УДК 517.911

ОДНА СХЕМА УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Т. А. Комлева, А. В. Плотников

Одес. гос. академия стр-ва и архитектуры
ул. Дидрихсона, 4, Одесса, 65029, Украина
e-mail: t-komleva@ukr.net
a-plotnikov@ukr.net

We substantiate an averaging scheme for integro-differential inclusions on a bounded interval.

Обгрунтовано одну зі схем усереднення для інтегро-диференціальних включень на скінченному інтервалі.

Введение. Метод усреднения является одним из основных асимптотических методов исследования дифференциальных уравнений. История его зарождения уходит в XVIII век и связана с работами по небесной механике. Он встречается в работах А. Клеро, Ж. Лагранжа, С. Лапласа, а затем К. Гаусса при исследовании эволюции планетных орбит под влиянием взаимного притяжения планет. В начале XX века метод усреднения активно развивал Ван-дер-Поль, предложивший на интуитивном уровне изложения эффективный способ приближенного решения нелинейных задач теории колебаний с одной степенью свободы. Однако впервые корректность использования метода усреднения была обоснована в работах П. Фату (1928 г.), Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси (1934 г.), связанных с системами дифференциальных уравнений с периодическими по времени правыми частями. Систематическое развитие теории метода усреднения связано с именами Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, которые исследовали определенные широкие классы систем дифференциальных уравнений с малым параметром [1]. Классическая теория метода усреднения Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова получила дальнейшее развитие для различных классов уравнений в работах многих исследователей, причем изучались не только обыкновенные дифференциальные уравнения, но и интегральные и интегро-дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, разностные уравнения, управляемые системы, дифференциальные включения, многозначные и нечеткие системы и другие. Большую роль в разработке метода усреднения для различных классов систем сыграли работы Ю. А. Митропольского, В. И. Арнольда, В. М. Волосова, И. И. Гихмана, Е. А. Гребенникова, П. Л. Капицы, М. А. Красносельского, С. Г. Крейна, Н. Н. Моисеева, Н. А. Перестюка, В. А. Плотникова, А. М. Самойленко, А. Н. Филатова, М. М. Хапаева, Ф. Л. Черноусько, A. Halanay, J. K. Hale, J. A. Sanders, F. Verhulst и др. (см. [2–16] и приведенную там библиографию). Однако до сих пор его обоснование нельзя считать завершенным. В данной работе обоснована одна из схем усреднение для интегро-дифференциальных включений.

Основные определения и обозначения. Пусть $\mathrm{comp}\,(R^n)$ $(\mathrm{conv}\ (R^n))$ — семейство всех непустых компактных (выпуклых) подмножеств пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A,B) = \max\left\{\max_{a\in A}\min_{b\in B}\|a-b\|, \max_{b\in B}\min_{a\in A}\|a-b\|\right\},$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова метрика в R^n.

Рассмотрим интегро-дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \varepsilon X\left(t, x, \int\limits_0^t \Phi(t,s,x(s))\,ds\right), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где x — n-мерный вектор, $t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$ — время, $X\colon R^1 \times R^n \times \operatorname{conv}\left(R^m\right) \to \operatorname{conv}\left(R^n\right)$, $\Phi\colon R^1 \times R^1 \times R^n \to \operatorname{conv}\left(R^m\right)$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $L > 0$ — постоянная.

Определение. *Решением включения (1) будем называть абсолютно непрерывную функцию $x(\cdot)$, почти всюду удовлетворяющую включению (1).*

Замечание 1. Различные свойства решений таких интегро-дифференциальных включений были получены в работах [20, 24].

Метод усреднения. Рассмотрим следующую схему усреднения для интегро-дифференциальных включений вида (1).

Пусть

$$\Phi_1(t,x) = \int\limits_0^t \Phi(t,s,x)\,ds,$$

где интеграл Ауманна [18] вычисляется по явно входящей переменной s, а переменные t, x считаются параметрами.

