УДК 517.925

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДВУЧЛЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С БЫСТРО МЕНЯЮЩЕЙСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В. М. Евтухов, А. Г. Черникова

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова
ул. Дворянская, 2, Одесса, 65026, Украина
e-mail: emden@farlep.net
evmod@i.ua
anastacia.chernikova@gmail.com

We find new conditions for existence of slowly varying solutions of a two-term nonautonomous second order differential equation with rapidly changing nonlinearity. For such solutions and their first order derivatives, we also find asymptotic representations as $t \uparrow \omega$ $\omega \le +\infty$.

Встановлено умови існування повільно змінних розв'язків двочленного неавтономного диференціального рівняння другого порядку з швидко змінною нелінійністю, а також нові асимптотичні при $t \uparrow \omega$ $(\omega \le +\infty)$ зображення для таких розв'язків та їх похідних першого порядку.

1. Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1.1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, $\varphi\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, такая, что

$$\varphi'(y) \ne 0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}, \qquad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & +\infty, \end{cases} \qquad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi(y)\varphi''(y)}{\varphi'^2(y)} = 1, \tag{1.2}$$

Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_0} — некоторая односторонняя окрестность Y_0. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$\Delta_{Y_0} = \begin{cases} [y_0, Y_0[, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} \text{ — левая окрестность } \quad Y_0, \\ ]Y_0, y_0], & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} \text{ — правая окрестность } \quad Y_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

где $y_0 \in \mathbb{R}$ таково, что $|y_0| < 1$ при $Y_0 = 0$ и $y_0 > 1$ $(y_0 < -1)$ при $Y_0 = +\infty$ (при $Y_0 = -\infty$).

В силу условий (1.2)

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \pm\infty, \tag{1.4}$$

и поэтому функция φ является (см., например, [1, с. 91, 92], гл. 3, § 3.4, леммы 3.2, 3.3) быстро меняющейся при $y \to Y_0$.

Определение 1.1. *Решение y дифференциального уравнения (1.1) называется $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решением, где $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0, \omega[\subset \subset [a, \omega[$ и удовлетворяет следующим условиям:*

$$y(t) \in \Delta_{Y_0} \quad \textit{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \begin{cases} \textit{либо} & 0, \\ \textit{либо} & \pm\infty, \end{cases}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

В работе [2] были получены необходимые и достаточные условия существования $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений дифференциального уравнения (1.1) при $\lambda_0 = 0$, а также асимптотические при $t \uparrow \omega$ представления для таких решений и их производных первого порядка. Из определения 1.1 в случае $\lambda_0 = 0$ следует (см. [2]), что для таких решений

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = 0, \quad \text{где} \quad \pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases} \tag{1.5}$$

и поэтому они являются медленно меняющимися функциями при $t \uparrow \omega$.

Последняя из четырех установленных в работе [2] теорем содержит одно достаточно жесткое ограничение. Ниже будет предпринята попытка при некоторых естественных ограничениях на коэффициент p снять это ограничение.

2. Основные результаты. Положим

$$\mu_0 = \operatorname{sign} \varphi'(y), \quad \nu_0 = \operatorname{sign} y_0, \quad \nu_1 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} = [y_0, Y_0[, \\ -1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} =]Y_0, y_0], \end{cases}$$

и введем функцию

$$\Phi(y) = \int_B^y \frac{ds}{\varphi(s)}, \quad \text{где} \quad B = \begin{cases} Y_0, & \text{если} \quad \displaystyle\int_{y_0}^{Y_0} \frac{ds}{\varphi(s)} = \text{const}, \\[2ex] y_0, & \text{если} \quad \displaystyle\int_{y_0}^{Y_0} \frac{ds}{\varphi(s)} = \pm\infty. \end{cases}$$

Учитывая определение $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решения дифференциального уравнения (1.1), следует заметить, что числа ν_0, ν_1 и α_0 определяют знаки любого $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решения, его первой и второй производных (соответственно) в некоторой левой окрестности ω. При этом условия

$$\nu_0\nu_1 < 0, \quad \text{если} \quad Y_0 = 0, \quad \nu_0\nu_1 > 0, \quad \text{если} \quad Y_0 = \pm\infty, \tag{2.1}$$

и

$$\nu_1\alpha_0 < 0, \quad \text{если} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = 0, \quad \nu_1\alpha_0 > 0, \quad \text{если} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \pm\infty, \tag{2.2}$$

являются необходимыми для существования таких решений.

