.23) находим

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)[1+o(1)]}{p_s(t)\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)[1+o(1)]} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{p_s(t)\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}, \quad i=\overline{1,m}.$$

Из последнего равенства и (1.7) следует справедливость условий (3.11).

Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.1. Теорема 3.1 остается справедливой без предположения, что $p_s(t) \sim \sim p_{0s}(t)$ при $t\uparrow\omega$ с заменой в условиях (3.9)–(3.13) функций J_s, q_s и G_s соответственно на функции

$$J_{1s}(t) = \int_{A_s}^{t} \pi_\omega(\tau)p_s(\tau)\,d\tau,$$

$$q_{1s}(t) = \frac{\alpha_s(\lambda_0-1)\pi_\omega^2(t)p_s(t)\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_{1s}(t))\right)}{H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_{1s}(t))},$$

$$G_{1s}(t) = \frac{H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_{1s}(t))\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_{1s}(t))\right)}{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_{1s}(t))\right)}.$$

При установлении следующего результата наряду с введенными ранее будем использовать также обозначение

$$\psi_i(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{|G_i(\tau)|^{1/2}\,d\tau}{\pi_\omega(\tau)}, \quad i=\overline{l+1,m},$$

где t_0 — некоторое число из промежутка $[a,\omega[$.

Теорема 3.2. *Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\}$, для некоторого $s\in\{l+1,\ldots,m\}$ функция p_s представима в виде (3.7), выполняются условия (3.8)–(3.11) и существуют конечные или равные $\pm\infty$ пределы*

$$\gamma_s = \lim_{t\uparrow\omega}\Phi_s(t), \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\pi_\omega(t)q_s'(t), \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{\left(\dfrac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)^2}\sqrt{\left|\frac{y\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right|}, \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\psi_s(t)\psi_s''(t)}{\psi_s'^2(t)}. \tag{3.24}$$

Тогда:

1) если $\alpha_s\mu_s = 1$, то у дифференциального уравнения (1.1) существует однопараметрическое семейство $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений с представлениями вида

$$y(t) = H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\left[1+\frac{o(1)}{G_s(t)}\right] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \tag{3.25}$$

$$y'(t) = \frac{\lambda_0 H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}\left[\frac{\lambda_0-1}{\lambda_0}q_s(t) + |G_s(t)|^{-1/2}\,o(1)\right] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega; \tag{3.26}$$

2) если $\alpha_s\mu_s = -1$ и выполняются условия

$$\gamma_s \neq \lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{(\lambda-1)(2-3\lambda)}{\lambda(5\lambda-4)}, \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\psi_s(t)\left[q_s(t)[1+r_s(t)] - \frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\right] = 0, \tag{3.27}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\psi_s^2(t)\left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}-q_s(t)\right)q_s(t)+\frac{q_s(t)r_s(t)}{\lambda_0-1}-\pi_\omega(t)q_s'(t)\right]=0, \tag{3.28}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\psi_s^2(t)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{m}\frac{p_i(t)\varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{p_s(t)\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}=0, \tag{3.29}$$

то у дифференциального уравнения (1.1) существуют $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решения, допускающие при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления

$$y(t)=H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\left[1+\frac{o(1)}{\psi_s(t)G_s(t)}\right], \tag{3.30}$$

$$y'(t)=\frac{\lambda_0H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}\left[\frac{\lambda_0-1}{\lambda_0}q_s(t)+\frac{o(1)}{\psi_s(t)|G_s(t)|^{1/2}}\right], \tag{3.31}$$

причем таких решений существует двупараметрическое семейство в случае, когда

$$\begin{gathered}\beta\left(\lambda_0^2(5\gamma_s+3)+\lambda_0(-4\gamma_s-5)+2\right)<0 \quad \textit{при} \quad \gamma_s=\mathrm{const},\\ \frac{4}{5}<\lambda_0<1 \quad \textit{при} \quad \gamma_s=\pm\infty.\end{gathered} \tag{3.32}$$

Доказательство. Сначала с учетом существование конечных или равных $\pm\infty$ пределов (3.24) покажем, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\pi_\omega(t)q_s'(t)=0 \qquad \text{и} \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}}\frac{\left(\dfrac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)^2}\sqrt{\left|\frac{y\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right|}=0. \tag{3.33}$$

Действительно, если бы первый из этих пределов был отличен от нуля, то имели бы равенство

$$q_s'(t)=\frac{\gamma(t)}{\pi_\omega(t)}, \tag{3.34}$$

где функция γ непрерывна на некотором промежутке $[t_0,\omega[\subset]a,\omega[$ и такова, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\gamma(t)=\begin{cases}\text{либо} \quad \mathrm{const}\neq 0,\\ \text{либо} \quad \pm\infty.\end{cases}$$

Поскольку это предельное соотношение имеет место и

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{\pi_\omega(\tau)}=\ln\left|\frac{\pi_\omega(t)}{\pi_\omega(t_0)}\right|\to\pm\infty \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

то, проинтегрировав (3.34) на промежутке от t_0 до t, получили бы, что

$$q_s(t)\to\pm\infty \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Однако этого быть не может, так как выполняется третье из условий (3.10).

Далее, установим справедливость второго из предельных соотношений (3.33). Допустим противное. Тогда имеет место соотношение

$$\frac{\left(\dfrac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\left|\dfrac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right|^{3/2}} = \frac{z(y)}{|y|^{1/2}},$$

где функция $z\colon \Delta_{Y_0}(b) \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и такова, что

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} z(y) = \begin{cases} \text{либо} \quad c = \mathrm{const} \neq 0, \\ \text{либо} \quad \pm\infty. \end{cases} \tag{3.35}$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от b до y, получаем

$$-2\mu_s \left|\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right|^{-1/2} = c_0 + \int\limits_b^y \frac{z(x)}{|x|^{1/2}}\,dx, \tag{3.36}$$

где c_0 — некоторая постоянная.

