УДК 517.9

ПРО ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНУ СТІЙКІСТЬ ТРИВІАЛЬНОГО ТОРА ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ

О. В. Капустян, Ф. А. Асроров, Ю. М. Перестюк

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
вул. Володимирська, 64, Київ, 01033, Україна
e-mail: alexkap@univ.kiev.ua
farhod@univ.kiev.ua
perestyuk@gmail.com

We prove exponential stability of the trivial torus for a certain class of nonlinear extensions of dynamical systems on a torus. The obtained results can be applied to a study of stability of toroidal sets for a certain class of impulsive dynamical systems.

Доказана экспоненциальная устойчивость тривиального тора для класса нелинейных расширений динамической системы на торе. Полученные результаты применены к исследованию устойчивости тороидальных множеств одного класса импульсных динамических систем.

Вступ. Одним із важливих питань якісної теорії багаточастотних коливань є питання стійкості інваріантних множин динамічних систем, визначених у прямому добутку m-вимірного тора та n-вимірного евклідового простору. Ключові результати в цьому напрямку одержано в роботах А. М. Самойленка (див., наприклад, [1]). У даній роботі встановлено нові умови експоненціальної стійкості тривіального тора нелінійних розширень динамічної системи на торі, які формулюються в термінах властивостей правих частин системи не на всьому торі, а лише на множині неблукаючих точок [7]. Одержані результати застосовано до дослідження стійкості тороїдальних множин одного класу імпульсних динамічних систем. Відповідні дослідження для лінійних розширень динамічних систем на торі було проведено в роботах [3 – 5].

У прямому добутку m-вимірного тора $\mathcal{T}_m$ та n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ розглядається система диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi, x)x, \tag{1}$$

де $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)^T \in \mathcal{T}_m$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, функція P неперервна на $\mathcal{T}_m \times \mathbb{R}^n$ та для кожного $x \in \mathbb{R}^n$ $P(\cdot, x)$, $a(\cdot) \in C(\mathcal{T}_m)$, $C(\mathcal{T}_m)$ — простір неперервних 2π-періодичних по кожній компоненті φ_v, $v = 1, \ldots, m$, функцій, визначених на $\mathcal{T}_m$.

Будемо вважати виконаними такі умови:

1) існує $M > 0$ таке, що $\|P(\varphi, x)\| \leq M \; \forall\, (\varphi, x) \in \mathcal{T}_m \times \mathbb{R}^n$;

2) для будь-якого $r > 0$ існує $L = L(r) > 0$ таке, що $\|x^{'}\| \leq r$, $\|x^{''}\| \leq r \; \forall x^{'}, x^{''}$ $\forall \varphi \in \mathcal{T}_m$;

3) $\left\|P\left(\varphi, x^{''}\right) - P\left(\varphi, x^{'}\right)\right\| \leq L \left\|x^{''} - x^{'}\right\|$;

4) існує $A > 0$ таке, що $\left\|a\left(\varphi^{''}\right) - a\left(\varphi^{'}\right)\right\| \leq A \left\|\varphi^{''} - \varphi^{'}\right\| \; \forall \varphi^{'}, \varphi^{''} \in \mathcal{T}_m$.

Умова 4 гарантує, що система

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) \tag{2}$$

породжує динамічну систему на $\mathcal{T}_m$, яку будемо позначати $\varphi_t(\varphi)$.

Означення [7]. *Точка $\varphi \in \mathcal{T}_m$ називається блукаючою точкою динамічної системи (2), якщо існують окіл $U(\varphi)$ і момент часу $T = T(\varphi) > 0$ такі, що*

$$U(\varphi) \cap \varphi_t(U(\varphi)) = \varnothing \quad \forall\, t \geq T.$$

Позначимо через Ω множину неблукаючих точок динамічної системи (2). Оскільки $\mathcal{T}_m$ — компакт, то Ω — непорожня, інваріантна, компактна підмножина $\mathcal{T}_m$. Крім того, справедливим є таке твердження.

Лема 1 [7]. *Для довільного $\varepsilon > 0$ існують $T(\varepsilon) > 0$, $N(\varepsilon) > 0$ такі, що для будь-якого $\varphi \notin \Omega$ відповідна траєкторія $\varphi_t(\varphi)$ знаходиться лише протягом скінченного проміжку часу, що не перевищує $T(\varepsilon)$, поза ε-околом множини Ω, залишаючи цей окіл не більше $N(\varepsilon)$ разів.*

Основною метою роботи є встановлення достатніх умов експоненціальної стійкості тривіального тора $x = 0$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$ системи (1) у термінах властивостей функції $\varphi \mapsto P(\varphi, 0)$ на множині неблукаючих точок Ω динамічної системи (2), а також застосування отриманих результатів до дослідження стійкості тороїдальних множин імпульсних динамічних систем, породжених задачею (1).