Теперь отметим некоторые свойства функции Φ. Она сохраняет знак на промежутке Δ_{y_0}, стремится либо к нулю, либо к $\pm\infty$ при $y \to Y_0$ и является возрастающей на Δ_{Y_0}, поскольку на этом промежутке $\Phi'(y) = \dfrac{1}{\varphi(y)} > 0$. Поэтому для нее существует обратная функция $\Phi^{-1}\colon \Delta_{Z_0} \longrightarrow \Delta_{Y_0}$, причем в силу второго из условий (1.2) и монотонного возрастания Φ^{-1}

$$Z_0 = \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \Phi(y) = \begin{cases} \text{либо} & 0,\\ \text{либо} & +\infty,\end{cases}$$
$$\Delta_{Z_0} = \begin{cases} [z_0, Z_0[, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} = [y_0, Y_0[,\\ ]Z_0, z_0], & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} =]Y_0, y_0],\end{cases} \qquad z_0 = \Phi(y_0). \tag{2.3}$$

В [2] было также показано, что

$$\Phi(y) \sim -\frac{1}{\varphi'(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0 \quad \text{и} \quad \operatorname{sign}\Phi(y) = -\mu_0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}. \tag{2.4}$$

Кроме того, в силу первого из этих соотношений и (2.3) имеем

$$\frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)} \sim -\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}, \quad \frac{\Phi''(y)\Phi(y)}{\Phi'^2(y)} \sim 1 \quad \text{при} \quad y \to Y_0, \tag{2.5}$$

$$\lim_{z\to Z_0} \frac{z\left(\varphi\left(\Phi^{-1}(z)\right)\right)'}{\varphi(\Phi(z))} = -1, \quad \lim_{z\to Z_0} \frac{z\left(\varphi'\left(\Phi^{-1}(z)\right)\right)'}{\varphi'(\Phi(z))} = -1. \tag{2.6}$$

Из (2.6), в частности, следует, что функции $\varphi(\Phi^{-1}(z))$ и $\varphi'(\Phi^{-1}(z))$ являются (см. [3, с. 15], гл. 1, п. 1.2) правильно меняющимися функциями порядка -1 при $z \to Z_0$.

Далее, введем интегралы

$$J(t) = \int\limits_A^t \pi_\omega(\tau)p(\tau)\,d\tau, \quad J_\varphi(t) = \int\limits_{A_\varphi}^t p(\tau)\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(\tau))\right)\,d\tau,$$

где π_ω определена в (1.5),

$$A = \begin{cases} \omega, & \text{если} \quad \displaystyle\int_a^\omega \pi_\omega(\tau)p(\tau)\,d\tau = \text{const},\\[2ex] a, & \text{если} \quad \displaystyle\int_a^\omega \pi_\omega(\tau)p(\tau)\,d\tau = \pm\infty,\end{cases}$$

$$A_\varphi = \begin{cases} t_\varphi, & \text{если} \quad \displaystyle\int_{t_\varphi}^\omega p(\tau)\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(\tau))\right)\,d\tau = +\infty,\\[2ex] \omega, & \text{если} \quad \displaystyle\int_{t_\varphi}^\omega p(\tau)\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(\tau))\right)\,d\tau < +\infty,\end{cases} \qquad t_\varphi \in [a, \omega[.$$

Для ясности дальнейшего изложения приведем сначала три из четырех, установленных в работе [2], теорем.

Теорема 2.1. *Для существования $P_\omega(Y_0, 0)$-решений дифференциального уравнения (1.1), для которых существует конечный или равный $\pm\infty$ предел $\lim_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$, необходимо, чтобы выполнялися условия*

$$\alpha_0\nu_1\pi_\omega(t) < 0, \quad \alpha_0\mu_0 J(t) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a, \omega[, \tag{2.7}$$

$$-\alpha_0 \lim_{t\uparrow\omega} J(t) = Z_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J'_\varphi(t)}{J_\varphi(t)} = -1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega^2(t)p(t)\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}{\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))} = 0. \tag{2.8}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$y(t) = \Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t)) + \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)} o(1) \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{2.9}$$

$$y'(t) = -\alpha_0\pi_\omega(t)p(t)\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)[1 + o(1)] \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.10}$$

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия (2.7), (2.8) и*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J'(t)}{J(t)} = \gamma, \quad \textit{где} \quad 0 < |\gamma| < +\infty. \tag{2.11}$$

Тогда: 1) если $\gamma > 0$, то уравнение (1.1) имеет однопараметрическое семейство $P_\omega(Y_0, 0)$-решений, допускающих при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.9), (2.10); 2) если $\gamma < 0$, то при $\omega < +\infty$ уравнение (1.1) имеет двупараметрическое семейство $P_\omega(Y_0, 0)$-решений, допускающих при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.9), (2.10), а при $\omega = +\infty$ — по крайней мере одно такое решение.

