УДК 517.983

СЛАБОВОЗМУЩЕННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. Ф. Журавлев, Н. П. Фомин

Житомир. нац. агроэкол. у-т
бульвар Старый, 7, Житомир, 10008, Украина
e-mail: vfz2008@ukr.net
npfomin@gmail.com

We consider weakly perturbed boundary-value problems for Fredholm integral equations with degenerated kernel in Banach spaces. We obtain bifurcation conditions for solutions of weakly perturbed boundary-value problems for Fredholm integral equations with degenerated kernel in Banach spaces spaces from the point $\varepsilon = 0$. We propose a converging procedure for finding solutions in the form of a series $\sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t)$ in powers of ε.

Розглянуто слабкозбурені крайові задачі для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах. Отримано умови біфуркації з точки $\varepsilon = 0$ розв'язків слабкозбурених крайових задач для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах. Запропоновано збіжну ітераційну процедуру знаходження розв'язків у вигляді ряду $\sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t)$ за степенями ε.

Настоящая статья является продолжением исследований, начатых в [1], относительно изучения условий разрешимости и построения решений слабовозмущенных интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром в банаховых пространствах.

Задачи построения конструктивных методов анализа слабонелинейных краевых задач для широкого класса систем функционально-дифференциальных и других уравнений традиционно занимают одно из важных мест в качественной теории дифференциальных уравнений и продолжают развитие методов теории возмущений, в частности методов малого параметра Ляпунова – Пуанкаре [2] и Вишика – Люстерника [3].

Исследование условий разрешимости и построение решений слабовозмущенных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений с нетеровой линейной частью в евклидовых пространствах изучались в работах [4 – 6].

Эти методы были успешно применены А. А. Бойчуком и Е. В. Панасенко [7] при исследовании слабовозмущенных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Известно, что дифференциальная система линейной порождающей ($\varepsilon = 0$) краевой задачи имеет решение при любой правой части, т. е. по классификации С. Г. Крейна является везде разрешимой [8].

Слабовозмущенные краевые задачи для не везде разрешимых сингулярных дифференциальных уравнений в конечномерных пространствах исследовали А. А. Бойчук, Л. М. Шегда [9].

Специфика исследования краевых задач для систем интегральных уравнений заключается в том, что их линейная часть является оператором, который не имеет обратного [10], что существенно усложняет исследование краевых задач для таких уравнений. Поэтому актуальной является задача об исследовании условий возникновения решений слабовозмущенных краевых задач для не везде разрешимых интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром в банаховых пространствах.

Постановка задачи. Пусть $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — банахово пространство непрерывных на конечном промежутке $\mathcal{I} = [a, b]$ вектор-функций $f(t)$ со значениями в банаховом пространстве $\mathbf{B}_1$, $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) := \Big\{ f(\cdot)\colon \mathcal{I} \to \mathbf{B}_1, |||f||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|f(t)\| \Big\}$, $\mathbf{B}$ — банахово пространство.

Рассмотрим слабовозмущенную линейную краевую задачу

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t)\int_a^b N(s)z(s)\,ds = f(t) + \varepsilon \int_a^b K(t,s)z(s)\,ds, \tag{1}$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha + \varepsilon \ell_1 z(\cdot), \tag{2}$$

где оператор-функции $M(t)$ и $N(t)$ действуют из пространства $\mathbf{B}_1$ в $\mathbf{B}_1$, сильно непрерывны [11] с нормами $|||M||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|M(t)\|_{\mathbf{B}_1} = M_0 < \infty$ и $|||N||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|N(t)\|_{\mathbf{B}_1} = N_0 < \infty$, оператор-функция $K(t,s)$ определена в квадрате $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$ и действует из пространства $\mathbf{B}_1$ в $\mathbf{B}_1$ по каждой переменной, сильно непрерывна по t, s с нормой $|||K||| = \sup_{t,s\in\mathcal{I}} \|K(t,s)\|_{\mathbf{B}_1} < \infty$, вектор-функция $f(t)$ принадлежит $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, ℓ и ℓ_1 — линейные непрерывные операторы, которые действуют из пространства $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ в банахово пространство $\mathbf{B}$: $\ell\colon \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{B}$, $\ell_1\colon \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{B}$, α — элемент пространства $\mathbf{B}$: $\alpha \in \mathbf{B}$, $\varepsilon << 1$ — малый параметр.

Пусть порождающая краевая задача, которая получается из (1), (2) при $\varepsilon = 0$,

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t)\int_a^b N(s)z(s)ds = f(t), \tag{3}$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha \tag{4}$$

не имеет решений при произвольных неоднородностях $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ и $\alpha \in \mathbf{B}$.