Если $\displaystyle\int_b^{Y_0} \frac{z(x)\,dx}{|x|^{1/2}} = \pm\infty$, то отсюда после деления на $|y|^{1/2}$ будем иметь

$$-2\mu_s \left|\frac{y\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right|^{-1/2} = \frac{\displaystyle\int_b^y \frac{z(x)\,dx}{|x|^{1/2}}}{|y|^{1/2}}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad y\to Y_0.$$

Здесь выражение, стоящее слева, в силу (1.5) стремится к нулю при $y\to Y_0$, а справа — в силу условия (3.35) либо к отличной от нуля постоянной, либо к $\pm\infty$, поскольку согласно правилу Лопиталя в форме Штольца имеем

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{\displaystyle\int_b^y \frac{z(x)\,dx}{|x|^{1/2}}}{|y|^{1/2}} = 2\mu_s \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} z(y),$$

чего быть не может.

Если же $\displaystyle\int_b^{Y_0} \frac{z(x)\,dx}{|x|^{1/2}}$ сходится, что возможно лишь в случае, когда $Y_0 = 0$, то перепишем (3.36) в виде

$$-2\mu_s \left|\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right|^{-1/2} = c_1 + \int\limits_0^y \frac{z(x)\,dx}{|x|^{1/2}},$$

где $c_1 = c_0 + \displaystyle\int_b^0 \frac{z(x)\,dx}{|x|^{1/2}}$. Докажем, что здесь $c_1 = 0$. В самом деле, если $c_1 \neq 0$, то из данного соотношения следует, что

$$\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)} = \frac{4\mu_s}{c_1^2} + o(1) \quad \text{при} \quad y\to 0.$$

Отсюда в результате интегрирования на промежутке от b до y получаем

$$\ln|\varphi_s(y)| = \mathrm{const} + o(1) \quad \text{при} \quad y \to 0,$$

что противоречит второму из условий (1.3). Значит, $c_1 = 0$ и поэтому имеем

$$-2\mu_s \left|\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right|^{-1/2} = \int\limits_0^y \frac{z(x)\,dx}{|x|^{1/2}}.$$

Разделяя обе части этого равенства на $|y|^{1/2}$, замечаем, что левая часть полученного соотношения в силу условий (1.5) стремится к нулю при $y \to 0$, а правая — в силу правила Лопиталя и (3.35) либо к отличной от нуля постоянной, либо к $\pm\infty$.

Полученные в каждом из двух возможных случаев противоречия приводят к выводу, что второе из предельных соотношений (3.33) также справедливо.

Применяя к уравнению (1.1) преобразование

$$\begin{aligned} y(t) &= H_s^{-1}\left(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)\right)\left[1 + \frac{y_1(t)}{G_s(t)}\right], \\ y'(t) &= \frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}\, H_s^{-1}\left(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)\right)[1 + y_2(t)], \end{aligned} \tag{3.37}$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{G_s(t)}{\pi_\omega(t)}\left[\dfrac{\lambda_0}{\lambda_0-1} - q_s(t) + h_s(t)y_1 + \dfrac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\,y_2\right], \\ y_2' = \dfrac{1}{\pi_\omega(t)}\left[1 - \dfrac{\lambda_0-1}{\lambda_0}\,q_s(t) + \dfrac{q_s(t)r_s(t)}{\lambda_0} + \dfrac{q_s(t)(1+r_s(t))}{\lambda_0}\,y_1 + (1-q_s(t))\,y_2 + \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{q_s(t)(1+r_s(t))}{\lambda_0}\,R(t,y_1) + \dfrac{q_s(t)(1+r_s(t))}{\lambda_0}\,(1 + y_1 + R(t,y_1))R_1(t,y_1)\right], \end{cases} \tag{3.38}$$

в которой

$$h_s(t) = q_s(t)\left.\frac{\left(\dfrac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)^2}\right|_{y=H_s^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J_s(t))},$$

$$R(t,y_1) = \frac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)) + \dfrac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}y_1\right)}{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)} - 1 - y_1,$$

$$R_1(t,y_1) = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq s}}^m \frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)) + \dfrac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}y_1\right)}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)) + \dfrac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}y_1\right)}.$$

В этой системе в силу условий (1.3), (1.5), (3.9) и (3.10)

$$\lim_{t\uparrow\omega} q_s(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} h_s(t) = 0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} G_s(t) = \pm\infty. \tag{3.39}$$

Систему уравнений (3.38) рассмотрим на множестве

$$\Omega = [t_0, \omega[\, \times D_1 \times D_2, \quad \text{где} \quad D_i = \{y_i \colon |y_i| \le 1\}, \quad i = 1, 2,$$

и число $t_0 \in [a, \omega[$ выбрано с учетом условий (3.9), (3.10), (3.3), (3.4) и (1.5) таким образом, что

$$\alpha_s(\lambda_0 - 1) J_s(t) \in \Delta_{Z_s}(c_s) \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[,$$
$$H_s^{-1}\left(\alpha_s(\lambda_0 - 1) J_s(t)\right) + \frac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1) J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1) J_s(t))\right)} y_1 \in \Delta_{Y_0}(b)$$
$$\text{при} \quad t \in [t_0, \omega[\quad \text{и} \quad |y_1| \le 1.$$

На данном множестве правые части системы дифференциальных уравнений (3.38) непрерывны и функция R имеет на множестве $[t_0, \omega[\, \times D_1$ непрерывные частные производные до второго порядка включительно по переменной y_1. При этом имеем

$$R'_{y_1}(t, y_1) = \frac{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1) J_s(t)) + \dfrac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1) J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1) J_s(t))\right)} y_1\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1) J_s(t))\right)} - 1.$$