Теорема 2.3. *Пусть выполняются условия (2.7), (2.8) и*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J'(t)}{J(t)} = 0. \tag{2.12}$$

Тогда: 1) если $\alpha_0\mu_0 > 0$, то уравнение (1.1) имеет однопараметрическое семейство $P_\omega(Y_0, 0)$-решений, допускающих при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.9), (2.10); 2) если $\alpha_0\mu_0 < 0$, то при $\omega < +\infty$ уравнение (1.1) имеет двупараметрическое семейство $P_\omega(Y_0, 0)$- решений, допускающих при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.9), (2.10), а при $\omega = +\infty$ — по крайней мере одно такое решение.

Замечание 2.1. Третье из необходимых условий (2.8) существования $P_\omega(Y_0, 0)$-решений из теоремы 2.1 в соответствующей теореме 3.1 из работы [2] отсутствует (так как в дальнейшем оно не использовалось). Его справедливость непосредственно следует из того, что в случае существования $P_\omega(Y_0, 0)$-решения уравнения (1.1), для которого существует конечный или равный $\pm\infty$ предел $\lim_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$, этот предел может быть равен только -1, поэтому имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega^2(t)y''(t)}{y(t)} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = 0(-1) = 0.$$

В силу этого предела и асимптотических соотношений

$$y(t) \sim \Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t)), \quad y''(t) \sim \alpha_0 p(t)\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

которые вытекают из (2.9) и (2.6), непосредственно следует справедливость третьего из условий (2.8).

Четвертая из теорем работы [2], относящаяся к случаю, когда

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J'(t)}{J(t)} = \pm\infty, \tag{2.13}$$

как уже было отмечено ранее, содержит одно достаточно жесткое ограничение. Вместо нее ниже установим при достаточно естественных ограничениях на коэффициент p уравнения (1.1) новое утверждение. При этом следует отметить, повторяя рассуждения из доказательства первой теоремы, что если $p(t) \sim p_0(t)$ при $t \uparrow \omega$, то асимптотические представления (2.9), (2.10) могут быть заменены на представления

$$y(t) = \Phi^{-1}\left(-\alpha_0 J_0(t)\right) + \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\right)}\, o(1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{2.14}$$

$$y'(t) = -\alpha_0 \pi_\omega(t) p_0(t)\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\right)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{2.15}$$

где

$$J_0(t) = \int\limits_A^t \pi_\omega(\tau)p_0(\tau)\,d\tau.$$

Кроме того, в данном случае положим

$$J_{0\varphi}(t) = \int\limits_{A_\varphi}^t p_0(\tau)\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(\tau))\right)\,d\tau, \quad E_0(t) = \alpha_0 \pi_\omega^2(t) p_0(t)\varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\right),$$

$$h_0(t) = \left.\frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2}\right|_{y=\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))}.$$

Теорема 2.4. *Пусть*

$$p(t) = p_0(t)[1+r(t)], \quad \lim_{t\uparrow\omega} r(t) = 0, \tag{2.16}$$

где $p_0\colon [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ *— непрерывно дифференцируемая функция и* $r\colon [a,\omega[\longrightarrow]-1,+\infty[$ *— непрерывная функция. Пусть, кроме того, выполняются условия (2.7), (2.8), (2.13) и* *существуют конечные или равные $\pm\infty$ пределы*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J''_{0\varphi}(t)}{J'_{0\varphi}(t)}, \quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2} \sqrt{\left|\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|}. \tag{2.17}$$

Тогда:

1) если $\alpha_0\mu_0 > 0$, то существует однопараметрическое семейство $P_\omega(Y_0, 0)$-решений дифференциального уравнения (1.1) с асимптотическими представлениями (2.14), (2.15), причем таких, производная которых удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$y'(t) = -\alpha_0\pi_\omega(t)p_0(t)\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\right)\left[1+|E_0(t)|^{-\frac{1}{2}}\, o(1)\right] \quad \textit{при} \quad t\uparrow\omega; \tag{2.18}$$