Возникают вопросы: можно ли с помощью линейных возмущений сделать задачу (1), (2) разрешимой и каким условиям должна удовлетворять оператор-функция $K(t,s)$ в интегральном уравнении (1) и оператор ℓ_1 в краевом условии (2)? Для исследования существования решений этих задач используется аппарат теории обобщенно-обратных операторов.

Предварительные сведения. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма (3) с вырожденным ядром.

Пусть

$$D = I_{\mathbf{B}_1} - \int_a^b N(s)M(s)\,ds$$

— линейный оператор, который действует из банахова пространства $\mathbf{B}_1$ в $\mathbf{B}_1$ и при сделанных предположениях относительно оператор-функций $M(t)$ и $N(t)$ является ограниченным.

Класс линейных ограниченных обобщенно-обратных операторов, которые действуют из банахова пространства $\mathbf{B}$ в банахово пространство $\mathbf{B}$, будем обозначать через $\mathbf{GI}(\mathbf{B},\mathbf{B})$. Очевидно, что оператор, принадлежащий $\mathbf{GI}(\mathbf{B},\mathbf{B})$, нормально разрешим [8, 12].

В [10] показано, что если оператор D принадлежит $\mathbf{GI}(\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_1)$, то при выполнении условия

$$\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds = 0,$$

и только при нем, операторное уравнение (3) разрешимо и имеет семейство решений

$$z(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c + \left(L^- f\right)(t), \tag{5}$$

где c — произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{B}_1$,

$$\left(L^- f\right)(t) = f(t) + M(t)D^-\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds$$

— ограниченный обобщенно-обратный оператор к интегральному оператору L. Здесь $\mathcal{P}_{N(D)}\colon \mathbf{B}_1 \to N(D)$ — ограниченный проектор, который проектирует банахово пространство $\mathbf{B}_1$ на нуль-пространство $N(D)$ оператора D, $\mathcal{P}_{Y_D}\colon \mathbf{B}_1 \to Y_D$ — ограниченный проектор, который проектирует банахово пространство $\mathbf{B}_1$ на подпространство Y_D, изоморфное нуль-пространству $N(D^*)$ сопряженного оператора D^*, D^- — ограниченный обобщенно-обратный оператор, который можно построить, используя методику из [5, 6, 14].

Далее рассмотрим в банаховом пространстве $\mathbf{B}_1$ линейную краевую задачу (3), (4) для интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром.

Решение краевой задачи (3), (4) для интегрального уравнения будем искать в банаховом пространстве $\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$ непрерывных на промежутке $\mathcal{I}$ функций $z(t)$, которые принимают значения в действительном банаховом пространстве $\mathbf{B}_1$. Подставив решение (5) неоднородного операторного уравнения (3) в краевое условие (4), получим операторное уравнение

$$\ell(M(\cdot)\mathcal{P}_{N(D)})c + \ell f(\cdot) + \ell M(\cdot)D^-\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds = \alpha. \tag{6}$$

Обозначим через $Q = \ell M(\cdot)\mathcal{P}_{N(D)}$ оператор, который действует из банахова пространства $\mathbf{B}_1$ в банахово пространство $\mathbf{B}$. Оператор Q ограничен как суперпозиция ограниченного оператора ℓ и ограниченной оператор-функции $M(t)\mathcal{P}_{N(D)}$. Тогда уравнение (6) примет вид

$$Qc = \alpha - \ell f(\cdot) - \ell M(\cdot)D^-\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds.$$

Пусть оператор Q принадлежит $\mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B})$. Обозначим через $\mathcal{P}_{N(Q)} : \mathbf{B}_1 \to N(Q)$ ограниченный проектор банахова пространства $\mathbf{B}_1$ на нуль-пространство $N(Q)$ оператора Q, а через $\mathcal{P}_{Y_Q} : \mathbf{B} \to Y_Q$ ограниченный проектор банахова пространства $\mathbf{B}$ на подпространство $Y_Q \subset \mathbf{B}$.

Теорема 1 [13]. *Пусть* $D \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1)$ *и* $Q \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B})$.

Тогда соответствующая (3), (4) однородная $(f(t) = 0, \alpha = 0)$ *краевая задача имеет семейство решений*

$$z(t) = \widetilde{M}(t)c, \tag{7}$$

где $\widetilde{M}(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q)}$, c *— произвольный элемент банахова пространства* $\mathbf{B}_1$.