Здесь φ_s' удовлетворяет всем условиям лемм 2.1, 2.2 и в качестве дополняющей может быть выбрана функция $g(y) = \dfrac{\varphi_s(y)}{\varphi_s'(y)}$. Поэтому

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1) J_s(t)) + \dfrac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1) J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1) J_s(t))\right)} y_1\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1) J_s(t))\right)} =$$
$$= \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} \frac{\varphi_s'\left(y + y_1 \dfrac{\varphi_s(y)}{\varphi_s'(y)}\right)}{\varphi_s'(y)} = e^{y_1}.$$

Ввиду этого предельного соотношения и леммы 2.3 имеем

$$R'_{y_1}(t, y_1) = e^{y_1}[1 + r(t, y_1)] - 1,$$

где $\lim\limits_{t\uparrow\omega} r(t, y_1) = 0$ равномерно по $y_1 \in [-1, 1]$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ существуют $t_1 \in\,]t_0, \omega[$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\left|R'_{y_1}(t, y_1)\right| \le \varepsilon \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[\qquad \text{и} \qquad y_1 \in D_{1\delta} = \{y_1 \colon |y_1| \le \delta \le 1\}.$$

Отсюда следует, что функция R на множестве $[t_1, \omega[\, \times D_{1\delta}$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y_1 с постоянной Липшица ε, из которого в силу тождества $R(t, 0) \equiv 0$ вытекает оценка

$$|R(t, y_1)| \le \varepsilon |y_1| \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[\qquad \text{и} \qquad y_1 \in D_{1\delta}. \tag{3.40}$$

Если же при фиксированном $t \in [t_0, \omega[$ функцию R разложить по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа до членов второго порядка, то получим

$$R(t, y_1) = \frac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s'^2\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)} \times$$
$$\times \varphi_s''\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)) + \frac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}\xi\right) y_1^2, \qquad (3.41)$$

где $|\xi| < |y_1|$. Здесь в силу последнего из условий (1.3)

$$\varphi_s''\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)) + \frac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}\xi\right) =$$
$$= \frac{\varphi_s'^2\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)) + \frac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}\xi\right)}{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)) + \frac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}\xi\right)} \left[1 + r_1(t, y_1)\right],$$

где $\lim_{t\uparrow\omega} r_1(t, y_1) = 0$ равномерно по $y_1 \in D_1$. Поэтому, учитывая, что функции φ_s, φ_s' удовлетворяют условиям лемм 2.1, 2.2 с дополняющей функцией $g(y) = \dfrac{\varphi_s(y)}{\varphi_s'(y)}$, имеем

$$\varphi_s''\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)) + \frac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}\,\xi\right) =$$
$$= \frac{\varphi_s'^2(\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)} e^{\xi}[1 + r_2(t, y_1)],$$

где $\lim_{t\uparrow\omega} r_2(t, y_1) = 0$ равномерно по $y_1 \in D_1$. Значит, (3.41) может быть записано в виде

$$R(t, y_1) = e^{\xi}[1 + r_1(t, y_1)][1 + r_2(t, y_1)]y_1^2.$$

Отсюда ясно, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta > 0$ и $t_1 \in]t_0, \omega[$ такие, что

$$|R(t, y_1)| \le (1+\varepsilon)|y_1|^2 \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[\qquad \text{и} \qquad y_1 \in D_{1\delta} = \{y_1 \colon |y_1| \le \delta\}. \qquad (3.42)$$

Таким образом, фиксируя ε, можно подобрать число $\delta > 0$ и $t_1 \in [t_0, \omega[$ так, чтобы одновременно выполнялись неравенства (3.40) и (3.42).

Кроме того, покажем, что функция $R_1(t, y_1)$ такова, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} R_1(t, y_1) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad y_1 \in D_{1\delta}. \qquad (3.43)$$

Так как функции φ_i при $i \in \{1, \ldots, l\}$ являются правильно меняющимися при $y \to \to Y_0$ $(y \in \Delta_{Y_0}(b))$ порядков σ_i, то в силу представлений (1.4) с учетом свойств медленно меняющихся функций и последнего из условий (3.39) имеем

$$\varphi_i\left(H_s^{-1}\left(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)\right) + \frac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}\, y_1\right) =$$

$$= \varphi_i \left(H_s^{-1}\left(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)\right)\left[1+\frac{y_1}{G_s(t)}\right]\right) =$$
$$= \left| H_s^{-1}\left(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)\right)\left[1+\frac{y_1}{G_s(t)}\right]\right|^{\sigma_i} L_i\left(H_s^{-1}\left(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)\right)\left[1+\frac{y_1}{G_s(t)}\right]\right) =$$
$$= \left| H_s^{-1}\left(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)\right)\left[1+\frac{y_1}{G_s(t)}\right]\right|^{\sigma_i} L_i\left(H_s^{-1}\left(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)\right)\right)(1+r_i(t,y_1)) =$$
$$= \varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)\left[1+\frac{y_1}{G_s(t)}\right]^{\sigma_i}(1+r_i(t,y_1)), \quad i=\overline{1,l}, \tag{3.44}$$

где функции $r_i(t,y_1)$ таковы, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_i(t,y_1)=0 \quad \text{равномерно по} \quad y_1\in D_{1\delta}. \tag{3.45}$$

Поскольку функция φ_s удовлетворяет условиям (2.2) и в качестве ее дополняющей функции можно выбрать функцию $g_s(y)=\dfrac{\varphi_s(y)}{\varphi_s'(y)}$, то на основании (2.3) получаем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))+\dfrac{\varphi_s\big(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\big)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}y_1\right)}{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)} =$$
$$= \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}}\frac{\varphi_s\left(y+\dfrac{\varphi_s(y)}{\varphi_s'(y)}\,y_1\right)}{\varphi_s(y)} = e^{y_1}.$$