2) если $\alpha_0\mu_0 < 0$ и выполняются условия

$$\lim_{t\uparrow\omega} r(t)\int_{t_0}^{t} \frac{|E_0(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|} = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} h_0(t)|E_0(t)|^{\frac{1}{2}}\int_{t_0}^{t} \frac{|E_0(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|} = 0, \tag{2.19}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\left[r(t)+2+\frac{\pi_\omega(t)J''_{0\varphi}(t)}{J'_{0\varphi}(t)}\right]\left(\int_{t_0}^{t} \frac{|E_0(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|}\right)^2 = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{|E_0(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|}}{|E_0(t)|^{\frac{1}{2}}} = 0, \tag{2.20}$$

где t_0 — некоторое число из промежутка $[a,\omega[$, то уравнение (1.1) имеет по крайней мере одно $P_\omega(Y_0,0)$-решение, допускающее при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления

$$y(t) = \Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t)) + \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}\left(\int_{t_0}^{t} \frac{|E_0(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau}{\pi_\omega(\tau)}\right)^{-1} o(1), \tag{2.21}$$

$$y'(t) = -\alpha_0\pi_\omega(t)p_0(t)\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\right)\left[1+|E_0(t)|^{-\frac{1}{2}}\left(\int_{t_0}^{t} \frac{|E_0(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|}\right)^{-1} o(1)\right]. \tag{2.22}$$

Доказательство. В силу выполнения условий (2.16), второго из условий (2.7), первого из условий (2.8), а также условий (2.3), (2.4) существует такое $t_0\in[a,\omega[$, что

$$\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t)) \in \Delta_{Y_0} \quad \text{при} \quad t\in[t_0,\omega[\quad \text{и} \quad \lim_{t\uparrow\omega}\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t)) = Y_0.$$

Поэтому на промежутке $[t_0,\omega[$ определены и непрерывны функции $\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\right)$, $\varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\right)$, $\varphi''\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\right)$ и в силу (1.2), (1.4)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\right)}{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\right)} = \pm\infty, \quad \lim_{t\uparrow\omega} h_0(t) = 0. \tag{2.23}$$

Кроме того, в силу первого из предельных соотношений (2.6) и представления правильно меняющейся функции

$$\begin{aligned} \varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right) \sim \varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\right), \\ \varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right) \sim \varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\right) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Отсюда и из (2.16) следует, что из условий (2.7), (2.8) вытекают точно такие же условия, полученные из (2.7), (2.8) заменой в них функций p, J и J_φ соответственно на функции p_0, J_0, $J_{0\varphi}$. В частности, в силу (2.4) и (2.13) имеем

$$E_0(t) \sim -\frac{\alpha_0 \pi_\omega^2(t) p_0(t)}{\Phi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\right)} = \frac{\pi_\omega(t) J_0'(t)}{J_0(t)} \longrightarrow \pm\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.25}$$

Далее, поскольку существуют конечные или равные $\pm\infty$ пределы (2.17), выясним чему они равны.

Вследствие того, что $J_{0\varphi}(t)$ стремится либо к нулю, либо к $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, выполняются условия (2.24), второе из условий (2.8) и существует первый из пределов (2.17), согласно правилу Лопиталя имеем

$$-1 = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J_\varphi'(t)}{J_\varphi(t)} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J_{0\varphi}'(t)}{J_{0\varphi}(t)} = 1 + \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J_{0\varphi}''(t)}{J_{0\varphi}'(t)},$$

откуда следует, что первый из пределов (2.17) равен -2.

Учитывая существование конечного или равного $\pm\infty$ второго из пределов (2.17), покажем, что этот предел может быть равен только нулю. Допустим противное. Тогда имеет место соотношение

$$\frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left|\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{\frac{3}{2}}} = \frac{z(y)}{|y|^{\frac{1}{2}}},$$

где функция $z\colon \Delta_{Y_0} \to \mathbb{R}$ непрерывна и такова, что

$$\lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} z(y) = \begin{cases} \text{либо} & c = \text{const} \neq 0, \\ \text{либо} & \pm\infty. \end{cases} \tag{2.26}$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от y_0 до y, получаем

$$-2\mu_0 \left|\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{-\frac{1}{2}} = c_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{z(s)}{|s|^{\frac{1}{2}}}\, ds, \tag{2.27}$$

где c_0 — некоторая постоянная.