Неоднородная краевая задача (3), (4) разрешима для тех и только тех $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ *и* $\alpha \in \mathbf{B}$, *которые удовлетворяют системе условий*

$$\mathcal{P}_{Y_D} \int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds = 0,$$

$$\mathcal{P}_{Y_Q}\left[\alpha - \ell f(\cdot) - \ell M(\cdot)D^- \int\limits_a^b N(s)f(s)ds\right] = 0,$$

и при этом она имеет семейство решений

$$z(t) = \widetilde{M}(t)c + (Gf)(t) + M(t)\mathcal{P}_{N(D)}Q^-\alpha,$$

где

$$(Gf)(t) := \left[f(t) - M(t)\mathcal{P}_{N(D)}Q^-\ell f(\cdot)\right] +$$
$$+ M(t)\left[I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(D)}Q^-\ell M(\cdot)\right]D^- \int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds \tag{8}$$

— обобщенный оператор Грина соответствующей (3), (4) полуоднородной $(\alpha = 0)$ *краевой задачи.*

Основной результат. Для решения поставленной задачи применим метод Вишика–Люстерника [3] и найдем условия возникновения решений краевой задачи (1), (2) в виде части ряда

$$z(t,\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t) \tag{9}$$

по степеням малого параметра ε, который содержит отрицательную степень ε.

Подставив ряд (9) в краевую задачу (3), (4), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε.

При ε^{-1} приходим к однородной краевой задаче

$$z_{-1}(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z_{-1}(s)\,ds = 0, \tag{10}$$

$$\ell z_{-1}(\cdot) = 0 \tag{11}$$

для определения $z_{-1}(t)$.

По теореме 1 однородная краевая задача (10), (11) имеет решение

$$z_{-1}(t, c_{-1}) = \widetilde{M}(t)c_{-1}, \tag{12}$$

где $c_{-1} \in \mathbf{B_1}$ — произвольный элемент, который будет найден ниже.

Приравнивая коэффициенты при ε^0, получаем краевую задачу

$$z_0(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z_0(s)\,ds = f(t) + \int\limits_a^b K(t,s)z_{-1}(s)\,ds, \tag{13}$$

$$\ell z_0(\cdot) = \alpha + \ell_1 z_{-1}(\cdot) \tag{14}$$

для определения коэффициента $z_0(t)$.

По теореме 1 линейная неоднородная краевая задача (13), (14) имеет решения тогда и только тогда, когда выполняется система условий

$$\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\left[f(s) + \int\limits_a^b K(s,\tau)z_{-1}(\tau)\,d\tau\right]ds = 0,$$

$$\mathcal{P}_{Y_Q}\left\{\alpha + \ell_1\widetilde{M}(\cdot)c_{-1} - \ell\left[f(\cdot) + \int\limits_a^b K(\cdot,s)z_{-1}(s)ds\right] - \right.$$
$$\left. -\ell M(\cdot)D^{-}\int\limits_a^b N(s)\left[f(s) + \int\limits_a^b K(s,\tau)z_{-1}(\tau)\,d\tau\right]ds\right\} = 0.$$

Подставив $z_{-1}(t, c_{-1})$ из (12), получим систему уравнений

$$\begin{gathered}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\left[f(s) + \int\limits_a^b K(s,\tau)\widetilde{M}(\tau)c_{-1}d\tau\right]ds = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_Q}\left\{\alpha + \ell_1\widetilde{M}(\cdot)c_{-1} - \ell\left[f(\cdot) + \int\limits_a^b K(\cdot,s)\widetilde{M}(s)c_{-1}\,ds\right] - \right.\end{gathered} \tag{15}$$

$$-\ell M(\cdot)D^{-}\int\limits_a^b N(s)\left[f(s)+\int\limits_a^b K(s,\tau)\widetilde{M}(\tau)c_{-1}d\tau\right]ds\Bigg\}=0.$$

Обозначив

$$B_0=\left[\begin{array}{c}\mathcal{P}_{Y_D}\displaystyle\int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)\widetilde{M}(\tau)\,d\tau\,ds\\ \\ \mathcal{P}_{Y_Q}\Bigg\{\ell_1\widetilde{M}(\cdot)-\ell\displaystyle\int_a^b K(\cdot,s)\widetilde{M}(s)\,ds-\\ -\ell M(\cdot)D^{-}\displaystyle\int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)\widetilde{M}(\tau)\,d\tau\,ds\Bigg\}\end{array}\right], \tag{16}$$