Поэтому

$$\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))+\frac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}\,y_1\right)=$$
$$= e^{y_1}\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)))[1+r_s(t,y_1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \tag{3.46}$$

где функция $r_s(t,y_1)$ такова, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_s(t,y_1)=0 \quad \text{равномерно по} \quad y_1\in D_{1\delta}. \tag{3.47}$$

В силу (1.5), (3.11), (3.44) – (3.47) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\sum_{i=1}^{l}\frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))+\dfrac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}y_1\right)}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))+\dfrac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}y_1\right)} =$$
$$= \lim_{t\uparrow\omega}\sum_{i=1}^{l}\frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)\left[1+\dfrac{y_1}{G_s(t)}\right]^{\sigma_i}(1+r_i(t,y_1))}{\alpha_s p_s(t)e^{y_1}\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)(1+r_s(t,y_1))} = 0 \tag{3.48}$$

равномерно по $y_1\in D_{1\delta}$.

Если же $i \in \{l+1, \ldots, m\} \setminus \{s\}$, то в силу выполнения условий (3.8) для любого $C_i > 1$ существует $t_{2i} \in [t_1, \omega[$ такое, что при $t \in [t_{2i}, \omega[$ ввиду монотонности функции φ_i на промежутке $\Delta_{Y_0}(b)$

$$\varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)) - \frac{\varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_i'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)} C_i|y_1|\right) \le$$
$$\le \varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)) + \frac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)} y_1\right) \le$$
$$\le \varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)) + \frac{\varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_i'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)} C_i|y_1|\right). \tag{3.49}$$

Так как функция $\varphi_i,\ i = \overline{l+1, m},$ удовлетворяет условиям (2.2) и имеет дополняющую функцию вида $g_i(y) = \dfrac{\varphi_i(y)}{\varphi_i'(y)}$, то переходя в неравенстве (3.49) к пределу при $t \uparrow \omega,$ с учетом (2.3) получаем

$$e^{-C_i|y_1|} \lim_{t\uparrow\omega} \varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right) \le$$
$$\le \lim_{t\uparrow\omega} \varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)) + \frac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)} y_1\right) \le$$
$$\le e^{C_i|y_1|} \lim_{t\uparrow\omega} \varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right). \tag{3.50}$$

В силу (3.46) и (3.50) для каждого $i \in \{l+1, \ldots, m\} \setminus \{s\}$ имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)e^{-C_i|y_1|}\varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{p_s(t)e^{y_1}\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)(1+r_s(t,y_1))} \le$$
$$\le \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)) + \dfrac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)} y_1\right)}{p_s(t)\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)) + \dfrac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)} y_1\right)} \le$$
$$\le \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)e^{C_i|y_1|}\varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{p_s(t)e^{y_1}\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)(1+r_s(t,y_1))},$$

откуда с учетом (3.11) и (3.47) вытекает, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} \sum_{\substack{i=l+1\\ i\ne s}}^{m} \frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)) + \dfrac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)} y_1\right)}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)) + \dfrac{\varphi_s\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)}{\varphi_s'\left(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\right)} y_1\right)} = 0$$

равномерно по $y_1 \in D_{1\delta}$.

Из последнего соотношения и (3.48) следует справедливость (3.43).

С помощью дополнительных преобразований приведем систему (3.38) к виду, допускающему применение результатов из работ [8] и [9].

Для того чтобы убрать в первом уравнении неоднородное слагаемое, применим к системе (3.38) преобразование

$$y_1(t) = x_1(t), \qquad y_2(t) = -1 + \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0}\, q_s(t) + x_2(t). \tag{3.51}$$

В результате получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{G_s(t)}{\pi_\omega(t)} \left[h_s(t) x_1 + \dfrac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\, x_2 \right], \\ x_2' = \dfrac{1}{\pi_\omega(t)} \left[\left(1 - \dfrac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0} \right) q_s(t) + \dfrac{q_s(t) r_s(t)}{\lambda_0} - \dfrac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0}\, \pi_\omega(t) q_{0s}'(t) + \right. \\ \qquad + \dfrac{q_s(t)(1 + r_s(t))}{\lambda_0}\, x_1 + (1 - q_s(t))\, x_2 + \dfrac{q_s(t)(1 + r_s(t))}{\lambda_0}\, R(t, x_1) + \\ \qquad \left. + \dfrac{q_s(t)(1 + r_s(t))}{\lambda_0}\, (1 + x_1 + R(t, x_1)) R_1(t, x_1) \right]. \end{cases} \tag{3.52}$$

Далее, для того чтобы “уравнять” коэффициенты при линейных частях в первом и втором уравнениях системы, применим к системе (3.52) дополнительное преобразование

$$x_1(t) = v_1(t), \qquad x_2(t) = |G_s(t)|^{-1/2} v_2(t), \tag{3.53}$$

в результате чего имеем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} v_1' = \dfrac{|G_s(t)|^{1/2}}{\pi_\omega(t)}\, [c_{11}(t) v_1 + c_{12}(t) v_2], \\ v_2' = \dfrac{|G_s(t)|^{1/2}}{\pi_\omega(t)}\, [q(t) + f(t, v_1) + c_{21}(t) v_1 + c_{22}(t) v_2 + V(t, v_1)], \end{cases} \tag{3.54}$$

