УДК 517.988.523

ТЕОРЕМИ ПРО НЕРУХОМУ ТОЧКУ ТА РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ З НЕПОРОЖНЬОЮ МНОЖИНОЮ ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, Україна
e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com

We present new fixed point theorems for maps on a metric space, and give conditions for existence of bounded solutions to difference equations.

Приведены новые теоремы о неподвижной точке отображений, действующих в метрическом пространстве, и условия существования ограниченных решений разностных уравнений.

У даній статті встановлено нові умови існування нерухомих точок відображень, що діють у метричному просторі, та умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь.

1. Дві теореми про нерухому точку та мета статті. Спочатку наведемо потрібні для подальшого позначення й означення.

Нехай $\mathcal{M}$ — метричний простір з метрикою $d(x, y)$.

Відображення $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ називається *стискаючим*, якщо

$$d(Fx, Fy) < d(x, y) \tag{1}$$

для $x, y \in \mathcal{M}$ і $x \neq y$ (це означення запозичено зі статті [1]). Аналогічно, якщо для відображення F справджується нерівність

$$d(Fx, Fy) > d(x, y) \tag{2}$$

для $x, y \in \mathcal{M}$ і $x \neq y$, то це відображення називається *розтягувальним*.

Точка $x^* \in \mathcal{M}$ називається *нерухомою точкою* відображення F, якщо $Fx^* = x^*$.

Позначимо через $\operatorname{Fix} F$ множину всіх нерухомих точок відображення F, а через $B[x_0, r]$ множину $\{x \in \mathcal{M}\colon d(x, x_0) \leq r\}$. Ця множина є замкненою кулею з центром у точці x_0 радіуса r, якщо метричний простір $\mathcal{M}$ повний.

Важливим для встановлення умов існування нерухомих точок відображень є наступне основне в цій статті твердження.

Теорема 1. *Нехай:*

1) існує послідовність $(r_n)_{n\geq 1}$ *невід'ємних чисел, для яких* $r_n \geq r_{n+1}$, $n \geq 1$, *і*

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0;$$

2) існує послідовність $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n \in \mathcal{M}$, *для якої* $B[x_n, r_n] \supset B[x_{n+1}, r_{n+1}]$, $n \geq 1$;

3) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B[x_n, r_n] \neq \varnothing$;

4) відображення F неперервне в точці $x^* \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B[x_n, r_n]$;

5) для деякої послідовності додатних чисел k_n, $n \geq 1$, *для якої* $\lim_{n\to\infty} k_n r_n = 0$, *справджуються співвідношення* $FB[x_n, r_n] \subset B[x_n, k_n r_n]$, $n \geq 1$.

Тоді:

1) $x^* \in \operatorname{Fix} F$;

2) нерухома точка x^* *відображення* F *єдина, якщо додатково це відображення є стискаючим або розтягувальним.*

Зауваження 1. Якщо метричний простір $\mathcal{M}$ повний, то на підставі теореми про вкладені кулі (див., наприклад, [2, с. 60]) третя умова в теоремі 1 є зайвою.

Доведення теореми 1. Із перших двох умов теореми випливає, що послідовність $(x_n)_{n\geq 1}$ є фундаментальною, а з третьої умови та з того, що на підставі першої умови теореми множина $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B[x_n, r_n]$ складається лише з однієї точки x^*, що ця послідовність збігається, до того ж

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*. \tag{3}$$

Розглянемо послідовність $(y_n)_{n\geq 1}$, що визначається співвідношенням

$$y_n = Fx_n, \quad n \geq 1. \tag{4}$$

Завдяки п'ятій умові теореми $d(y_n, x_n) \leq k_n r_n$, $n \geq 1$, і $\lim_{n\to\infty} k_n r_n = 0$. Звідси та з (3) випливає, що послідовність $(y_n)_{n\geq 1}$ є збіжною і

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x^*. \tag{5}$$

Із (3) — (5) і неперервності відображення F у точці x^* отримуємо $x^* = Fx^*$, тобто $x^* \in \operatorname{Fix} F$.

Якщо відображення F є стискаючим, то нерухома точка відображення F єдина. Справді, якщо x^*, $y^* \in \operatorname{Fix} F$ і $x^* \neq y^*$, то завдяки (1)

$$d\left(x^*, y^*\right) = d\left(Fx^*, Fy^*\right) < d\left(x^*, y^*\right),$$

що неможливо. Якщо ж відображення F є розтягувальним, то нерухома точка відображення F також буде єдиною. Справді, якщо $x^*, y^* \in \operatorname{Fix} F$ і $x^* \neq y^*$, то завдяки (2)

$$d\left(x^*, y^*\right) = d\left(Fx^*, Fy^*\right) > d\left(x^*, y^*\right),$$

що також неможливо.