Если $\displaystyle\int_{y_0}^{Y_0} \frac{z(s)\,ds}{|s|^{\frac{1}{2}}} = \pm\infty$, то отсюда после деления на $|y|^{\frac{1}{2}}$ будем иметь

$$-2\mu_0 \left|\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{-\frac{1}{2}} = \frac{\displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{z(s)\,ds}{|s|^{\frac{1}{2}}}}{|y|^{\frac{1}{2}}}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad y \to Y_0.$$

Выражение, стоящее в этой формуле слева, в силу (1.4) стремится к нулю при $y \to Y_0$, а справа в силу условия (2.26) — либо к отличной от нуля постоянной, либо к $\pm\infty$, так как согласно правилу Лопиталя в форме Штольца

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{z(s)\,ds}{|s|^{\frac{1}{2}}}}{|y|^{\frac{1}{2}}} = 2\mu_0 \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} z(y),$$

что невозможно.

Если же $\displaystyle\int_{y_0}^{Y_0} \frac{z(s)\,ds}{|s|^{\frac{1}{2}}}$ сходится, что возможно лишь в случае, когда $Y_0 = 0$, то запишем (2.27) в виде

$$-2\mu_0 \left|\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{-\frac{1}{2}} = c_1 + \int\limits_0^y \frac{z(s)\,ds}{|s|^{\frac{1}{2}}},$$

где $c_1 = c_0 + \displaystyle\int_{y_0}^{0} \frac{z(s)\,ds}{|s|^{\frac{1}{2}}}$. Докажем, что здесь $c_1 = 0$. Действительно, если $c_1 \neq 0$, то из данного соотношения следует, что

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \frac{4\mu_0}{c_1^2} + o(1) \quad \text{при} \quad y \to 0,$$

а в силу (1.4) это невозможно. Значит, $c_1 = 0$, поэтому имеем

$$-2\mu_0 \left|\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{-\frac{1}{2}} = \int\limits_0^y \frac{z(s)\,ds}{|s|^{\frac{1}{2}}}.$$

Разделив обе части последнего равенства на $|y|^{\frac{1}{2}}$, убедимся, что левая часть полученного соотношения в силу условий (1.4) стремится к нулю при $y \to 0$, а правая в силу правила Лопиталя и (2.26) — либо к отличной от нуля постоянной, либо к $\pm\infty$.

Полученные в каждом из двух возможных случаев противоречия приводят к выводу, что второй из пределов (2.17) равен нулю.

Таким образом, показано, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J''_{0\varphi}(t)}{J'_{0\varphi}(t)} = -2, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2} \sqrt{\left|\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|} = 0. \tag{2.28}$$

Теперь уравнение (1.1) с помощью преобразования

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \Phi^{-1}\left(-\alpha_0 J_0(t)\right) + \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\right)} y_1(t), \\
y'(t) &= -\alpha_0 \pi_\omega(t) p_0(t) \varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\right)[1 + y_2(t)]
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

сведем к системе дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -\frac{E_0(t)}{\pi_\omega(t)}\left[h_0(t) y_1 + y_2\right], \\
y_2' &= -\frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[\frac{\varphi(Y(t, y_1))}{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\right)}(1 + r(t)) + \left(1 + \frac{\pi_\omega(t) J''_{0\varphi}(t)}{J'_{0\varphi}(t)}\right)(1 + y_2)\right],
\end{aligned}
$$

где

$$
Y(t, y_1) = \Phi^{-1}\left(-\alpha_0 J_0(t)\right) + \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\right)} y_1.
$$

Точно таким же образом, как при доказательстве теоремы 3.2 из работы [2], нетрудно показать, что здесь

$$
\frac{\varphi(Y(t, y_1))}{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\right)}(1 + r(t)) = (1 + r(t))(1 + y_1) + R(t, y_1),
$$

где $R(t, y_1)$ такова, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $t_1 \in [t_0, \omega[$ и $\delta > 0$, что

$$
|R(t, y_1)| \le (1 + \varepsilon)|y_1|^2 \quad \text{при} \quad t \in]t_1, \omega[\quad \text{и} \quad |y_1| \le \delta. \tag{2.30}
$$

Выбрав произвольным образом число $\varepsilon > 0$, рассмотрим далее полученную систему дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -\frac{E_0(t)}{\pi_\omega(t)}\left[h_0(t) y_1 + y_2\right], \\
y_2' &= -\frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[r(t) + 2 + \frac{\pi_\omega(t) J''_{0\varphi}(t)}{J'_{0\varphi}(t)} + (1 + r(t)) y_1 + \left(1 + \frac{\pi_\omega(t) J''_{0\varphi}(t)}{J'_{0\varphi}(t)}\right) y_2 + R(t, y_1)\right]
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

на множестве $[t_1, \omega[\times \mathbb{R}^2_\delta$, где $\mathbb{R}^2_\delta = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2;\ |y_i| \le \delta < 1,\ i = 1, 2)\}$.