Предположим, что выполняется также следующее **условие (A)**:

для всех $x \in D$ существует предел

$$\overline{X}(x) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T X(t,x,\Phi_1(t,x))\,dt, \tag{2}$$

где сходимость понимается в смысле метрики Хаусдорфа, а

$$\int\limits_0^t X(\tau,x,\Phi_1(\tau,x))\,d\tau = \left\{z \in R^n \,|\, z = \int\limits_0^t \psi(\tau)\,d\tau,\ \psi(\tau) \in \Psi(\tau,x) \equiv X(\tau,x,\Phi_1(\tau,x))\right\}.$$

Системе (1) поставим в соответствие систему

$$\dot{\xi} \in \varepsilon\overline{X}(\xi), \quad \xi(0) = x_0 \tag{3}$$

и наряду с ней будем рассматривать систему

$$\begin{aligned} &\dot{x} \in \varepsilon\tilde{X}(t,x), \\ &x(0) = x_0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\tilde{X}(t,x) = X(t,x,\Phi_1(t,x))$.

Теорема. *Пусть отображения $X(t,x,Y)$ и $\Phi(t,s,x)$ определены в области $Q\,\{t \geq 0, s \geq 0, x \in D \subset R^n, Y \in \operatorname{conv}(R^m)\}$ и в этой области:*

1) отображение $X(t,x,Y)$ удовлетворяет следующим условиям:

a) $X(t,x,Y)$ измеримо по t;

b) $X(t,x,Y)$ липшицево с постоянной $\lambda > 0$ по переменным $(x,Y) \in Q$, т. е.

$$h\left(X\left(t,x',Y'\right), X\left(t,x'',Y''\right)\right) \leq \lambda\left(\left\|x'-x''\right\| + h\left(Y',Y''\right)\right);$$

c) $X(t,x,Y)$ равномерно ограничено с постоянной $M > 0$, т. е.

$$X(t,x,Y) \subset S_M(0);$$

2) отображение $\Phi(t,s,x)$ удовлетворяет следующим условиям:

a) $\Phi(t,s,x)$ непрерывно по t;

b) $\Phi(t,s,x)$ суммируемо по s;

c) $\Phi(t,s,x)$ липшицево с постоянной $\mu(t,s) > 0$ по переменной $x \in D$, причем

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T d\tau \int\limits_0^\tau \mu(\tau,s)\,ds = 0;$$

3) решения $\xi(\cdot)$ системы (3) при $t \geq 0$ и $x_0 \in D' \subset D$ лежат вместе с ρ-окрестностью в области D.

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ можно указать такое $\varepsilon^0(\eta,L,x_0) > 0$, что при $\varepsilon \in \left(0,\varepsilon^0\right]$ на отрезке $0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}$ справедливы следующие утверждения:

1) для любого решения $\xi(\cdot)$ системы (3) существует такое решение $x(\cdot)$ системы (1), что

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leq \eta; \tag{5}$$

2) для любого решения $x(\cdot)$ системы (1) существует такое решение $\xi(\cdot)$ системы (3), что выполнена оценка (5).

Таким образом, справедлива оценка

$$h\left(R(t), \overline{R}(t)\right) \leq \eta,$$

где $R(t)$ — сечение семейства решений системы (1), а $\overline{R}(t)$ — сечение семейства решений системы (3).

Доказательство. Сначала докажем первое утверждение, т. е. справедливость включения $\overline{R}(t) \subset S_\eta(R(t))$.

Из условий 1, 2 теоремы и результатов [20] следует, что система (1) имеет хотя бы одно решение. Запишем произвольное решение $x(\cdot)$ системы (1) в виде

$$x(t) = x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t v(\tau)\,d\tau, \tag{6}$$

где $v(\cdot)$ — суммируемая функция такая, что

$$v(t) \in X\left(t, x(t), \int\limits_0^t \Phi(t, s, x(s))\, ds\right)$$

для почти всех $t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$.