Основний результат. Позначимо $\hat{P}(\varphi, x) = \frac{1}{2}\left(P(\varphi, x) + P^T(\varphi, x)\right)$ для $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda(\varphi, x)$ — найбільше власне число $\hat{P}(\varphi, x)$.

Теорема 1. *Нехай виконується умова*

$$\lambda(\varphi, 0) < 0 \quad \forall\, \varphi \in \Omega. \tag{3}$$

Тоді тривіальний тор системи (1) експоненціально стійкий, тобто існують сталі $K > 0$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$ такі, що для всіх $\varphi \in \mathcal{T}_m$ та $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\left\|x^0\right\| \leq \delta$, справджується нерівність

$$\left\|x\left(t, \varphi, x^0\right)\right\| \leq K\left\|x^0\right\| e^{-\gamma t} \quad \forall\, t \geq 0, \tag{4}$$

де $x\left(t, \varphi, x^0\right)$ — розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi), x)x, \quad x(0) = x^0. \tag{5}$$

Доведення. Внаслідок умови (3) та неперервної залежності коренів многочлена від його коефіцієнтів [9] для деяких $r > 0$, $\gamma > 0$ виконується нерівність

$$\lambda(\varphi, x) < -\gamma \quad \forall\, \varphi \in O_r(\Omega) \quad \forall\, x, \quad \|x\| < r. \tag{6}$$

Для фіксованих $\varphi \in \mathcal{T}_m$ та неперервної функції $x\colon [0,+\infty) \mapsto \mathbb{R}^n$, $\sup_{t\geq 0}\|x(t)\| < r$, розглянемо задачу Коші

$$\frac{dy}{dt} = P(\varphi_t(\varphi), x(t))y, \quad y(0) = x^0. \tag{7}$$

Для її розв'язку $y(t)$ з нерівності Важевського [8] маємо оцінку

$$\|y(t)\| \leq \|x^0\| \exp\left\{ \int\limits_0^t \lambda(\varphi_s(\varphi), x(s))\, ds \right\} \ \forall\, t \geq 0. \tag{8}$$

Якщо φ належить $O_r(\Omega)$ і $\varphi_s(\varphi) \in O_r(\Omega)\ \ \forall\, s \geq 0$, то згідно з (6)

$$\|y(t)\| \leq \left\|x^0\right\| e^{-\gamma t} \quad \forall\, t \geq 0. \tag{9}$$

Якщо φ належить $O_r(\Omega)$, але існує $\tau > 0$ таке, що $\varphi_s(\varphi) \in O_r(\Omega)\ \ \forall\, s \in [0,\tau)$, $\varphi_\tau(\varphi) \notin$ $\notin O_r(\Omega)$, то для $t \in [0,\tau)$ має місце оцінка (9), а для $t \geq \tau$ з (8) одержуємо

$$\|y(t)\| \leq \left\|x^0\right\| e^{-\gamma\tau} \exp\left\{ \int\limits_\tau^t \lambda(\varphi_s(\varphi), x(s))\, ds \right\} =$$

$$= \left\|x^0\right\| e^{-\gamma\tau} \exp\left\{ \int\limits_0^{t-\tau} \lambda(\varphi_s(\varphi_\tau(\varphi), x(s)) ds \right\}. \tag{10}$$

Залишилось розглянути випадок $\varphi \notin O_r(\Omega)$. Згідно з лемою 1 існують $N(\varphi,r) \leq N(r)$, $\{\tau_i(\varphi,r)\}_{i=1}^{N(\varphi,r)+1}$, $\sum_{i=1}^{N(\varphi,r)+1} \tau_i(\varphi,r) =: T(\varphi,r) \leq T(r)$, $\{t_0 = 0, t_i(\varphi,r)\}_{i=1}^{N(\varphi,r)}$ такі, що

$$\varphi_t(\varphi) \in O_r(\Omega)\ \ \forall\, t \in \bigcup_{k=1}^{N(\varphi,r)} \left(\sum_{i=1}^k (\tau_i + t_{i-1}), \sum_{i=1}^k (\tau_i + t_i) \right) \bigcup \left(\sum_{i=1}^{N(\varphi,r)+1} (\tau_i + t_{i-1}), +\infty \right).$$

Покладемо

$$C = \max_{\varphi\in\mathcal{T}_m,\ \|x\|\leq r} |\lambda(\varphi,x)|.$$

Тоді для $1 \leq k \leq N(\varphi,r)$, $t \in \left[\sum_{i=1}^k (\tau_i + t_{i-1}), \sum_{i=1}^k (\tau_i + t_i)\right]$ та для всіх $t \geq \sum_{i=1}^{N(\varphi,r)+1} (\tau_i +$ $+t_{i-1})$ отримуємо

$$\exp\left\{ \int\limits_0^t \lambda(\varphi_s(\varphi), x(s)\, ds \right\} \leq \exp\left\{ (C+\gamma)\sum_{i=1}^k \tau_i \right\} e^{-\gamma t}. \tag{11}$$

З (9)–(11) для довільних $\varphi \in \mathcal{T}_m$ та неперервної функції $x\colon [0,+\infty) \mapsto \mathbb{R}^n$, $\sup_{t\geq 0}\|x(t)\| <$ $< r$, для розв'язку задачі (7) остаточно одержуємо

$$\|y(t)\| \leq K\|x^0\| e^{-\gamma t} \quad \forall\, t \geq 0, \tag{12}$$

де $K = e^{2(C+\gamma)T(r)}$.