Теорему 1 доведено.

Зауваження 2. У теоремі 1 послідовність $(k_n)_{n\geq 1}$ може бути необмеженою.

Зауваження 3. Нерухома точка відображення F може не бути єдиною, якщо в теоремі 1 не вимагати додатково, щоб це відображення було стискаючим або розтягувальним. Це підтверджується таким прикладом.

Приклад 1. Нехай $\mathbb{Q}$ — множина всіх раціональних чисел. Використаємо метричний простір $\mathcal{M} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ з метрикою $d(x,y) = |x-y|$ і множини $I_n = \left(2^{-n}, 2^{-n+1}\right] \cap \mathbb{Q}$, $n \geq 1$. Очевидно, що

$$\mathcal{M} = \{0\} \cup \left(\bigcup_{n \geq 1} I_n \right)$$

і метричний простір $\mathcal{M}$ не є повним. Визначимо відображення $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ за допомогою співвідношення

$$Fx = \begin{cases} 2^{-n+1}, & \text{якщо } x \in I_n \text{ і } n \geq 1, \\ 0, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Розглянемо послідовності $(r_n)_{n\geq 1}$ і $(x_n)_{n \geq 1}$, де $r_n = x_n = 2^{-n}$, і кулі

$$B[x_n, r_n] = \left[0, 2^{-n+1}\right] \cap \mathbb{Q}, \quad n \geq 1.$$

Очевидно, що всі умови теореми 1 виконуються (п'ята умова виконується при $k_n \equiv 1$) і $x^* = 0$. Тому за цією теоремою точка 0 є нерухомою точкою відображення F.

Легко переконатися, що $\operatorname{Fix} F = \left\{1, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, \ldots\right\} \cup \{0\}$ і відображення F не є елементом множини стискаючих відображень або множини розтягувальних відображень.

Далі ми розглянемо випадок, коли для відображення F не виконуються умови теореми 1, а виконуються ці умови для відображення F^m, де m — натуральне число і $m \neq 1$. У цьому випадку справджується таке твердження.

Теорема 2. *Нехай:*

1) існує послідовність $(r_n)_{n\geq 1}$ невід'ємних чисел, для яких $r_n \geq r_{n+1}$, $n \geq 1$, і

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0;$$

2) існує послідовність $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n \in \mathcal{M}$, для якої $B[x_n, r_n] \supset B[x_{n+1}, r_{n+1}]$, $n \geq 1$;

3) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B[x_n, r_n] \neq \varnothing$;

4) для деякого натурального числа $m > 1$ відображення F^m є неперервним у точці $x^* \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B[x_n, r_n]$;

5) для деякої послідовності додатних чисел k_n, $n \geq 1$, для якої $\lim_{n\to\infty} k_n r_n = 0$, справджуються співвідношення $F^m B[x_n, r_n] \subset B[x_n, k_n r_n]$, $n \geq 1$.

Тоді:

1) $x^* \in \operatorname{Fix} F^m$;

2) точка x^* є єдиною нерухомою точкою відображення F, якщо додатково відображення F^m є стискаючим або розтягувальним відображенням.

Доведення. За теоремою 1 точка x^* є нерухомою точкою для F^m, тобто $F^m x^* = x^*$. Тоді точка Fx^* є нерухомою точкою для F^m, що випливає з рівностей

$$F^m\left(Fx^*\right) = F\left(F^m x^*\right) = Fx^*.$$

Оскільки нерухома точка відображення F^m єдина на підставі теореми 1, то $x^* = Fx^*$. Нерухома точка відображення F є нерухомою точкою відображення F^m і, отже, у відображення F не може бути двох різних нерухомих точок.

Теорему 2 доведено.

Основною метою статті є отримання тверджень про нерухому точку для стискаючих та розтягувальних відображень (за допомогою теореми 1) та умов існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь із розтягувальними коефіцієнтами.