Разделим отрезок $\left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$ на m частей. Поскольку отображение

$$\tilde{X}\left(\cdot, x^1(t_i)\right) : [t_i, t_{i+1}] \to \operatorname{conv}\left(R^n\right)$$

измеримо и равномерно ограничено на $[t_i, t_{i+1}]$, то существует суммируемая функция $v^1(\cdot)$ такая, что $v^1(t)$ принадлежит $X\left(t, x^1(t_i)\right)$ для почти всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$ и удовлетворяет на $[t_i, t_{i+1}]$ условию

$$\left\|v(t) - v^1(t)\right\| = \min_{z \in \tilde{X}(t, x^1(t_i))} \|v(t) - z\|. \tag{7}$$

Построим функцию $x^1(\cdot)$ следующим образом:

$$x^1(t) = x^1(t_i) + \varepsilon \int\limits_{t_i}^t v^1(\tau)\, d\tau, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = \overline{0, m-1}. \tag{8}$$

Очевидно, что при $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$\left\|x^1(t) - x^1(t_i)\right\| \le \frac{ML}{m}, \quad \|x(t) - x(t_i)\| \le \frac{ML}{m}. \tag{9}$$

Обозначим $\delta_i = \left\|x(t_i) - x^1(t_i)\right\|$. Тогда

$$\left\|x(t) - x^1(t_i)\right\| \le \|x(t) - x(t_i)\| + \left\|x(t_i) - x^1(t_i)\right\| \le \delta_i + \varepsilon M(t - t_i). \tag{10}$$

Из (10) следует, что при $t \in [t_i, t_{i+1}]$ справедлива оценка

$$\left\|v(t) - v^1(t)\right\| \le h\left(X\left(t, x(t), \int\limits_0^t \Phi(t, s, x(s))\, ds\right), X\left(t, x^1(t_i), \int\limits_0^t \Phi\left(t, s, x^1(t_i)\right) ds\right)\right) \le$$

$$\le \lambda\left[\left\|x(t) - x^1(t_i)\right\| + \int\limits_0^t \mu(t, s)\left\|x(s) - x^1(t_i)\right\| ds\right] \le$$

$$\le \lambda\left[\delta_i + \varepsilon M(t - t_i) + 2ML\int\limits_0^t \mu(t, s)\, ds\right].$$

Из (6) и (8) имеем

$$\left\|x(t)-x^1(t)\right\| \le \left\|x(t_i)-x^1(t_i)\right\| + \varepsilon \int\limits_{t_i}^{t} \left\|v(\tau)-v^1(\tau)\right\| d\tau,$$

следовательно,

$$\delta_{i+1} \le \delta_i + \lambda\delta_i \frac{L}{m} + \lambda M \frac{L^2}{2m^2} + 2ML\lambda\varepsilon \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} d\tau \int\limits_{0}^{\tau} \mu(\tau,s)\,ds.$$

Из условия (A) следует, что для любого $\eta_1 > 0$ существует такое $\varepsilon^0(\eta_1) > 0$, что при $\varepsilon \in \left(0,\varepsilon^0\right]$

$$\delta_{i+1} \le \left(1+\frac{\lambda L}{m}\right)\delta_i + \frac{\lambda M L^2}{2m^2} + 2M\lambda L^2\eta_1, \quad i=\overline{0,m-1},$$

т. е.

$$\delta_{i+1} \le \left(\frac{ML}{m} + 2mML\eta_1\right)\left(\exp(\lambda L)-1\right), \quad i=\overline{0,m-1}. \tag{11}$$

Учитывая оценки (9) и (11), получаем

$$\left\|x(t)-x^1(t)\right\| \le \frac{ML}{m}\left(\exp(\lambda L)+1\right) + 2mML\left(\exp(\lambda L)-1\right)\eta_1,$$

$$\beta\left(\dot{x}^1(t), \varepsilon X\left(t, x^1(t), \int\limits_0^t \Phi\left(t,s,x^1(t)\right)\,ds\right)\right) \le$$

$$\le \varepsilon h\left(X\left(t,x^1(t),\int\limits_0^t \Phi\left(t,s,x^1(t)\right)ds\right), X\left(t,x^1(t_i),\int\limits_0^t \Phi(t,s,x^1(t_i))\,ds\right)\right) \le$$

$$\le \varepsilon\frac{\lambda ML}{m}\left(1+\int\limits_0^t \mu(t,s)\,ds\right), \tag{12}$$

где $\beta(x,Y) = \min_{y\in Y}\|x-y\|$, $x \in R^n$, $Y \in \mathrm{conv}\,(R^n)$.