из (15) получим операторное уравнение относительно элемента $c_{-1}\in\mathbf{B_1}$:

$$B_0c_{-1}=-\left[\begin{array}{c}\mathcal{P}_{Y_D}\displaystyle\int_a^b N(s)f(s)\,ds\\ \mathcal{P}_{Y_Q}\Bigg\{\alpha-\ell f(\cdot)-\ell M(\cdot)D^{-}\displaystyle\int_a^b N(s)f(s)\,ds\Bigg\}\end{array}\right]. \tag{17}$$

Оператор B_0 действует из банахова пространства $\mathbf{B_1}$ в прямое произведение банаховых пространств $\mathbf{B_1}\times\mathbf{B}$. Пусть оператор B_0 принадлежит $\mathbf{GI}(\mathbf{B_1},\mathbf{B_1}\times\mathbf{B})$. Тогда он нормально разрешим и существуют ограниченные проекторы $\mathcal{P}_{N(B_0)}\colon\mathbf{B_1}\to N(B_0)$, $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\colon\mathbf{B_1}\times\mathbf{B}\to Y_{B_0}$ и ограниченный обобщенно-обратный оператор $B_0^{-}\colon\mathbf{B_1}\times\mathbf{B}\to\mathbf{B_1}$ к оператору B_0.

В результате нормальной разрешимости оператора B_0 уравнение (17) имеет решение тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условиям

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\left[\begin{array}{c}\mathcal{P}_{Y_D}\displaystyle\int_a^b N(s)f(s)\,ds\\ \mathcal{P}_{Y_Q}\Bigg\{\alpha-\ell f(\cdot)-\ell M(\cdot)D^{-}\displaystyle\int_a^b N(s)f(s)\,ds\Bigg\}\end{array}\right]=0.$$

Последнее условие будет выполняться, если выполняется условие

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\left[\begin{array}{c}\mathcal{P}_{Y_D}\\ \mathcal{P}_{Y_Q}\end{array}\right]=0, \tag{18}$$

а операторное уравнение (17) при этом будет иметь хотя бы одно решение

$$c_{-1}=-B_0^{-}\left[\begin{array}{c}\mathcal{P}_{Y_D}\displaystyle\int_a^b N(s)f(s)\,ds\\ \mathcal{P}_{Y_Q}\Bigg\{\alpha-\ell f(\cdot)-\ell M(\cdot)D^{-}\displaystyle\int_a^b N(s)f(s)\,ds\Bigg\}\end{array}\right].$$

Подставляя найденное c_{-1} в (12), получаем решение

$$z_{-1}(t, c_{-1}) = -\widetilde{M}(t)B_0^- \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s)f(s)\,ds \\ \mathcal{P}_{Y_Q}\left\{\alpha - \ell f(\cdot) - \ell M(\cdot)D^- \int_a^b N(s)f(s)\,ds\right\} \end{bmatrix}$$

краевой задачи (10), (11). При этом краевая задача (13), (14) имеет семейство решений

$$z_0(t, c_0) = \widetilde{M}(t)c_0 + \bar{z}_0(t), \tag{19}$$

где $c_0 \in \mathbf{B_1}$ — произвольный элемент пространства $\mathbf{B_1}$, который будет определен на следующем шаге итерационного процесса,

$$\bar{z}_0(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}Q^-\left[\alpha + \ell_1 z_{-1}(\cdot, c_{-1})\right] + \left(G\left[f(\cdot) + \int\limits_a^b K(\cdot, s)z_{-1}(s)\,ds\right]\right)(t),$$

G — обобщенный оператор Грина (8).

Обобщенный оператор Грина G краевой задачи (13), (14) действует на оператор-функцию $f(t) + \int_a^b K(t,s)z_{-1}(s)\,ds$ по правилу

$$\begin{aligned}\left(G\left[f(\cdot) + \int\limits_a^b K(\cdot, s)z_{-1}(s)ds\right]\right)(t) := f(t) + \int\limits_a^b K(t,s)z_{-1}(s)\,ds - \\ - M(t)\mathcal{P}_{N(D)}Q^-\ell\left[f(\cdot) + \int\limits_a^b K(\cdot, s)z_{-1}(s)\,ds\right] + \\ + M(t)\left[I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(D)}Q^-\ell M(\cdot)\right] \times \\ \times D^- \int\limits_a^b N(s)\left[f(s) + \int\limits_a^b K(s,\tau)z_{-1}(s)\,d\tau\right] ds.\end{aligned}$$