2. k-Стискаючі відображення та узагальнене стискання. Відображення $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ називається *k-стискаючим*, де $k \in [0,1)$ [3], якщо для будь-яких точок $x, y \in \mathcal{M}$ справджується нерівність

$$d(Fx, Fy) \leq k d(x,y). \tag{6}$$

Це відображення називається *узагальненим стисканням* [4, с. 153], якщо

$$d(Fx, Fy) \leq q(\alpha, \beta)\, d(x,y) \quad (\alpha \leq d(x,y) \leq \beta), \tag{7}$$

до того ж при $0 < \alpha \leq \beta < \infty$

$$q(\alpha, \beta) < 1. \tag{8}$$

Очевидно, що k-стискаюче відображення і узагальнене стискання є стискаючими відображеннями.

Наступні два твердження є окремими випадками теореми 1.

Теорема 3 [5, 6]. *Нехай $\mathcal{M}$ — повний метричний простір. Тоді k-стискаюче відображення $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ має єдину нерухому точку x^* і для кожного $x_0 \in \mathcal{M}$ послідовність $(F^n x_0)_{n\geq 0}$ збігається до x^*.*

Теорема 4 [4]. *Нехай відображення $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ повного метричного простору $\mathcal{M}$ є узагальненим стисканням. Тоді F має єдину нерухому точку x^* і для кожного $x_0 \in \mathcal{M}$ послідовність $(F^n x_0)_{n\geq 0}$ збігається до x^*.*

Теорема 3 випливає з теореми 4, оскільки якщо виконується співвідношення (6), то виконуються співвідношення (7) і (8) при $q(\alpha, \beta) = k$.

Покажемо, що теорема 4 випливає з теореми 1.

Зафіксуємо довільну точку $x_0 \in \mathcal{M}$. Розглянемо послідовність $(F^n x_0)_{n\geq 0}$ точок простору $\mathcal{M}$ і числову послідовність $(\alpha_n)_{n\geq 1}$, де $\alpha_n = d\left(F^n x_0, F^{n-1} x_0\right)$. Завдяки (7) і (8)

$$\alpha_n \geq \alpha_{n+1}, \quad n \geq 0. \tag{9}$$

Тому послідовність $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ збігається до деякого числа $\alpha^* \geq 0$.

Випадок $\alpha^* > 0$ неможливий, оскільки на підставі (7)

$$0 < \alpha_{n+1} \leq q\left(\alpha^*, \alpha_0\right) \alpha_n, \quad n \geq 0,$$

і, отже,

$$0 \leq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \leq q\left(\alpha^*, \alpha_0\right) < 1.$$

Тоді за ознакою Д'Аламбера [7] числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$, збігається і тому нерівність $\alpha^* > 0$ неможлива. Отже, $\alpha^* = 0$.

Покажемо, що послідовність $(F^n x_0)_{n\geq 0}$ обмежена.

Зафіксуємо довільне число $R > 2d(Fx_0, x_0)$ і розглянемо натуральне число n_0, для якого

$$d\left(Fx_{n_0}, x_{n_0}\right) \leq d(Fx_0, x_0)(1 - q(d(Fx_0, x_0), R)) \tag{10}$$

(таке число існує, оскільки $\alpha^* = 0$). Ми вважаємо, що $Fx_0 \neq x_0$ (якщо $Fx_0 = x_0$, то $F^n x_0 = x_0$ для всіх $n \geq 0$). Тоді

$$0 \leq q(d(Fx_0, x_0), R) < 1.$$

Покажемо, що куля $B\left[x_{n_0}, R\right]$ інваріантна по відношенню до відображення F.

Розглянемо довільну точку $x \in B\left[x_{n_0}, R\right]$. Очевидно, що

$$d(Fx, x_{n_0}) \leq d(Fx, Fx_{n_0}) + d(Fx_{n_0}, x_{n_0}). \tag{11}$$

Якщо $d(x, x_0) < d(Fx_0, x_0)$, то завдяки (7) – (9)

$$d(Fx, Fx_{n_0}) + d(Fx_{n_0}, x_{n_0}) < d(x, x_{n_0}) + d(Fx_0, x_0) < 2d(Fx_0, x_0) < R.$$

Якщо $d(Fx_0, x_0) \leq d(x, x_0) \leq R$, то завдяки (7), (8), (10) та тому, що $R > 2d(Fx_0, x_0)$,

$$\begin{aligned} d(Fx, Fx_{n_0}) + d(Fx_{n_0}, x_{n_0}) \leq q(d(Fx_0, x_0), R)d(x, x_{n_0}) + \\ + d(Fx_0, x_0)(1 - q(d(Fx_0, x_0), R)) < \\ < q(d(Fx_0, x_0), R)R + \frac{R}{2}\left(1 - q(d(Fx_0, x_0), R)\right) < R. \end{aligned}$$