Чтобы доказать существование решений дифференциального уравнения (1.1), допускающих при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.14), (2.15), достаточно в силу замены (2.29) установить, что существуют решения системы дифференциальных уравнений (2.31), стремящиеся к нулю при $t \uparrow \omega$. Это можно осуществить, в частности, с использованием известных результатов, полученных в работах [4, 5]. Чтобы воспользоваться этими результатами, необходимо систему (2.31) с помощью дополнительных преобразований привести к виду, допускающему их применение.

С этой целью применим к системе (2.31) последовательно два преобразования

$$y_1(t) = v_1(t), \quad y_2(t) = |E(t)|^{-\frac{1}{2}} v_2(t) \tag{2.32}$$

и

$$x = \int_{t_1}^{t} \frac{|E(t)|^{\frac{1}{2}}\, d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|}, \quad v_1(t) = z_1(x), \quad v_2(t) = z_2(x). \tag{2.33}$$

В результате получим с учетом первого из знаковых условий (2.7) систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} z_1' &= c_{11}(x) z_1 + c_{12}(x) z_2, \\ z_2' &= f(x) + c_{21}(x) z_1 + c_{22}(x) z_2 + Z(x, z_1), \end{aligned} \tag{2.34}$$

в которой

$$f(x(t)) = \alpha_0 \nu_1 \left[r(t) + 2 + \frac{\pi_\omega(t) J''_{0\varphi}(t)}{J'_{0\varphi}(t)} \right], \quad (x(t), z_1) = \alpha_0 \nu_1 R(t, z_1),$$

$$c_{11}(x(t)) = \nu_1 \mu_0 |E(t)|^{\frac{1}{2}} h_0(t), \quad c_{12}(x(t)) = \nu_1 \mu_0,$$

$$c_{21}(x(t)) = \alpha_0 \nu_1 (1 + r(t)), \quad c_{22}(x(t)) = \alpha_0 \nu_1 |E(t)|^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} \frac{\pi_\omega(t) J''_{0\varphi}(t)}{J'_{0\varphi}(t)} + E(t) h_0(t) \right].$$

Поскольку в силу (2.25)

$$\lim_{t \uparrow \omega} \int_{t_1}^{t} \frac{|E_0(\tau)|^{\frac{1}{2}}\, d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|} \geq \lim_{t \uparrow \omega} \int_{t_1}^{t} \frac{d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|} = \left| \ln \frac{|\pi_\omega(t)|}{\pi_\omega(t_1)} \right| \to +\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

то $x(t) \uparrow +\infty$ при $t \uparrow \omega$, поэтому на основании (2.16), (2.28), (2.30) и последнего из условий (2.8) имеем

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} c_{11}(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} c_{12}(x) = \nu_1 \mu_0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} c_{21}(x) = \alpha_0 \nu_1, \quad \lim_{x \to +\infty} c_{22}(x) = 0,$$

$$|Z(x, z_1)| \leq \alpha_0 \nu_1 (1 + \varepsilon) |z_1|^2 \quad \text{при} \quad x \in [0, +\infty[\quad \text{и} \quad |z_1| \leq \delta.$$

Значит, система уравнений (2.34) является квазилинейной системой уравнений с почти постоянными коэффициентами, к которой могут быть применены результаты из работ [4, 5], касающиеся существования решений таких систем, стремящихся к нулю при $x \to \to +\infty$.

Характеристическое уравнение предельной матрицы коэффициентов линейной части системы (2.34) имеет вид

$$\rho^2 - \alpha_0\mu_0 = 0. \tag{2.35}$$

В случае $\alpha_0\mu_0 > 0$ корнями этого уравнения являются числа $\rho_{1,2} = \pm 1$. В этом случае согласно теореме 2.2 из работы [4] система дифференциальных уравнений (2.34) имеет однопараметрическое семейство решений $(z_1, z_2)\colon [x_*, +\infty[\to \mathbb{R}^2$, $x_* \geq 0$, стремящихся к нулю при $x \to +\infty$. Каждому из них в силу замен (2.29), (2.32) и (2.33) соответствует $P\omega(Y_0, 0)$-решение $y\colon [t_*, \omega[\to \mathbb{R}$ $(t_* \in [a, \omega[)$ дифференциального уравнения (1.1), допускающее асимптотические представления (2.14), (2.18). Следовательно, справедливо первое утверждение теоремы.