в которой

$$q(t) = \left(1 - \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0}\, q_s(t) \right) q_s(t) + \frac{q_s(t) r_s(t)}{\lambda_0} - \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0}\, \pi_\omega(t) q_s'(t),$$

$$c_{11}(t) = h_s(t) |G_s(t)|^{1/2} \operatorname{sign} G_s(t), \qquad c_{12}(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \operatorname{sign} G_s(t),$$

$$c_{21}(t) = \frac{q_s(t)[1 + r_s(t)]}{\lambda_0}, \qquad c_{22}(t) = |G_s(t)|^{-1/2} \left[1 - \frac{q_s(t)}{2} + \frac{1}{2}\, G_s(t) q_s(t) h_s(t) \right],$$

$$f(t, v_1) = \frac{q_s(t)[1 + r_s(t)]}{\lambda_0}\, (1 + v_1 + R(t, v_1)) R_1(t, v_1), \qquad V(t, v_1) = \frac{q_s(t)[1 + r_s(t)]}{\lambda_0}\, R(t, v_1).$$

Система (3.54) допускает применение результатов из работ [8, 9]. Правые части этой системы непрерывны на множестве

$$\Omega_1 = \left\{ (t, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^3 \colon t \in [t_1, \omega[,\ v_1, v_2 \in [-\delta, \delta] \right\}.$$

В силу (3.43), (3.40), замены y_1 на v_1, первого из условий (3.39) и второго из условий (3.7) получаем

$$\lim_{t\uparrow\omega} f(t,v_1)=0 \quad \text{равномерно по} \quad v_1\in[-\delta,\delta],$$

$$\lim_{v_1\to 0}\frac{V(t,v_1)}{|v_1|}=0 \quad \text{равномерно по} \quad t\in[t_1,\omega[.$$

Кроме того, ввиду условий (3.39), (3.33) и второго из условий (3.7)

$$\lim_{t\uparrow\omega} q(t)=0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} c_{11}(t)=0, \qquad c_{12}(t)\equiv\frac{\nu_0\mu_s\lambda_0}{\lambda_0-1}, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} c_{21}(t)=\frac{1}{\lambda_0-1},$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} c_{22}(t)=0, \qquad \int\limits_{t_1}^{\omega}\frac{|G_s(\tau)|^{1/2}}{\pi_\omega(\tau)}\,d\tau=\pm\infty.$$

Отсюда, в частности, следует, что предельная матрица коэффициентов, стоящих при v_1 и v_2 в квадратных скобках системы (3.54), имеет вид

$$C=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\nu_0\mu_s\lambda_0}{\lambda_0-1} \\ \dfrac{1}{\lambda_0-1} & 0 \end{pmatrix}$$

и ее характеристическим уравнением является многочлен вида

$$\rho^2-\frac{\nu_0\mu_s\lambda_0}{(\lambda_0-1)^2}=0. \tag{3.55}$$

Здесь в силу первого из неравенств (3.9) $\operatorname{sign}(\nu_0\mu_s\lambda_0)=\alpha_s\mu_s$.

Допустим сначала, что $\alpha_s\mu_s=1$. В этом случае алгебраическое уравнение (3.55) имеет вещественные корни разных знаков. Тем самым показано, что для системы дифференциальных уравнений (3.54) выполнены все условия теоремы 2.2 из работы [9]. Согласно этой теореме система дифференциальных уравнений (3.54) имеет однопараметрическое семейство исчезающих при $t\uparrow\omega$ решений $(v_1,v_2)\colon [t_*,\omega[\,\to\mathbb{R}^2$ $(t_*\in[t_1,\omega[)$. Каждому из них в силу замен (3.37), (3.51) и (3.53) соответствует решение $y\colon[t_*,\omega[\,\to\mathbb{R}$ дифференциального уравнения (1.1), допускающее асимптотические представления (3.25) и (3.26). При этом с использованием условий (1.3), (3.10) и (3.33) нетрудно убедиться в том, что любое из этих решений уравнения (1.1) является $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решением.

Таким образом, справедливость первого утверждения теоремы установлена.

Пусть теперь $\alpha_s\mu_s=-1$. В этом случае алгебраическое уравнение (3.55) имеет чисто мнимые корни и систему (3.54) необходимо привести с помощью некоторых преобразований к виду, допускающему использование теорем из работ [8, 9].

Применяя к системе (3.54) преобразование

$$v_1(t)=u_1(t), \qquad v_2(t)=\alpha(t)u_1(t)+u_2(t), \tag{3.56}$$

где

$$\alpha(t)=\begin{cases}\dfrac{(\lambda_0-2)(\lambda_0-\gamma_s\lambda_0-1)}{4\lambda_0(\lambda_0-1)}\,|G_s(t)|^{-1/2}\operatorname{sign}G_s(t) & \text{при} \quad \gamma_s=\mathrm{const},\\[2ex] \dfrac{2-\lambda_0}{2\lambda_0}\psi_s^{-1}(t)\operatorname{sign}G_s(t) & \text{при} \quad \gamma_s=\pm\infty,\end{cases}$$

получаем систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} u_1' = \dfrac{|G_s(t)|^{1/2}}{\pi_\omega(t)}\,[\widetilde{c}_{11}(t)u_1 + \widetilde{c}_{12}(t)u_2], \\ u_2' = \dfrac{|G_s(t)|^{1/2}}{\pi_\omega(t)}\,[q(t) + f(t,u_1) + \widetilde{c}_{21}(t)u_1 + \widetilde{c}_{22}(t)u_2 + V(t,u_1)], \end{cases} \tag{3.57}$$

где

$$\widetilde{c}_{11}(t) = c_{11}(t) + \alpha(t)c_{12}(t), \qquad \widetilde{c}_{12}(t) = c_{12}(t),$$
$$\widetilde{c}_{21}(t) = c_{21}(t) + \alpha(t)(c_{22}(t) - c_{11}(t)) - \alpha^2(t)c_{12}(t) - \frac{\pi_\omega(t)\alpha'(t)}{|G_s(t)|^{1/2}},$$
$$\widetilde{c}_{22}(t) = c_{22}(t) - \alpha(t)c_{12}(t).$$

Обратим внимание, что в двух частных случаях, когда $\lambda_0 = 2$ и $\gamma_s = \dfrac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0}$, система (3.57) совпадает с системой (3.54).