Щоб одержати аналогічну оцінку для $x\left(t,\varphi,x^0\right)$, виберемо x^0 так, щоб $\|x^0\| \leq \leq \dfrac{r}{2K}$, і розглянемо послідовність задач (7)

$$\frac{dy_{n+1}}{dt} = P(\varphi_t(\varphi), y_n(t))y_{n+1}, \quad y_{n+1}(0) = x^0, \tag{13}$$

де $n \geq 0$, $y_0(t) \equiv x^0$.

Згідно з (12)

$$\|y_n(t)\| \leq K\left\|x^0\right\|e^{-\gamma t} \leq \frac{r}{2} \quad \forall\, t \geq 0 \quad \forall\, n \geq 1. \tag{14}$$

Тоді для довільного $T > 0$ і всіх $t \in [0,T]$ справджуються оцінки

$$\|y_1(t) - y_0(t)\| \leq Mrt,$$

$$\|y_{n+1}(t) - y_n(t)\| \leq \int\limits_0^t \left(Lr\|y_n(s) - y_{n-1}(s)\| + M\|y_{n+1}(s) - y_n(s)\|\right)ds \quad \forall\, n \geq 1,$$

де додатні сталі M і $L = L(r)$ взято з умов 2, 3. Тепер з нерівності Гронуолла виводимо, що для всіх $n \geq 0$, $t \in [0,T]$

$$\|y_{n+1}(t) - y_n(t)\| \leq Mr\,\frac{(Lr)^n e^{MTn}}{(n+1)!}\,t^{n+1}. \tag{15}$$

Оцінка (15) означає, що

$$y_n \to y \quad \text{в} \quad C\left([0,T];\mathbb{R}^n\right) \quad \forall\, T > 0. \tag{16}$$

Переходячи до границі в (13), внаслідок єдиності розв'язку задачі Коші для (1) одержуємо $y(t) \equiv x\left(t,\varphi,x^0\right)$. Крім того, з (14) виводимо оцінку

$$\left\|x\left(t,\varphi,x^0\right)\right\| \leq K\left\|x^0\right\|e^{-\gamma t} \quad \forall\, t \geq 0, \tag{17}$$

яка справедлива для всіх x^0 з $\left\|x^0\right\| \leq \dfrac{r}{2K}$ та для всіх $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Теорему 1 доведено.

Зауваження 1. Легко бачити, що оцінки (6), (9) – (11) гарантують для довільних $\varphi \in \in \mathcal{T}_m$ виконання нерівності

$$\exp\left\{\int\limits_0^t \delta(\varphi_s(\varphi), r)ds\right\} \leq Ke^{-\gamma t} \quad \forall\, t \geq 0, \tag{18}$$

де

$$\delta(\varphi, r) = \max_{\|x\| \leq r} \lambda(\varphi, x).$$

Як приклад розглянемо на $\mathcal{T}_1 \times \mathbb{R}^2$ систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right), \tag{19}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi + x_1) & \sin\left(\varphi + x_2^2\right) \\ \\ \sin\left(\varphi - x_2^3\right) & -\cos(\varphi + x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Динамічна система на $\mathcal{T}_1$, породжена (19), має множину неблукаючих точок

$$\Omega = \{\varphi = 0\}.$$

Симетрична матриця $P(0, \bar{0}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ має власні числа $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, отже, виконано умову (6) і за теоремою 1 тривіальний тор системи (19), (20) є експоненціально стійким.

Застосування до імпульсної задачі. У фазовому просторі $\mathcal{T}_m \times \mathbb{R}^n$ розглядається імпульсна система диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi, x)x, \tag{21}$$

$$\triangle x|_{\varphi \in \Gamma} = I(\varphi, x)x, \tag{22}$$

де функції a, P задовольняють умови (1) – (4) та (2), I неперервна й обмежена на $\mathcal{T}_m \times \mathbb{R}^n$ та $I(\cdot, x) \in C(\mathcal{T}_m)$ для кожного $x \in \mathbb{R}^n$.