Тому на підставі (11)

$$FB[x_{n_0}, R] \subset B[x_{n_0}, R].$$

Звідси випливає обмеженість послідовності $\left(F^n x_0\right)_{n \geq 0}$. Отже, для деякого числа $K > 0$

$$\sup_{n \geq 1} d\left(F^n x_0, x_0\right) \leq K.$$

Припустимо, що послідовність $\left(F^n x_0\right)_{n \geq 0}$ не є фундаментальною, тобто для деякого додатного числа γ існують строго зростаючі послідовності $(k_p)_{p \geq 1}$ і $(m_p)_{p \geq 1}$ натуральних чисел, для яких

$$d(x_{k_p}, x_{m_p}) \geq \gamma, \quad p \geq 1, \tag{12}$$

і

$$k_p > m_p, \quad p \geq 1.$$

Очевидно, що завдяки (7)

$$\begin{aligned} d(x_{k_p}, x_{m_p}) \leq q(\gamma, K)d(x_{k_p - 1}, x_{m_p - 1}) \leq q^2(\gamma, K)d(x_{k_p - 2}, x_{m_p - 2}) \leq \ldots \\ \ldots \leq q^{m_p - n_0}(\gamma, K)d(x_{k_p - (m_p - n_0)}, x_{n_0}) \leq Kq^{m_p - n_0}(\gamma, K), \end{aligned}$$

якщо $m_p > n_0$. Ми приходимо до суперечності, оскільки нерівність

$$\gamma \leq K q^{m_p - n_0}(\gamma, K)$$

неможлива при достатньо великому p.

Отже, припущення, що виконується співвідношення (12), хибне і послідовність $(F^n x_0)_{n \geq 0}$ є фундаментальною. Тоді на підставі повноти метричного простору $\mathcal{M}$ ця послідовність збігається до деякої точки $\xi \in \mathcal{M}$.

Існує така підпослідовність $(y_{m_n})_{n \geq 1}$ послідовності $(F^n x_0)_{n \geq 1}$, що

$$\lim_{n \to \infty} d(y_{m_n}, \xi) = 0$$

і

$$d\left(y_{m_n}, \xi\right) \geq d(y_{m_{n+1}}, \xi), \quad n \geq 1.$$

Розглянемо послідовності $(x_n)_{n \geq 1}$ і $(r_n)_{n \geq 1}$, що визначаються рівностями

$$x_n = \xi, \quad n \geq 1,$$

$$r_n = d(y_{m_n}, \xi), \quad n \geq 1.$$

На підставі умов теореми для цих послідовностей виконуються перші дві умови теореми 1. Також виконується третя умова теореми 1, оскільки $\xi = x_n$ для всіх $n \geq 1$. Четверта умова теореми 1 виконується, оскільки внаслідок (7) відображення F є неперервним у точці ξ. Нарешті, п'ята умова теореми 1 також виконується, якщо

$$k_n = \begin{cases} \dfrac{d(Fy_{m_n}, y_{m_n}) + 4r_n}{r_n}, & \text{якщо} \quad r_n \neq 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad r_n = 0, \end{cases} \qquad n \geq 1,$$

оскільки відображення F стискаюче. Зазначимо, що $\lim_{n \to \infty} k_n r_n = 0$, оскільки $\alpha^* = 0$ і $\lim_{n \to \infty} r_n = 0$.

Отже, якщо виконуються умови теореми 4, то виконуються умови теореми 1. Тому за цією теоремою ξ — єдина точка множини $\operatorname{Fix} F$ і, отже, послідовність $(F^n x_0)_{n \geq 1}$ для кожної точки $x_0 \in \mathcal{M}$ збігається до ξ.

Таким чином, теорема 4 є окремим випадком теореми 1.

3. Теорема про нерухому точку для *k*-розтягувального відображення з обмеженим коефіцієнтом розтягування. Відображення $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ будемо називати *k-розтягувальним*, де $k \in (1, +\infty)$, якщо для будь-яких точок $x, y \in \mathcal{M}$ справджується нерівність

$$d(Fx, Fy) \geq k\, d(x, y).$$

Позначимо через $R(F^n)$, де $n \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел), множину значень відображення $F^n\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, тобто множину $\{F^n x\colon x \in \mathcal{M}\}$, і розглянемо множину

$$\mathcal{M}_F = \bigcap_{n=1}^{\infty} R\left(F^n\right).$$

Очевидно, що для існування нерухомих точок відображення F необхідно, щоб $\mathcal{M}_F \neq \neq \varnothing$.