Далее, применяя к системе (3.57) последовательно три преобразования

$$u_1(t) = \bar{u}_1(\tau), \qquad u_2(t) = \bar{u}_2(\tau), \qquad \tau = |\psi_s(t)|, \tag{3.58}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_1(\tau) \\ \bar{u}_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau & -\sin\dfrac{\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau \\ \dfrac{1}{\sqrt{|\lambda_0|}}\sin\dfrac{\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau & \dfrac{1}{\sqrt{|\lambda_0|}}\cos\dfrac{\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1(\tau) \\ \omega_2(\tau) \end{pmatrix}, \tag{3.59}$$

$$\omega_i(\tau) = \frac{z_i(\tau)}{\tau}, \quad i = 1, 2, \tag{3.60}$$

получаем систему дифференциальных уравнений вида

$$z_i' = p(\tau)z_i + g(\tau)\sum_{m=1}^{2} Z_{im}(\tau, z_1, z_2), \quad i = 1, 2, \tag{3.61}$$

в которой

$$p(\tau) = \frac{\beta}{2}(\widetilde{c}_{11}(t(\tau)) + \widetilde{c}_{22}(t(\tau))) + \frac{1}{\tau}, \quad g(\tau) = \frac{1}{\tau},$$

$$Z_{11}(\tau, z_1, z_2) = \xi_1(t(\tau)) + \xi_2(t(\tau))z_1 + (\xi_3(t(\tau)) + \xi_4(t(\tau)))z_2 +$$
$$+ \beta\sqrt{|\lambda_0|}\tau^2 \sin\frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau f\left(t(\tau), \frac{z_1}{\tau}\cos\frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau - \frac{z_2}{\tau}\sin\frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau\right),$$

$$Z_{21}(\tau, z_1, z_2) = \xi_5(t(\tau)) + (\xi_4(t(\tau)) - \xi_3(t(\tau)))z_1 - \xi_2(t(\tau))z_2 +$$
$$+ \beta\sqrt{|\lambda_0|}\tau^2 \cos\frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau f\left(t(\tau), \frac{z_1}{\tau}\cos\frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau - \frac{z_2}{\tau}\sin\frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}\tau\right),$$

$$Z_{12}(\tau,z_1,z_2)=\beta\sqrt{|\lambda_0|}\tau^2\sin\frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0-1}\tau V\left(t(\tau),\frac{z_1}{\tau}\cos\frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0-1}\tau-\frac{z_2}{\tau}\sin\frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0-1}\tau\right),$$

$$Z_{22}(\tau,z_1,z_2)=\beta\sqrt{|\lambda_0|}\tau^2\cos\frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0-1}\tau V\left(t(\tau),\frac{z_1}{\tau}\cos\frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0-1}\tau-\frac{z_2}{\tau}\sin\frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0-1}\tau\right),$$

где

$$\xi_1(t(\tau))=\beta\sqrt{|\lambda_0|}\tau^2q(t(\tau))\sin\frac{\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0-1}\tau,$$

$$\xi_2(t(\tau))=\frac{\beta\tau}{2}\left(\widetilde{c}_{11}(t(\tau)-\widetilde{c}_{22}(t(\tau))\right)\cos\frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0-1}\tau+ \\ +\frac{\beta\tau}{2}\left(\frac{\widetilde{c}_{12}(t(\tau))}{\sqrt{|\lambda_0|}}+\sqrt{|\lambda_0|}\widetilde{c}_{21}(t(\tau))\right)\sin\frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0-1}\tau,$$

$$\xi_3(t(\tau))=\frac{\beta\tau}{2}\left(\frac{\widetilde{c}_{12}(t(\tau))}{\sqrt{|\lambda_0|}}-\sqrt{|\lambda_0|}\widetilde{c}_{21}(t(\tau))+\frac{2\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0-1}\right),$$

$$\xi_4(t(\tau))=\frac{\beta\tau}{2}\left(\frac{\widetilde{c}_{12}(t(\tau))}{\sqrt{|\lambda_0|}}+\sqrt{|\lambda_0|}\widetilde{c}_{21}(t(\tau))\right)\cos\frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0-1}\tau- \\ -\frac{\beta\tau}{2}\left(\widetilde{c}_{11}(t(\tau)-\widetilde{c}_{22}(t(\tau))\right)\sin\frac{2\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0-1}\tau,$$

$$\xi_5(t(\tau))=\beta\sqrt{|\lambda_0|}\tau^2q(t(\tau))\cos\frac{\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0-1}\tau,$$

$t=t(\tau)$ — функция, обратная для $\tau(t)$ из (3.58).