Імпульсна множина Γ задається рівністю

$$\Gamma = \{\varphi \in \mathcal{T}_m \mid \Phi(\varphi) = 0\}, \tag{23}$$

де $\Phi \in C(\mathcal{T}_m)$. Будемо вважати, що для будь-якого $\varphi \in \mathcal{T}_m$ існують $\{t_i(\varphi)\}_{i=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$ — корені рівняння $\Phi(\varphi_t(\varphi)) = 0$, причому

$$\exists\, \theta > 0 \;\; \forall\, \varphi \in \mathcal{T}_m \;\; \forall\, i \geq 1 \colon t_{i+1}(\varphi) - t_i(\varphi) \geq \theta. \tag{24}$$

Покладемо

$$\alpha = \max_{\varphi \in \Gamma} \|E + I(\varphi, 0)\|,$$

де E — одинична матриця.

Теорема 2. *Нехай виконується умова (24) і*

$$\frac{1}{\theta} \ln \alpha + \lambda(\varphi, 0) < 0 \quad \forall\, \varphi \in \Omega. \tag{25}$$

Тоді тривіальний тор системи (21), (22) є експоненціально стійким.

Доведення. Без обмеження загальності будемо вважати, що $\alpha > 1$. Тоді з нерівності (25) та міркувань неперервності отримуємо, що для деяких $r > 0$, $\gamma > 0$ справджується нерівність

$$\frac{1}{\theta}\ln\alpha(r) + \delta(\varphi, r) \le -\gamma \quad \forall\, \varphi \in O_r(\Omega), \tag{26}$$

де

$$\alpha(r) = \max_{\varphi\in\Gamma, \|x\|\le r} \|E + I(\varphi, x)\|, \quad \delta(\varphi, r) = \max_{\|x\|\le r} \lambda(\varphi, x).$$

Вибираючи $\|x^0\| \le \dfrac{r}{2K^2\alpha(r)}$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, для розв'язку $x(t)$ імпульсної задачі (21), (22) з $x(0) = x^0$ на інтервалі $[0, t_1]$ згідно з (17) маємо

$$\|x(t)\| \le \frac{r}{2K\alpha(r)} \le \frac{r}{2}.$$

Отже,

$$\|x(t)\| \le \left\|x^0\right\| \exp\left\{\int\limits_0^t \delta(\varphi_s(\varphi), r)ds\right\} \le K\left\|x^0\right\| e^{-\gamma t} \quad \forall\, t \in [0, t_1],$$

$$\|x(t_1 + 0)\| \le \alpha(r)\|x(t_1)\| \le \frac{r}{2K}.$$

Аналогічно, з (17) на інтервалі $[t_1, t_2]$ отримуємо $\|x(t)\| \le \dfrac{r}{2}$, отже,

$$\|x(t)\| \le \|x(t_1 + 0)\| \exp\left\{\int\limits_{t_1}^t \delta(\varphi_s(\varphi), r)ds\right\} \le$$

$$\le \|x^0\|\alpha(r) \exp\left\{\int\limits_0^t \delta(\varphi_s(\varphi), r)ds\right\} \le$$

$$\le K\alpha(r)\left\|x^0\right\| e^{\left(-\gamma - \frac{1}{\theta}\ln\alpha(r)\right)t},$$

$$\|x(t_2 + 0)\| \le \alpha(r)\|x(t_2)\| \le \frac{r}{2K}\, e^{-\gamma\theta} \quad \forall\, t \in [t_1, t_2].$$

Продовжуючи цей процес, на n-му кроці одержуємо

$$\|x(t_n + 0)\| \le \alpha(r)\|x(t_n)\| \le \frac{r}{2K}\, e^{-(n-1)\gamma\theta},$$

$$\|x(t)\| \le K\alpha(r)\left\|x^0\right\| e^{-\gamma t} \quad \forall\, t \in [t_n, t_{n+1}],$$

що і означає шукану експоненціальну стійкість.

Теорему 2 доведено.

Література

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 288 с.
3. *Перестюк М. О., Фекета П. В.* Інваріантні многовиди одного класу систем диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням // Нелінійні коливання. — 2010. — **13**, № 2. — P. 240–252.
4. *Feketa P., Perestyuk Yu.* Perturbation theorems for a multifrequency system with pulses // J. Math. Sci. — 2016. — **217**, № 4. — P. 515–524.
5. *Перестюк М. М., Перестюк Ю. М.* Про стійкість тороїдального многовиду одного класу динамічних систем // Нелінійні коливання. — 2016. — **19**, № 4. — С. 555–563.
6. *Perestyuk M. O., Kapustyan O. V.* Global attractors of impulsive infinite-dimensional systems // Ukr. Math. J. — 2016. — **68**, № 4. — P. 517–528.
7. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.: Гостехтеориздат, 1947.
8. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
9. *Horn R. A., Johnson C. R.* Matrix analysis. — Cambridge Univ. Press, 2012.

Одержано 27.09.17