Справджується таке твердження.

Теорема 5. *Нехай:*

1) $\mathcal{M}$ — повний метричний простір;

2) для відображення $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ існують числа $k > 1$ і $c \geq k$, для яких

$$c\, d(x,y) \geq d(Fx,Fy) \geq k\, d(x,y) \tag{13}$$

для всіх $x, y \in \mathcal{M}$;

3) $\mathcal{M}_F \neq \varnothing$.

Тоді відображення F має єдину нерухому точку $x^* \in \mathcal{M}_F$ і для кожного $x_0 \in \mathcal{M}_F$ послідовність $(x_n)_{n\geq 1}$, для якої $Fx_n = x_{n-1}$, $n \geq 1$, збігається до x^*.

Доведення. Спочатку покажемо, що множина $R(F)$ є замкненою.

Розглянемо довільну фундаментальну послідовність $(y_n)_{n\geq 1}$ елементів множини $R(F)$, тобто послідовність, для якої $\lim_{n,m\to\infty} d(y_n, y_m) = 0$. Використаємо послідовність $(x_n)_{n\geq 1}$ елементів простору $\mathcal{M}$, для якої $Fx_n = y_n$, $n \geq 1$. Оскільки виконується співвідношення (13), то $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$, тобто послідовність $(x_n)_{n\geq 1}$ є фундаментальною. Тому на підставі повноти простору $\mathcal{M}$ існує елемент $x_0 \in \mathcal{M}$, для якого $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тоді внаслідок неперервності відображення F, що випливає з (13), $\lim_{n\to\infty} Fx_n = Fx_0$, тобто $\lim_{n\to\infty} y_n = Fx_0$.

Отже, множина $R(F)$ є замкненою.

Завдяки неперервності відображень F^n, $n \in \mathbb{N}$, множини $R\left(F^n\right)$, $n \in \mathbb{N}$, також замкнені. Тому непорожня множина $\mathcal{M}_F$ є замкненою як перетин замкнених множин [2, с. 52].

Далі використаємо повний метричний простір $\mathcal{M}_F$ з метрикою d, що і в просторі $\mathcal{M}$.

Очевидно, що простір $\mathcal{M}_F$ інваріантний по відношенню до F. Розглянемо звуження $F|_{\mathcal{M}_F}$ відображення F на $\mathcal{M}_F$. Завдяки (13) відображення $F|_{\mathcal{M}_F}\colon \mathcal{M}_F \to \mathcal{M}_F$ ін'єктивне. Тому це відображення має обернене відображення $\left(F|_{\mathcal{M}_F}\right)^{-1}\colon \mathcal{M}_F \to \mathcal{M}_F$. На підставі (13) для $\left(F|_{\mathcal{M}_F}\right)^{-1}$ справджується співвідношення

$$\frac{1}{c}\, d(x,y) \leq d\left(\left(F|_{\mathcal{M}_F}\right)^{-1} x, \left(F|_{\mathcal{M}_F}\right)^{-1} y\right) \leq \frac{1}{k}\, d(x,y) \tag{14}$$

для всіх $x, y \in \mathcal{M}_F$.

Отже, завдяки (14) та повноті простору $\mathcal{M}_F$ відображення $F|_{\mathcal{M}_F}\colon \mathcal{M}_F \to \mathcal{M}_F$ є $\frac{1}{k}$-стискаючим відображенням. Тому за теоремою 3 відображення $F|_{\mathcal{M}_F}$ має нерухому точку $x^* \in \mathcal{M}_F$, яка, очевидно, є нерухомою точкою для F. Згідно з теоремою 3 послідовність $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \left(F|_{\mathcal{M}_F}\right)^{-n} x_0$, для якої, очевидно, $Fx_n = x_{n-1}$, $n \geq 1$, збігається до x^* для кожного $x_0 \in \mathcal{M}$. Оскільки теорема 3 є окремим випадком теореми 1, то за теоремою 1 інших нерухомих точок відображення F немає.

Теорему 5 доведено.

Наслідком теорем 2 і 5 є таке твердження.