Поскольку отображение $\tilde{X}(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица, т. е.

$$h\left(\tilde{X}\left(t,x^{'}\right),\tilde{X}\left(t,x^{''}\right)\right) \le \lambda\left(1+\int\limits_0^t \mu(\tau,s)\,ds\right)\left\|x^{'}-x^{''}\right\|,$$

то, благодаря [19], существует решение $\tilde{x}(\cdot)$ включения (4) и справедлива оценка

$$\left\|\tilde{x}(t) - x^1(t)\right\| \le \varepsilon \frac{\lambda M L}{m} \int\limits_0^t \left(1 + \int\limits_0^\tau \mu(\tau, s)\, ds\right) \exp(\chi(t) - \chi(\tau))\, d\tau, \tag{13}$$

где

$$\chi(t) = \varepsilon\lambda \int\limits_0^t \left(1 + \int\limits_0^\tau \mu(\tau, s)\, ds\right)\, d\tau.$$

Из (12) и (13) получаем, что для $\varepsilon \in \left(0, \varepsilon^0\right]$ и $t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right)$ имеют место неравенства

$$\left\|\tilde{x}(t) - x^1(t)\right\| \le \frac{C_1}{m}, \quad \|x(t) - \tilde{x}(t)\| \le \frac{C_2}{m} + C_3 m \eta_1, \tag{14}$$

где $C_1 = 2\lambda M L^2 \exp(2\lambda L)$, $C_2 = C_1 + ML(\exp(\lambda L) + 1)$, $C_3 = 2ML(\exp(\lambda L) - 1)$.

Из построения отображения $\overline{X}(x)$ и условий 1, 2 теоремы следует, что:

1) $X\colon D \to \operatorname{conv}\left(R^n\right)$;

2) отображение $\bar{X}(x)$ липшицево с постоянной λ;

3) отображение $\bar{X}(x)$ равномерно ограничено постоянной $M > 0$.

Следовательно, система (4) имеет хотя бы одно решение $\tilde{x}(\cdot)$ [8, 17]. Запишем решение $\tilde{x}(\cdot)$ системы (4) в виде

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t_i) + \varepsilon \int\limits_{t_i}^t \tilde{v}(\tau)\, d\tau, \quad \tilde{x}(0) = x_0, \quad \tilde{v}(t) \in \tilde{X}(t, \tilde{x}(t)), \tag{15}$$

где $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, m-1}$.

Рассмотрим функцию

$$\tilde{x}^1(t) = \tilde{x}^1(t_i) + \varepsilon \int\limits_{t_i}^t \tilde{v}^1(\tau)\, d\tau, \quad \tilde{x}(0) = x_0, \tag{16}$$

где

$$\left\|\,\tilde{v}(t) - \tilde{v}^1(t)\right\| = \min_{z \in \tilde{X}(t, \tilde{x}^1(t_i))} \|\tilde{v}(t) - z\|, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = \overline{0, m-1}.$$

Из (15) и (16) следует, что

$$\left\|\tilde{x}(t) - \tilde{x}^1(t)\right\| \le \left\|\tilde{x}(t_i) - \tilde{x}^1(t_i)\right\| + \varepsilon \int\limits_{t_i}^t \left\|\tilde{v}(\tau) - \tilde{v}^1(\tau)\right\|\, d\tau.$$

Поскольку

$$\left\|\tilde{x}(t) - \tilde{x}^1(t_i)\right\| \le \|\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_i)\| + \left\|\tilde{x}(t_i) - \tilde{x}^1(t_i)\right\| \le \varsigma_i + \varepsilon M(t - t_i),$$

$$\left\|\tilde{v}(t) - \tilde{v}^1(t_i)\right\| \le h\left(\tilde{X}(t, \tilde{x}(t)), \tilde{X}(t, \tilde{x}^1(t))\right) \le \lambda \left(1 + \int\limits_0^t \mu(t, s)\, ds\right) \left(\varsigma_i + \varepsilon M(t - t_i)\right),$$

где $\varsigma_i = \left\|\tilde{x}(t_i) - \tilde{x}^1(t_i)\right\|$, то при $\varepsilon \in \left(0, \varepsilon^0\right]$ имеем

$$\varsigma_{i+1} \le \varsigma_i + \lambda\left(\varsigma_i + \frac{ML}{m}\right)\left(\frac{L}{m} + L\eta_1\right). \tag{17}$$