В случае $\alpha_0\mu_0 < 0$ характеристическое уравнение (2.35) имеет чисто мнимые корни $\rho_{1,2} = \pm i$ и в силу условий (2.19), (2.20)

$$\lim_{x\to+\infty} x_2 f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} x c_{11}(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} x c_{22}(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} x[c_{12}(x) - \nu_1\mu_0] = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} x[c_{21}(x) - \alpha_0\nu_1] = 0;$$

кроме того,

$$\lim_{z\to 0} \frac{x^2 \left|Z\left(x, \frac{z}{x}\right)\right|}{z} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad x \in [0, +\infty[.$$

Поэтому для системы (2.34) выполнены все условия теоремы 2.2 из работы [5]. Согласно этой теореме система уравнений (2.34) в данном случае имеет по крайней мере одно решение $(z_1, z_2)\colon [x_*, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ $(x_* \geq 0)$ с представлениями

$$z_i(x) = o\left(\frac{1}{x}\right), \quad i = 1, 2, \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Этому решению системы (2.34) соответствует в силу замен (2.29), (2.32) и (2.33) $P_\omega(Y_0, 0)$-решение $y\colon [t_*, \omega[\to \mathbb{R}$ $(t_* \in [a, \omega[)$ дифференциального уравнения (1.1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.21), (2.22).

Теорема доказана.

3. Примеры. Сначала, считая, что $p_0\colon [a, \omega[\to]0, +\infty[$ — непрерывно дифференцируемая функция, строим пример дифференциального уравнения

$$y'' = \alpha_0 p_0(t)\varphi(y), \tag{3.1}$$

где α_0 и φ такие же, как в уравнении (1.1), которое имеет $P_\omega(Y_0, 0)$-решения. При этом обратим внимание на то, что полученная при доказательстве теоремы 2.4 система дифференциальных уравнений (2.31) в этом случае, т. е. когда $r(t) \equiv 0$, заведомо имеет нулевое решение, если

$$\frac{\pi_\omega(t) J''_{0\varphi}(t)}{J'_{0\varphi}(t)} + 2 \equiv 0, \tag{3.2}$$

и этому решению в силу замены (2.29) соответствует решение уравнения (3.1) вида

$$y(t) = \Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t)), \tag{3.3}$$

которое будет $P_\omega(Y_0, 0)$-решением в случае выполнения условий (2.7), (2.8).

Записывая (3.2) в виде

$$\frac{J''_{0\varphi}(t)}{J'_{0\varphi}(t)} = -\frac{2}{\pi_\omega(t)}$$

и интегрируя, получаем

$$J'_{0\varphi}(t) = \frac{c_0}{\pi^2_\omega(t)},$$

или с учетом вида $J_{0\varphi}$

$$p_0(t)\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\right) = \frac{c_0}{\pi^2_\omega(t)}.$$

Здесь c_0 — произвольное положительное число.

Умножая теперь обе части последнего равенства на $-\alpha_0\pi_\omega(t)$, замечаем, что полученное равенство может быть представлено в виде

$$\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t))\right)' = -\frac{\alpha_0 c_0}{\pi_\omega(t)}.$$

Отсюда в результате интегрирования находим

$$\Phi^{-1}(-\alpha_0 J_0(t)) = -\alpha_0 c_0 \ln|\pi_\omega(t)| + c_1, \tag{3.4}$$

где c_1 — произвольное вещественное число.

Поэтому согласно (3.3)

$$y(t) = -\alpha_0 c_0 \ln|\pi_\omega(t)| + c_1, \tag{3.5}$$

и в силу знакового условия, которому должно удовлетворять y', имеем

$$\alpha_0\nu_1\pi_\omega(t) < 0,$$

т. е. α_0 должно быть выбрано так, чтобы выполнялось первое из неравенств (2.7). Также замечаем, что Y_0 для данного y равно $\pm\infty$.