При ε^1 для определения коэффициента $z_1(t)$ приходим к краевой задаче

$$z_1(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z_1(s)\,ds = \int\limits_a^b K(t,s)z_0(s)\,ds, \tag{20}$$

$$\ell z_1(\cdot) = \ell_1 z_0(\cdot). \tag{21}$$

По теореме 1 линейная неоднородная краевая задача (20), (21) разрешима тогда и только тогда, когда выполняется система условий

$$\mathcal{P}_{Y_D} \int\limits_a^b N(s) \int\limits_a^b K(s,\tau) z_0(\tau)\, d\tau\, ds = 0,$$

$$\mathcal{P}_{Y_Q} \left\{ \ell_1 \left[\widetilde{M}(\cdot) c_0 + \bar{z}_0(\cdot) \right] - \ell \int\limits_a^b K(\cdot, s) z_0(s) ds - \right.$$
$$\left. -\ell M(\cdot) D^- \int\limits_a^b N(s) \int\limits_a^b K(s,\tau) z_0(\tau)\, d\tau\, ds \right\} = 0.$$

Подставляя $z_0(t, c_0)$ из (19), с учетом (16) получаем операторное уравнение относительно элемента $c_0 \in \mathbf{B_1}$:

$$B_0 c_0 = - \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \int_a^b K(s,\tau) \bar{z}_0(\tau)\, d\tau\, ds \\ \mathcal{P}_{Y_Q} \left\{ \ell_1 \bar{z}_0(\cdot) - \ell M(\cdot) D^- \int_a^b N(s) \int_a^b K(s,\tau) \bar{z}_0(\tau)\, d\tau\, ds \right\} \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Вследствие нормальной разрешимости оператора B_0 уравнение (22) имеет решение тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условию

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \int_a^b K(s,\tau) \bar{z}_0(\tau)\, d\tau\, ds \\ \mathcal{P}_{Y_Q} \left\{ \ell_1 \bar{z}_0(\cdot) - \ell M(\cdot) D^- \int_a^b N(s) \int_a^b K(s,\tau) \bar{z}_0(\tau)\, d\tau\, ds \right\} \end{bmatrix} = 0.$$

При выполнении (18) это условие будет выполнено и операторное уравнение (22) будет иметь хотя бы одно решение

$$c_0 = -B_0^- \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \int_a^b K(s,\tau) \bar{z}_0(\tau)\, d\tau\, ds \\ \mathcal{P}_{Y_Q} \left\{ \ell_1 \bar{z}_0(\cdot) - \ell M(\cdot) D^- \int_a^b N(s) \int_a^b K(s,\tau) \bar{z}_0(\tau)\, d\tau\, ds \right\} \end{bmatrix}.$$

Подставляя c_0 в (19), получаем решение краевой задачи (13), (14):

$$z_0(t, c_0) = -\widetilde{M}(t) B_0^- \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \int_a^b K(s,\tau) \bar{z}_0(\tau)\, d\tau\, ds \\ \mathcal{P}_{Y_Q} \left\{ \ell_1 \bar{z}_0(\cdot) - \ell M(\cdot) D^- \int_a^b N(s) \int_a^b K(s,\tau) \bar{z}_0(\tau)\, d\tau\, ds \right\} \end{bmatrix} + \bar{z}_0(t).$$

При этом краевая задача (20), (21) имеет семейство решений

$$z_1(t,c_1) = \widetilde{M}(t)c_1 + \bar{z}_1(t), \tag{23}$$

где

$$\bar{z}_1(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}Q^{-}\ell_1 z_0(\cdot) + \left(G\left[f(\cdot) + \int\limits_a^b K(\cdot,s)z_0(s)ds\right]\right)(t),$$

G — обобщенный оператор Грина (8), а $c_1 \in \mathbf{B_1}$ — произвольный элемент пространства $\mathbf{B_1}$, который будет определен на следующем шаге итерационного процесса.

При ε^2 для определения коэффициента $z_2(t)$ приходим к краевой задаче

$$z_2(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z_2(s)\,ds = \int\limits_a^b K(t,s)z_1(s)\,ds, \tag{24}$$

$$\ell z_2(\cdot) = \ell_1 z_1(\cdot). \tag{25}$$

По теореме 1 линейная неоднородная краевая задача (24), (25) разрешима тогда и только тогда, когда выполняется система условий

$$\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)z_1(\tau)d\tau\,ds = 0,$$

$$\mathcal{P}_{Y_Q}\left\{\ell_1\left[\widetilde{M}(\cdot)c_1 + \bar{z}_1(\cdot)\right] - \ell\int\limits_a^b K(\cdot,s)z_1(s)\,ds - \right.$$
$$\left. -\ell M(\cdot)D^{-}\int\limits_a^b N(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)z_1(\tau)\,d\tau\,ds\right\} = 0.$$