Теорема 6. *Нехай:*

1) $\mathcal{M}$ — повний метричний простір;

2) для деяких натурального числа $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ і чисел c та k, для яких $c \geq k > 1$, справджуються співвідношення

$$c\,d(x,y) \geq d\,(F^m x, F^m y) \geq k\,d(x,y)$$

для всіх $x, y \in \mathcal{M}$;

3) $\mathcal{M}_{F^m} \neq \varnothing$.

Тоді відображення F *має єдину нерухому точку* $x^* \in \mathcal{M}_{F^m}$ *і для кожного* $x_0 \in \mathcal{M}_{F^m}$ *послідовність* $(x_n)_{n\geq 1}$, *для якої* $F^m x_n = x_{n-1}$, $n \geq 1$, *збігається до* x^*.

Зауваження 4. Множина відображень, для яких не виконуються умови теореми 5 і виконуються умови теореми 6, є непорожньою, що підтверджується таким прикладом.

Приклад 2. В якості повного метричного простору $\mathcal{M}$ використаємо множину всіх дійсних чисел із метрикою $d(x,y) = |x-y|$. Розглянемо неперервну функцію $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, що визначається рівністю

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2, & \text{якщо} \quad x < 0, \\ x+2, & \text{якщо} \quad 0 \leq x < 1, \\ 2x+1, & \text{якщо} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Визначимо відображення $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ і $F^2\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ за допомогою рівностей

$$Fx = f(x) \quad \text{і} \quad F^2 x = f(f(x)), \quad x \in \mathcal{M}.$$

Відображення F не є розтягувальним, оскільки $|Fx - Fy| = |x-y|$, якщо $x, y \in [0,1]$. Тому це відображення не задовольняє умови теореми 5.

Легко перевірити, що

$$f(f(x)) = \begin{cases} 4x+6, & \text{якщо} \quad x < -1, \\ 2x+4, & \text{якщо} \quad -1 \leq x < -\dfrac{1}{2}, \\ 4x+5, & \text{якщо} \quad -\dfrac{1}{2} \leq x < 0, \\ 2x+5, & \text{якщо} \quad 0 \leq x < 1, \\ 4x+3, & \text{якщо} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Звідси випливає, що відображення F^2 є сюр'єктивним і для всіх $x, y \in \mathcal{M}$

$$4|x-y| \geq \left|F^2 x - F^2 y\right| \geq 2|x-y|.$$

Тому відображення F^m при $m = 2$ задовольняє умови теореми 6.

Легко перевірити, що $\operatorname{Fix} F = \{-2\}$.

4. Застосування теореми 5 до теорії різницевих рівнянь. Наведемо умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь із розтягувальними коефіцієнтами.

Використаємо наступні позначення. Нехай E — довільний банаховий простір із нормою $\|\cdot\|_E$, $\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел і $\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел. Позначимо через C^0 банаховий простір усіх неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ з нормою $\|x\|_{C^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_E$, а через $\mathfrak{M}$ банаховий простір усіх обмежених двосторонніх послідовностей $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ векторів $x_n \in E$, $n \in \mathbb{Z}$, з нормою $\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|_E$.

Очевидно, що банахові простори C^0 і $\mathfrak{M}$ є повними метричними просторами з метриками $d(x,y) = \|x-y\|_{C^0}$ і $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}}$ відповідно.

4.1. Різницеві рівняння з неперервним аргументом. Розглянемо різницеве рівняння

$$x(t) = f(x(t-1)) + h(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

де $f\colon E \to E$ — неперервне відображення і $h \in C^0$.

Справджується таке твердження.

Теорема 7. *Нехай:*

1) виконуються співвідношення

$$c\|x-y\|_E \geq \|f(x)-f(y)\|_E \geq k\|x-y\|_E, \quad x,y \in E, \tag{16}$$

де c і k — додатні числа, для яких $c \geq k > 1$;

2) відображення $f\colon E \to E$ є сюр'єктивним.

Тоді для кожної функції $h \in C^0$ рівняння (15) має єдиний розв'язок $x \in C^0$.