Для любого выбранного m всегда можно указать такое $\varepsilon' \in \left(0, \varepsilon^0\right]$, чтобы $\eta_1 \le m^{-1}$. Тогда из (17) получим

$$\varsigma_{i+1} \le \varsigma_i\left(1 + \frac{2\lambda L}{m}\right) + \frac{2\lambda M L^2}{m^2}, \quad \varsigma_0 = 0,$$

т. е.

$$\varsigma_{i+1} \le \frac{ML}{m}\left(\exp(2\lambda L) - 1\right), \quad i = \overline{0, m-1}.$$

Поскольку при $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$\|\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_i)\| \le \frac{ML}{m}, \quad \left\|\tilde{x}^1(t) - \tilde{x}^1(t_i)\right\| \le \frac{ML}{m},$$

то

$$\left\|\tilde{x}(t) - \tilde{x}^1(t)\right\| \le \frac{ML}{m}\left(\exp(2\lambda L) + 1\right). \tag{18}$$

Из условия (A) следует, что для любого $\eta_2 > 0$ можно указать такое $\varepsilon'' \in (0, \varepsilon']$, что

$$h\left(\frac{\varepsilon m}{L}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{X}\left(t, \tilde{x}^1(t_i)\right) dt, \overline{X}\left(\tilde{x}^1(t_i)\right)\right) \le \eta_2.$$

Следовательно, существует вектор $\bar{v}^i \in \bar{X}\left(\tilde{x}^1(t_i)\right)$ такой, что

$$\left\|\frac{\varepsilon m}{L}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left[\tilde{v}^1(t) - \bar{v}^i\right] dt\right\| \le \eta_2. \tag{19}$$

Построим функцию

$$\xi^1(t) = \xi^1(t_i) + \varepsilon\bar{v}^i(t - t_i), \quad \xi^1(0) = x_0, \tag{20}$$

где $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Из (16), (19) и (20) имеем

$$\begin{gathered}\left\|\tilde{x}^1(t_i) - \xi^1(t_i)\right\| \le L\eta_2, \quad \left\|\tilde{x}^1(t) - \xi^1(t)\right\| \le \frac{2ML}{m} + L\eta_2, \\ \beta\left(\xi^1(t), \varepsilon\bar{X}\left(\xi^1(t)\right)\right) \le \varepsilon h\left(\bar{X}\left(\xi^1(t_i)\right), \bar{X}\left(\tilde{x}(t_i)\right)\right) \le \varepsilon h\left(\bar{X}\left(\xi^1(t)\right), \bar{X}\left(\xi^1(t_i)\right)\right) + \\ + \varepsilon h\left(\bar{X}\left(\xi^1(t_i)\right), \bar{X}\left(\tilde{x}^1(t_i)\right)\right) \le \varepsilon\lambda L\left(\frac{M}{m} + \eta_2\right).\end{gathered} \tag{21}$$

Из [19] известно, что существует решение $\xi(\cdot)$ дифференциального включения (3) такое, что справедлива оценка

$$\left\|\xi^1(t) - \xi(t)\right\| \leq \varepsilon\lambda L \left(\frac{M}{m} + \eta_2\right) \int\limits_0^t \exp(\varepsilon\lambda\tau)\, d\tau \leq L \left(\frac{M}{m} + \eta_2\right) (\exp(\lambda L) - 1). \tag{22}$$

Из (12), (18), (21) и (22) следует, что для любого $\eta > 0$ можно выбрать такие $L > 0$ и $\varepsilon^0 > 0$, что при $\varepsilon \in \left(0, \varepsilon^0\right]$ и $t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$ справедлива оценка (5). Очевидно, что оценка (5) справедлива также для включения (1).

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично с заменой ссылки [19] на [20].

Замечание 2. Полученный результат обобщает результат, доказанный в [8] для системы

$$\dot{x} \in \varepsilon X \left(t, x, \int\limits_0^t \varphi(t, s, x(s))\, ds\right), \quad x(0) = x_0, \quad t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right], \tag{23}$$

где $\varphi\colon R^1 \times R^1 \times R^n \to R^m$.