Подставляя $z_1(t,c_1)$ из (23), с учетом (16) получаем операторное уравнение относительно элемента $c_1 \in \mathbf{B_1}$:

$$B_0c_1 = -\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_D}\displaystyle\int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)\bar{z}_1(\tau)\,d\tau\,ds \\ \mathcal{P}_{Y_Q}\left\{\ell_1\bar{z}_1(\cdot) - \ell M(\cdot)D^{-}\displaystyle\int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)\bar{z}_1(\tau)\,d\tau\,ds\right\}\end{bmatrix}. \tag{26}$$

Вследствие нормальной разрешимости оператора B_0 уравнение (26) имеет решение тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условиям

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_D}\displaystyle\int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)\bar{z}_1(\tau)\,d\tau\,ds \\ \mathcal{P}_{Y_Q}\left\{\ell_1\bar{z}_1(\cdot) - \ell M(\cdot)D^{-}\displaystyle\int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)\bar{z}_1(\tau)\,d\tau\,ds\right\}\end{bmatrix} = 0.$$

При выполнении условия (18) эти условия будут выполнены и операторное уравнение (26) будет иметь хотя бы одно решение

$$c_1 = -B_0^- \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \int_a^b K(s,\tau)\bar{z}_1(\tau)\,d\tau\,ds \\ \mathcal{P}_{Y_Q}\left\{\ell_1\bar{z}_1(\cdot) - \ell M(\cdot)D^- \int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)\bar{z}_1(\tau)\,d\tau\,ds\right\} \end{bmatrix}.$$

Подставляя найденное c_1 в (23), получаем решение краевой задачи (20), (21):

$$z_1(t) = -\widetilde{M}(t)B_0^- \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \int_a^b K(s,\tau)\bar{z}_1(\tau)\,d\tau\,ds \\ \mathcal{P}_{Y_Q}\left\{\ell_1\bar{z}_1(\cdot) - \ell M(\cdot)D^- \int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)\bar{z}_1(\tau)\,d\tau\,ds\right\} \end{bmatrix} + \bar{z}_1(t).$$

При этом краевая задача (24), (25) имеет семейство решений

$$z_2(t,c_2) = \widetilde{M}(t)c_2 + \bar{z}_2(t),$$

где

$$\bar{z}_2(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}Q^-\ell_1 z_1(\cdot) + \left(G\left[f(\cdot) + \int\limits_a^b K(\cdot,s)z_1(s)\,ds\right]\right)(t),$$

G — обобщенный оператор Грина (8), а c_2 — произвольный элемент пространства $\mathbf{B_1}$, который будет определен на следующем шаге итерационного процесса.

Действуя по индукции, для определения коэффициентов $z_i(t)$ при ε^i ряда (9) приходим к краевым задачам

$$z_i(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z_i(s)\,ds = \int\limits_a^b K(t,s)z_{i-1}(s)\,ds, \tag{27}$$

$$\ell z_i(\cdot) = \ell_1 z_{i-1}(\cdot) \tag{28}$$

для определения коэффициентов $z_i(t)$.

Линейные неоднородные краевые задачи (27), (28) по теореме 1 разрешимы тогда и только тогда, когда выполняется система условий

$$\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)z_{i-1}(\tau)\,d\tau\,ds = 0,$$

$$\mathcal{P}_{Y_Q}\left\{\ell_1\left[\widetilde{M}(\cdot)c_{i-1}+\bar{z}_{i-1}(\cdot)\right]-\ell\int\limits_a^b K(\cdot,s)z_{i-1}(s)ds-\right.$$

$$\left.-\ell M(\cdot)D^-\int\limits_a^b N(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)z_{i-1}(\tau)\,d\tau\,ds\right\}=0.$$

Подставляя

$$z_{i-1}(t,c_{i-1})=\widetilde{M}(t)c_{i-1}+\bar{z}_{i-1}(t), \tag{29}$$

с учетом (16) получаем операторные уравнения относительно элементов $c_{i-1}\in\mathbf{B_1}$:

$$B_0c_{i-1}=-\left[\begin{array}{c}\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)\bar{z}_{i-1}(\tau)\,d\tau\,ds\\ \mathcal{P}_{Y_Q}\left\{\ell_1\bar{z}_{i-1}(\cdot)-\ell M(\cdot)D^-\int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)\bar{z}_{i-1}(\tau)\,d\tau\,ds\right\}\end{array}\right]. \tag{30}$$

Вследствие нормальной разрешимости оператора B_0 уравнения (30) имеют решения тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\left[\begin{array}{c}\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)\bar{z}_{i-1}(\tau)\,d\tau\,ds\\ \mathcal{P}_{Y_Q}\left\{\ell_1\bar{z}_{i-1}(\cdot)-\ell M(\cdot)D^-\int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)\bar{z}_{i-1}(\tau)\,d\tau\,ds\right\}\end{array}\right]=0. \tag{31}$$