Доведення. Кожному $h \in C^0$ поставимо у відповідність відображення $F_h\colon C^0 \to C^0$ за допомогою співвідношення

$$(F_h y)(t) = f(y(t-1)) + h(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

де $y \in C^0$. Тоді рівняння (15) можна записати у вигляді

$$x(t) = (F_h x)(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Оператор F_h задовольняє другу умову теореми 5, оскільки завдяки (16) виконуються співвідношення

$$c\|x-y\|_{C^0} = c\sup_{t\in\mathbb{R}}\|x(t)-y(t)\|_E \geq \sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(x(t))-f(y(t))\|_E =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}}\|(f(x(t-1))+h(t))-(f(y(t-1))+h(t))\|_E = \|F_h x - F_h y\|_{C^0}$$

і

$$\|F_h x - F_h y\|_{C^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}}\|(f(x(t-1))+h(t))-(f(y(t-1))+h(t))\|_E =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(x(t))-f(y(t))\|_E \geq k\sup_{t\in\mathbb{R}}\|x(t)-y(t)\|_E = k\|x-y\|_{C^0}.$$

Покажемо, що відображення F_h є сюр'єктивним і, отже, задовольняє третю умову теореми 5. Зафіксуємо довільні елемент $z = z(t)$ простору C^0 і число $t \in \mathbb{R}$. Розглянемо рівняння

$$f(x(t-1)) + h(t) = z(t).$$

Запишемо це рівняння у вигляді

$$f(x(t-1)) - f(0) = z(t) - h(t) - f(0). \tag{17}$$

Оскільки відображення f сюр'єктивне, то для кожного фіксованого $t \in \mathbb{R}$ рівняння (17) має розв'язок $x(t-1) \in E$, для якого на підставі (16) і (17)

$$\|z(t)\|_E + \|h(t)\|_E + \|f(0)\|_E \geq \|f(x(t-1)) - f(0)\|_E \geq k\|x(t-1)\|_E.$$

Отже,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t-1)\|_E \leq \|z\|_{C^0} + \|h\|_{C^0} + \|f(0)\|_E. \tag{18}$$

Завдяки (16) та (17) для довільних $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$$k\|x(t_1-1) - x(t_2-1)\|_E \leq \|f(x(t_1-1)) - f(x(t_2-1))\|_E =$$
$$= \|z(t_1) - h(t_1) - (z(t_2) - h(t_2))\|_E \leq$$
$$\leq \|z(t_1) - z(t_2)\|_E + \|h(t_1) - h(t_2)\|_E.$$

Звідси та з неперервності на $\mathbb{R}$ функцій z і h випливає, що функція x є неперервною на $\mathbb{R}$. Тому завдяки (18) функція $x = x(t)$ є елементом простору C^0.

Отже, відображення F_h для кожного $h \in C^0$ є сюр'єктивним.

Враховуючи також повноту простору C^0, на підставі теореми 5 приходимо до висновку, що відображення F_h для кожного $h \in C^0$ має єдину нерухому точку $x^* \in C^0$, тобто для кожного $h \in C^0$ рівняння (15) має єдиний розв'язок $x \in C^0$.

Теорему 7 доведено.

4.2. Різницеві рівняння з дискретним аргументом. Розглянемо різницеве рівняння

$$x_n = f_n(x_{n-1}) + h_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{19}$$

де $f_n \colon E \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, — неперервні відображення і $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$.

Теорема 8. *Нехай:*

1) існують числа c і k, для яких $c \geq k > 1$ і виконуються співвідношення

$$c\|x - y\|_E \geq \|f_n(x) - f_n(y)\|_E \geq k\|x - y\|_E \tag{20}$$

для всіх $x, y \in E$ і $n \in \mathbb{Z}$;

2) відображення f_n, $n \in \mathbb{Z}$, є сюр'єктивними.

Тоді для кожної послідовності $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$ рівняння (19) має єдиний розв'язок $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$.

Доведення. Кожному $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$ поставимо у відповідність відображення $F_{\mathbf{h}} \colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, що визначається рівністю

$$(F_{\mathbf{h}}\mathbf{y})_n = f_n(y_{n-1}) + h_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

де $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$. Тоді рівняння (19) можна записати у вигляді

$$x_n = (F_{\mathbf{h}}\mathbf{x})_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Оператор $F_{\mathbf{h}}$ задовольняє другу умову теореми 5, оскільки завдяки (20) виконуються співвідношення

$$c\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}} = c\sup_{n\in\mathbb{Z}}\|x_n-y_n\|_E = c\sup_{n\in\mathbb{Z}}\|x_{n-1}-y_{n-1}\|_E \geq$$

$$\geq \sup_{n\in\mathbb{Z}}\|f_n(x_{n-1})-f_n(y_{n-1})\|_E =$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{Z}}\|(f_n(x_{n-1})+h_n)-(f_n(y_{n-1})+h_n)\|_E = \|F_{\mathbf{h}}\mathbf{x}-F_{\mathbf{h}}\mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}}$$