Замечание 3. Интегро-дифференциальные включения (1) естественным образом возникают в задачах оптимального управления объектами в условиях неопределенности, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x} = \varepsilon f \left(t, x, u, \int\limits_0^t \varphi(t, s, x(s), v(s))\, ds\right), \quad x(0) = x_0, \tag{24}$$

где $u(t) \in U \subset R^r$ — вектор управления, U — компактное множество, $v(t) \in V \subset R^p$ — вектор помехи, V — компактное множество.

Замечание 4. Полученный результат дает возможность обосновать данную схему усреднения для нечетких интегро-дифференциальных включений

$$\dot{x} \in \varepsilon X \left(t, x, \int\limits_0^t \Phi(t, s, x(s))\, ds\right), \quad x(0) = x_0,$$

где $X\colon R^1 \times R^n \times E^m \to E^n$, $\Phi\colon R^1 \times R^1 \times R^n \to E^m$ — нечеткие отображения, E^r — пространство нечетких множеств, аналогично тому, как это было сделано для нечетких дифференциальных включений в [22–24].

Литература

1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н.Н.* Введение в нелинейную механику. — Киев: Изд-во АН УССР, 1937. — 353 с.
2. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989. — 472 с.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Физматгиз, 1963. — 407 с.

4. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. — М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1971. — 508 с.
5. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. — 440 с.
6. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П.* Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. — Киев: Наук. думка, 1983. — 216 с.
7. *Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 428 с.
8. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. — Одесса: АстроПринт, 1999. — 354 с.
9. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальних уравнений. — Ташкент: Фан, 1974. — 216 с.
10. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1976. — 151 с.
11. *Филатов О. П., Хапаев М. М.* Усреднение систем дифференциальных включений. — М.: УРСС, 2006.
12. *Филатов О. П.* Усреднение дифференциальных включений и пределы максимальных средних. – Самара: Универс групп, 2009. — 176 с.
13. *Gama R., Smirnov G.* Stability and optimality of solutions to differential inclusions via averaging method // Set-Valued Var. Anal. — 2014. — **22**, № 2. — P. 349 – 374.
14. *Klymchuk S., Plotnikov A., Skripnik N.* Overview of V. A. Plotnikov's research on averaging of differential inclusions // Phys. D. — 2012. — **241**, № 22. — P. 1932 – 1947.
15. *Lochak P., Meunier C.* Multiphase averaging for classical systems // Appl. Math. Sci. — 1988. — **72**.
16. *Sanders J. A., Verhulst F.* Averaging methods in nonlinear dynamical systems // Appl. Math. Sci. — 1985. — **59**.
17. *Aubin J. -P., Cellina A.* Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1984.
18. *Aumann R. J.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. and Appl. — 1965. — **12**, № 1. — P. 1 – 12.
19. *Филиппов А. Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестн. Моск. гос. ун-та. — 1967. — № 3. — С. 16 – 26.
20. *Плотников А. В.* Некоторые свойства интегро-дифференциальных включений // Дифференц. уравнения. — 2000. — **36**, № 10. — С. 1410 – 1414.
21. *Плотников А. В.* Некоторые свойства решений интегро-дифференциальных включений // Дифференц. уравнения. — 2002. — **38**, № 9. — С. 1214 – 1217.
22. *Plotnikov A. V., Komleva T. A., Plotnikova L. I.* The partial averaging of differential inclusions with fuzzy right-hand side // J. Adv. Res. Dyn. & Control Syst. — 2010. — **2**, № 2. — P. 26 – 34.
23. *Комлева Т. А., Плотников А. В., Плотникова Л. И.* Усреднение дифференциальных включений с нечеткой правой частью на конечном промежутке // Труды Одес. политехн. ун-та. — 2010. — Вып. 1(33) – 2(34). — С. 192 – 196.
24. *Plotnikov A. V., Komleva T. A., Plotnikova L .I.* On the averaging of differential inclusions with fuzzy right-hand side when the average of the right-hand side is absent // Iran. J. Optim. — 2010. — **2**, № 3. — P. 506 – 517.

Получено 03.09.17