При выполнении условия (18) условия (31) будут выполняться и каждое из операторных уравнений (30) будет иметь хотя бы одно решение

$$c_{i-1}=-B_0^-\left[\begin{array}{c}\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)\bar{z}_{i-1}(\tau)\,d\tau\,ds\\ \mathcal{P}_{Y_Q}\left\{\ell_1\bar{z}_0(\cdot)-\ell M(\cdot)D^-\int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)\bar{z}_{i-1}(\tau)\,d\tau\,ds\right\}\end{array}\right].$$

Подставляя c_{i-1} в (29), получаем решения краевых задач (27), (28):

$$z_{i-1}(t)=-\widetilde{M}(t)B_0^-\times$$

$$\times\left[\begin{array}{c}\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)\bar{z}_{i-1}(\tau)\,d\tau\,ds\\ \mathcal{P}_{Y_Q}\left\{\ell_1\bar{z}_{i-1}(\cdot)-\ell M(\cdot)D^-\int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)\bar{z}_{i-1}(\tau)\,d\tau\,ds\right\}\end{array}\right]+\bar{z}_{i-1}(t),$$

где

$$\bar{z}_i(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}Q^{-}\ell_1 z_{i-1}(\cdot) + \left(G\int\limits_a^b K(\cdot,s)z_{i-1}(s)\,ds\right)(t).$$

Таким образом, имеем итерационный алгоритм построения решения краевой задачи (1), (2):

$$z_i(t,c_i) = \left[\begin{array}{ll} M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q)}c_{-1}, & \text{если} \quad i=-1, \\ M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q)}c_i + \bar{z}_i(t), & \text{если} \quad i=\overline{0,\infty}, \end{array}\right. \tag{32}$$

$$c_i = \left[\begin{array}{ll} -B_0^{-}\left[\begin{array}{c} \mathcal{P}_{Y_D}\displaystyle\int_a^b N(s)f(s)ds \\ \mathcal{P}_{Y_Q}\left\{\alpha - \ell f(\cdot) - \ell M(\cdot)D^{-}\times \right. \\ \left. \times\displaystyle\int_a^b N(s)f(s)\,ds\right\} \end{array}\right], & \text{если} \quad i=-1, \\ -B_0^{-}\left[\begin{array}{c} \mathcal{P}_{Y_D}\displaystyle\int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)\bar{z}_i(\tau)\,d\tau\,ds \\ \mathcal{P}_{Y_Q}\left\{\ell_1\bar{z}_i(\cdot) - \ell M(\cdot)D^{-}\displaystyle\int_a^b N(s)\times \right. \\ \left. \times\displaystyle\int_a^b K(s,\tau)\bar{z}_i(\tau)d\tau ds\right\} \end{array}\right], & \text{если} \quad i=\overline{0,\infty}, \end{array}\right. \tag{33}$$

$$\bar{z}_i(t) = \left[\begin{array}{ll} M(t)\mathcal{P}_{N(D)}Q^{-}\left[\alpha + \ell_1 z_{-1}(\cdot,c_{-1})\right] + & \\ \quad + \left(G\left[f(\cdot) + \displaystyle\int_a^b K(\cdot,s)z_{-1}(s)\,ds\right]\right)(t), & \text{если} \quad i=0, \\ M(t)\mathcal{P}_{N(D)}Q^{-}\ell_1 z_{i-1}(\cdot) + & \\ \quad + \left(G\displaystyle\int_a^b K(\cdot,s)z_{i-1}(s)\,ds\right)(t), & \text{если} \quad i=\overline{1,\infty}, \end{array}\right. \tag{34}$$

$$\left(G\int\limits_a^b K(\cdot,s)z_{i-1}(s)\,ds\right)(t) :=$$

$$:= \left[\begin{array}{ll} f(t)+\displaystyle\int_a^b K(t,s)z_{-1}(s)\,ds - M(t)\mathcal{P}_{N(D)}Q^{-}\ell\times & \\ \qquad\times\left[f(\cdot)+\displaystyle\int_a^b K(\cdot,s)z_{-1}(s)\,ds\right]+ & \\ \qquad+M(t)\left[I_{\mathbf{B}_1}-\mathcal{P}_{N(D)}Q^{-}\ell M(\cdot)\right]\times & \\ \qquad\times D^{-}\displaystyle\int_a^b N(s)\left[f(s)+\int_a^b K(s,\tau)z_{-1}(s)\,d\tau\right]ds, & \text{если}\quad i=0, \\ \displaystyle\int_a^b K(t,s)z_{i-1}(s)\,ds - M(t)\mathcal{P}_{N(D)}Q^{-}\times & \\ \qquad\times\ell\displaystyle\int_a^b K(\cdot,s)z_{i-1}(s)\,ds + M(t)\left[I_{\mathbf{B}_1}-\mathcal{P}_{N(D)}Q^{-}\ell M(\cdot)\right]\times & \\ \qquad\times D^{-}\displaystyle\int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)z_{-1}(s)\,d\tau\,ds, & \text{если}\quad i=\overline{1,\infty}. \end{array}\right. \tag{35}$$