і

$$\|F_{\mathbf{h}}\mathbf{x}-F_{\mathbf{h}}\mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{n\in\mathbb{Z}}\|(f_n(x_{n-1})+h_n)-(f_n(y_{n-1})+h_n)\|_E =$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{Z}}\|f_n(x_{n-1})-f_n(y_{n-1})\|_E \geq$$

$$\geq k\sup_{n\in\mathbb{Z}}\|x_{n-1}-y_{n-1}\|_E = k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}}.$$

Покажемо, що відображення $F_{\mathbf{h}}$ є сюр'єктивним і, отже, задовольняє третю умову теореми 5. Зафіксуємо довільні елемент $\mathbf{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ простору $\mathfrak{M}$ і число $n \in \mathbb{Z}$. Розглянемо рівняння

$$f_n(x_{n-1}) + h_n = z_n.$$

Запишемо це рівняння у вигляді

$$f_n(x_{n-1}) - f(0) = z_n - h_n - f(0). \tag{21}$$

Оскільки відображення f_n, $n \in \mathbb{Z}$, сюр'єктивні, то для кожного $n \in \mathbb{Z}$ рівняння (21) має розв'язок $x_{n-1} \in E$, для якого на підставі (20) і (21)

$$\|z_n\|_E + \|h_n\|_E + \|f(0)\|_E \geq \|f_n(x_{n-1}) - f(0)\|_E \geq k\|x_{n-1}\|_E.$$

Отже,

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}\|x_{n-1}\|_E \leq \|z\|_{\mathfrak{M}} + \|h\|_{\mathfrak{M}} + \|f(0)\|_E.$$

Звідси випливає, що $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$.

Отже, відображення $F_{\mathbf{h}}$ для кожного $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$ є сюр'єктивним.

Враховуючи також повноту простору $\mathfrak{M}$, на підставі теореми 5 приходимо до висновку, що відображення $F_{\mathbf{h}}$ для кожного $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$ має єдину нерухому точку $x^* \in \mathfrak{M}$, тобто для кожного $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$ рівняння (19) має єдиний розв'язок $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$.

Теорему 8 доведено.

Зауважимо, що інші умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь можна знайти, наприклад, у [8–14].

Література

1. *Edelstein M.* On fixed and periodic points under contractive mappings // J. London Math. Soc. — 1962. — **37**. — P. 74 – 79.
2. *Колмогоров А. М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. — Київ: Вища шк., 1974. — 456 с.
3. *Zeidler E.* Nonlinear functional analysis and its applications, 1. Fixed-point theorems. — New York etc.: Springer-Verlag, 1986. — 921 p.
4. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания. — М.: Наука, 1970. — 352 с.
5. *Banach S.* Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales // Fund. Math. — 1922. — **3**. — P. 133 – 181.
6. *Антоневич А. Б., Радыно Я. В.* Функциональный анализ и интегральные уравнения. — Минск: Университетское, 1984. — 352 с.
7. *Слюсарчук В. Ю.* Загальні теореми про збіжність числових рядів. — Рівне: Вид-во Рівнен. держ. техн. ун-ту, 2001. — 240 с.
8. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия липшицевой обратимости нелинейных разностных операторов в пространствах $l_p(\mathbb{Z},\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$ // Мат. заметки. — 2000. — **68**, № 3. — С. 448 – 454.
9. *Слюсарчук В. Ю.* Оборотність нелінійних різницевих операторів. — Рівне: Вид-во Нац. ун-ту вод. госп-ва та природокористування, 2006. — 233 с.
10. *Слюсарчук В. Ю.* Умови оборотності нелінійного різницевого оператора $(\mathcal{D}x)(n) = x(n+1) - f(x(n))$ у просторі $l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, № 2. — С. 244 – 263.
11. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 3. — С. 368 – 378.
12. *Слюсарчук В. Ю.* Експоненціально дихотомічні різницеві рівняння з неліпшицевими збуреннями // Нелінійні коливання. — 2011. — **14**, № 4. — С. 536 – 555.
13. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локального лінійного наближення нелінійних різницевих операторів слабко регулярними операторами // Нелінійні коливання. — 2012. — **15**, № 1. — С. 122 – 126.
14. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні та періодичні розв'язки різницевих рівнянь у метричному просторі // Нелінійні коливання. — 2015. — **18**, № 1. — С. 112 – 119.

Одержано 02.02.16,
після доопрацювання — 16.07.17