Теперь заметим, что в системе (3.61) функции $Z_{ij},\ i,j=1,2,$ непрерывны на множестве $[\tau_0,+\infty[\ \times\mathbb{R}^2_0,$ где $\mathbb{R}^2_0$ — некоторая окрестность точки $(0,0),$ и удовлетворяют условиям

$$Z_{i2}(\tau,0,0)\equiv 0,\quad i=1,2,\quad \text{на промежутке}\quad [\tau_0,+\infty[,$$
$$\lim_{\tau\to+\infty}Z_{i1}(\tau,z_1,z_2)=0,\quad i=1,2,\quad \text{равномерно по}\quad z_1,z_2\in[-\delta,\delta],$$
$$\lim_{|z_1|+|z_2|\to 0}\frac{Z_{i2}(\tau,z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|}=0,\quad i=1,2,\quad \text{равномерно по}\quad \tau\in[\tau_0,+\infty[.$$

Кроме того, выполняются условия

$$p(\tau)\neq 0\quad \text{при}\quad \tau\in[\tau_0,+\infty[,\qquad \left|\int\limits_{\tau_0}^{+\infty}p(\tau)\,d\tau\right|=+\infty,$$
$$\limsup_{\tau\to+\infty}|g(\tau)/p(\tau)|<+\infty.$$

Поэтому для системы (3.61) выполнены все условия теоремы 1.2 из работы [9]. Согласно этой теореме система дифференциальных уравнений (3.61) имеет хотя бы одно решение

$(z_1, z_2)\colon [\tau_1, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ $(\tau_1 \geq \tau_0)$, стремящееся к нулю при $\tau \to +\infty$, причем, если выполняются условия (3.32), то таких решений существует целое двухпараметрическое семейство. Каждому такому решению системы (3.61) в силу замен (3.37), (3.51), (3.53), (3.56) – (3.60) соответствует решение $y\colon [t_2, \omega[\to \mathbb{R}$ $(t_2 \in [a, \omega[)$ дифференциального уравнения (1.1) с асимптотическими представлениями (3.30), (3.31).

Теорема 3.2 доказана.

Замечание 3.2. В случае, когда $\alpha_s \mu_s = 1$, требование существования первого и последнего из пределов (3.24) является лишним. Если же $\alpha_s \mu_s = -1$, то существование последнего из пределов (3.24) необходимо лишь при $\gamma_s = \pm\infty$.

Замечание 3.3. В случае, когда $\alpha_s \mu_s = -1$ и $\gamma_s = \lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \dfrac{(\lambda - 1)(2 - 3\lambda)}{\lambda(5\lambda - 4)}$, вопрос о существовании и количестве решений дифференциального уравнения (1.1) может быть решен при некоторых ограничениях на нелинейность φ_s путем применения к системе (3.57) из доказательства теоремы 3.2 дополнительных преобразований (3.58), (3.59) и

$$w_i(\tau) = \frac{z_i(\tau)}{\tau \ln \tau}, \quad i = 1, 2.$$

4. Пример. В качестве примера, иллюстрирующего полученные в данной работе результаты, рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$y'' = \alpha_1 p_1(t)|y|^{\sigma_1} + \alpha_2 p_2(t) e^{\sigma_2 y}, \tag{4.1}$$

в котором $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, 2$, $\sigma_1 \in \mathbb{R}$, $\sigma_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p_1\colon [a, \omega[\to]0, +\infty[$ — непрерывная функция, $p_2\colon [a, \omega[\to]0, +\infty[$ — непрерывно дифференцируемая функция, $-\infty < a < \omega \leq \leq +\infty$, и опишем асимптотические свойства $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений в случае, когда $Y_0 = \pm\infty$ и $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, т. е. когда

$$\beta \lambda_0(\lambda_0 - 1) > 0, \qquad \text{где} \quad \beta = \operatorname{sign} \pi_\omega(t). \tag{4.2}$$

Для данного уравнения имеем

$$\varphi_1(y) = |y|^{\sigma_1}, \qquad \varphi_2(y) = e^{\sigma_2 y}, \qquad H_2(y) = -\frac{1}{\sigma_2} e^{-\sigma_2 y} + C,$$

$$C = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma_2} e^{-\sigma_2 b}, & \text{если} \quad \nu_0 \sigma_2 < 0, \\ 0, & \text{если} \quad \nu_0 \sigma_2 > 0, \end{cases}$$

$$H_2^{-1}(\alpha_2(\lambda_0 - 1) J_{12}(t)) = \ln(\sigma_2 C - \alpha_2 \sigma_2(\lambda_0 - 1) J_{12}(t))^{-1/\sigma_2},$$

$$G_2(t) = \ln(\sigma_2 C - \alpha_2 \sigma_2(\lambda_0 - 1) J_{12}(t))^{-1}, \quad \Phi_2(t) = 0,$$

$$\psi_2(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{|\ln(\sigma_2 C - \alpha_2 \sigma_2(\lambda_0 - 1) J_{12}(\tau))|^{1/2}\, d\tau}{\pi_\omega(\tau)},$$

где t_0 — некоторое число из промежутка $[a, \omega[$, а J_{12} определяется первой формулой из замечания 3.1 при $s = 2$.

Из теорем 3.1 и 3.2 имеем

Следствие 4.1. *Пусть* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. *Для существования у дифференциального уравнения (4.1)* $P_\omega(\pm\infty, \lambda_0)$*-решений, удовлетворяющих условию*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_1(t)|y(t)|^{\sigma_1}}{p_2(t)e^{\sigma_2 y(t)}} = 0,$$

необходимо, чтобы наряду с (4.2) выполнялись неравенства

$$\alpha_2\nu_0\lambda_0 > 0, \quad \alpha_2\sigma_2(\lambda_0 - 1)J_{12}(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in]a, \omega[, \tag{4.3}$$

а также условия

$$\alpha_2(\lambda_0 - 1)\lim_{t\uparrow\omega} J_{12}(t) = Z_2, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J'_{12}(t)}{J_{12}(t)\ln|J_{12}(t)|} = -\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \tag{4.4}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi^2_\omega(t)p_1(t)}{|\ln|J_{12}(t)||^{1-\sigma_1}} = 0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)p'_2(t)}{p_2(t)} = \pm\infty. \tag{4.5}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$y(t) = -\frac{1}{\sigma_2}\ln|\sigma_2(1 - \lambda_0)J_{12}(t)| + o(1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

$$y'(t) = \frac{\lambda_0 \ln|\sigma_2(1 - \lambda_0)J_{12}(t)|}{\sigma_2(1 - \lambda_0)\pi_\omega(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Следствие 4.2. *Пусть* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ *и выполняются условия (4.2)–(4.5). Тогда:*