Доказательство сходимости ряда (9) можно провести, используя методику [1, 5, 7].

Теорема 2. *Пусть* $D \in \mathbf{GI}(\mathbf{B_1},\mathbf{B_1})$, $Q \in \mathbf{GI}(\mathbf{B_1},\mathbf{B})$ *и порождающая краевая задача (3), (4) при произвольных неоднородностях* $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$ *и* $\alpha \in \mathbf{B}$ *не имеет решений.*

Тогда если оператор $B_0 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B_1},\mathbf{B_1}\times\mathbf{B})$ *и выполняются условия (18), то слабовозмущенная краевая задача (1), (2) при произвольных неоднородностях* $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$ *и* $\alpha \in \mathbf{B}$ *имеет семейство решений в виде абсолютно сходящегося при произвольных фиксированных* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_*]$ *ряда*

$$z(t,\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty}\varepsilon^i z_i(t),$$

коэффициенты которого определяются с помощью итерационного алгоритма (32) – (35).

Замечание 1. Если $\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0$, то операторные уравнения (17), (22) и т. д. на каждом шаге итерационного процесса будут n-нормальными и однозначно разрешимыми [14]. При этом оператор B_0^- будет левым обратным оператором $(B_0)_l^{-1}$.

Тогда при выполнении условий (18) краевая задача (1), (2) будет иметь семейство решений в виде ряда (4), коэффициенты которого определяются с помощью итерационного алгоритма (32) – (35), в котором $B_0^- = (B_0)_l^{-1}$.

Замечание 2. Если $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} = 0$, то операторные уравнения (17), (22) и т. д. на каждом шаге итерационного процесса будут d-нормальными и везде разрешимыми [14]. При этом оператор B_0^- будет правым обратным оператором $(B_0)_r^{-1}$.

Тогда условия (18) будут всегда выполненными и краевая задача (1), (2) при произвольных неоднородностях $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ будет иметь семейство решений в виде ряда (4), коэффициенты которого определяются с помощью итерационного алгоритма (32)–(35), в котором $B_0^- = (B_0)_r^{-1}$.

Замечание 3. Условия (18) являются достаточными условиями существования решения краевой задачи (1), (2). Если эти условия не выполняются, то решение краевой задачи (1), (2) в виде ряда (4) не существует. Но решение краевой задачи (1), (2) может существовать в виде ряда $\sum_{i=-2}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t)$.

Литература

1. *Журавлев В. Ф., Фомин Н. П.* Слабовозмущенные интегральные уравнения Фредгольма с вырожденным ядром в банаховых пространствах // Нелінійні коливання. — 2017. — **20**, № 1. — С. 85–97.
2. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — М.: Гостехиздат, 1950. — 472 с.
3. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. — 1960. — **15**, вып. 3. – С. 3–80.
4. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1990. — 96 с.
5. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 319 с.
6. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 323 p.
7. *Бойчук А. А., Панасенко Є. В.* Слабкозбурені крайові задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Нелінійні коливання. — 2010. — **13**, № 3. — С. 291–304.
8. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. — 104 с.
9. *Boichuk A. A., Shegda L. M.* Bifurcation of solutions of singular Fredholm boundary-value problems // Different. Equat. — 2011. — **47**, № 4. — P. 453–461.
10. *Zhuravl'ov V. P.* Generalized inversion of Fredholm integral operators with degenerate kernels in Banach spaces // J. Math. Sci. — 2015. — **212**, № 3. — P. 275–289.
11. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
12. *Попов М. М.* Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха // Математика сьогодні'07. — 2007. — Вип. 13. — С. 78–116.
13. *Журавльов В. П.* Лінійні крайові задачі для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах // Бук. мат. журн. — 2014. — **2**, № 4. — С. 57–66.
14. *Zhuravlev V. F.* Solvability criterion and representation of solutions of n-normal and d-normal linear operator equations in a Banach space // Ukr. Math. J. — 2010. — **62**, № 2. — P. 186–202.

Получено 11.09.17