1) если $\alpha_2\sigma_2 > 0$, *то у дифференциального уравнения (4.1) существует однопараметрическое семейство* $P_\omega(\pm\infty, \lambda_0)$*-решений с представлениями вида*

$$y(t) = -\frac{1}{\sigma_2}\ln|\sigma_2(1 - \lambda_0)J_{12}(t)| + o(1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

$$y'(t) = \frac{\alpha_2(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)p_2(t)}{\sigma_2 C - \alpha_2\sigma_2(\lambda_0 - 1)J_{12}(t)} + \frac{|\ln|\sigma_2(1 - \lambda_0)J_{12}(t)||^{1/2}}{\pi_\omega(t)}o(1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega;$$

2) если $\alpha_2\sigma_2 < 0$ *и выполняются условия*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \psi_2(t)\left[\frac{\alpha_2(\lambda_0 - 1)\pi^2_\omega(t)p_2(t)}{(\sigma_2 C - \alpha_2\sigma_2(\lambda_0 - 1)J_{12}(t))\ln(\sigma_2 C - \alpha_2\sigma_2(\lambda_0 - 1)J_{12}(t))^{-1/\sigma_2}} - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right] = 0, \tag{4.6}$$

$$\lambda_0 \neq \frac{2}{3}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \psi^2_2(t)\left[\frac{\pi_\omega(t)J'_{12}(t)}{J_{12}(t) - \dfrac{\alpha_2 C}{\lambda_0 - 1}} - \frac{\pi_\omega(t)p'_2(t)}{p_2(t)} + \frac{2 - \lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right] = 0, \tag{4.7}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_1(t)\pi^2_\omega(t)\psi^2_2(t)}{|\ln|J_{12}(t)||^{1-\sigma_1}} = 0, \tag{4.8}$$

то у дифференциального уравнения (4.1) существуют $P_\omega(\pm\infty, \lambda_0)$*-решения, допускающие при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$y(t) = -\frac{1}{\sigma_2}\ln|\sigma_2(\lambda_0 - 1)J_{12}(t)| + \frac{o(1)}{\psi_2(t)},$$

$$y'(t) = \frac{\alpha_2(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)p_2(t)}{\sigma_2 C - \alpha_2\sigma_2(\lambda_0 - 1)J_{12}(t)} + \frac{|\ln|\sigma_2(1-\lambda_0)J_{12}(t)||^{1/2}}{\pi_\omega(t)\psi_2(t)} o(1),$$

причем таких решений существует двупараметрическое семейство в случае, когда $\lambda_0 \in (0, 2/3)$.

В частном случае, когда

$$p_2(t) = \frac{\alpha_2 c_1 \lambda_0}{(\lambda_0 - 1)^2} \frac{|\pi_\omega(t)|^{\frac{2-\lambda_0}{\lambda_0 - 1}}}{\exp\left\{\sigma_2 c_1 (|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}} + c_0)\right\}},$$

где $c_0 \in \mathbb{R},\ c_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \operatorname{sign} c_1 = \nu_0,$ условия (4.2) – (4.4), второе из условий (4.5) – (4.7) заведомо выполнены. При этом, если функция p_1 при $\alpha_2\sigma_2 > 0$ удовлетворяет первому из условий (4.5), а при $\alpha_2\sigma_2 < 0$ — (4.8), то у дифференциального уравнения (4.1) существуют $P_\omega(\pm\infty, \lambda_0)$-решения, допускающие при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$y(t) = c_1\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}} + c_0\right)\left[1 + \frac{o(1)}{G_2(t)\psi_2(t)}\right],$$

$$y'(t) = \frac{c_1\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}} + c_0\right)}{\pi_\omega(t)}\left[\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\,\frac{1}{1 + c_0|\pi_\omega(t)|^{-\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}} + \frac{o(1)}{|G_2(t)|^{1/2}\,\psi_2(t)}\right],$$

причем, если $\lambda_0 \in (0, 2/3)$, то таких решений существует двухпараметрическое семейство.

Выводы. В настоящей работе впервые для уравнения (1.1) при $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ установлены условия существования $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений в случае, когда главным является слагаемое с быстро меняющейся нелинейностью. Также найдены асимптотические представления при $t \uparrow \omega,\ \omega \le +\infty,$ для таких решений и их производных первого порядка и выяснен вопрос об их количестве.

Литература

1. *Marič V.* Regular variation and differential equations // Lect. Notes Math. – 2000. – **1726**. – 128 p.
2. *Евтухов В. М., Кириллова Л. А.* Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 2005. – **41**, № 8. – С. 1053 – 1061.
3. *Евтухов В. М., Харьков В. М.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 2007. – **43**, № 9. – С. 1311 – 1323.
4. *Черникова А. Г.* Асимптотика быстро изменяющихся решений дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью // Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика і механіка. – 2015. – **20**, № 2. – С. 56 – 68.
5. *Евтухов В. М., Касьянова В. А.* Асимптотическое поведение неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. I // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 3. – С. 338 – 355.
6. *Евтухов В. М., Касьянова В. А.* Асимптотическое поведение неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. II // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 7. – С. 901 – 921.
7. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. – Одесса, 1997. – 295 с.
8. *Евтухов В. М.* Об исчезающих на бесконечности решениях неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 4. – С. 441 – 452.
9. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 52 – 80.

Получено 19.12.17,
после доработки — 25.05.18