Далее, из (3.4) находим

$$-\alpha_0 J_0(t) = \Phi\left(-\alpha_0 c_0 \ln|\pi_\omega(t)| + c_1\right),$$

откуда в результате дифференцирования получаем

$$-\alpha_0 p_0(t)\pi_\omega(t) = \frac{1}{\varphi\left(-\alpha_0 c_0 \ln|\pi_\omega(t)| + c_1\right)}\left(-\frac{\alpha_0 c_0}{\pi_\omega(t)}\right).$$

Из этого соотношения следует, что

$$p_0(t) = \frac{c_0}{\pi_\omega^2(t)\varphi\left(-\alpha_0 c_0 \ln|\pi_\omega(t)| + c_1\right)}. \tag{3.6}$$

Учитывая предыдущие соотношения, нетрудно убедиться в том, что для данной функции $p_0(t)$ выполняются второе из неравенств (2.7) и условия (2.8). Кроме того, для нее с использованием правила Лопиталя имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J_0'(t)}{J_0(t)} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\overline{\dfrac{c_0}{\varphi\left(-\alpha_0 c_0 \ln|\pi_\omega(t)| + c_1\right)}}}{-\alpha_0 \Phi\left(-\alpha_0 c_0 \ln|\pi_\omega(t)| + c_1\right)} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\alpha_0 c_0 \varphi'\left(-\alpha_0 c_0 \ln|\pi_\omega(t)| + c_1\right)}{\varphi\left(-\alpha_0 c_0 \ln|\pi_\omega(t)| + c_1\right)}. \tag{3.7}$$

Итак, для случая, когда $Y_0 = \pm\infty$ и α_0 удовлетворяет первому из неравенств (2.7), построена функция p_0 вида (3.6), при которой дифференциальное уравнение (3.1) имеет $P_\omega(Y_0, 0)$-решение вида (3.5). В этом нетрудно убедиться и непосредственной подстановкой функции (3.5) в дифференциальное уравнение (3.1). При этом в зависимости от значений предела (3.7) на основании теоремы 2.2 может быть решен для уравнения (3.1) и вопрос о количестве $P_\omega(Y_0, 0)$-решений с асимптотическими при $t \uparrow \omega$ представлениями вида

$$y(t) = -\alpha_0 c_0 \ln|\pi_\omega(t)| + c_1 + \frac{\varphi\left(-\alpha_0 c_0 \ln|\pi_\omega(t)| + c_1\right)}{\varphi'\left(-\alpha_0 c_0 \ln|\pi_\omega(t)| + c_1\right)}\, o(1), \tag{3.8}$$

$$y'(t) = -\frac{\alpha_0 c_0}{\pi_\omega(t)}\,[1 + o(1)]. \tag{3.9}$$

Теперь вместо дифференциального уравнения (3.1) рассмотрим уравнение

$$y'' = \alpha_0 p_0(t)[1 + r(t)[\varphi(y), \tag{3.10}$$

в котором α_0 удовлетворяет первому из неравенств (2.7), функция p_0 определяется формулой (3.6), $r\colon [a, \omega[\longrightarrow] -1, +\infty[$ непрерывна и такова, что $\lim_{t\uparrow\omega} r(t) = 0$, $Y_0 = \pm\infty$.

Тогда для функции $p(t) = p_0(t)[1 + r(t)]$ выполняется второе из неравенств (2.7) и условия (2.8).

В этом случае из теорем 2.2 – 2.4 следует, что для уравнения (3.10) в зависимости от значения предела

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\varphi'\left(-\alpha_0 c_0 \ln|\pi_\omega(t)| + c_1\right)}{\varphi\left(-\alpha_0 c_0 \ln|\pi_\omega(t)| + c_1\right)} = \gamma_0$$

имеют место с учетом знака φ' следующие утверждения.

1. Пусть $\gamma_0 = \mathrm{const}$. Тогда: а) если $\alpha\mu_0 > 0$, то уравнение (3.10) имеет однопараметрическое семейство $P_\omega(Y_0, 0)$-решений, допускающих при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (3.8), (3.9); б) если $\alpha_0\mu_0 < 0$, то при $\omega < +\infty$ уравнение (3.10) имеет двупараметрическое семейство $P_\omega(Y_0, 0)$- решений, допускающих при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (3.8), (3.9), а при $\omega = +\infty$ — по крайней мере одно такое решение.

2. Пусть $\gamma_0 = \pm\infty$ и существует конечный или равный $\pm\infty$ второй из пределов (2.17). Тогда: а) если $\alpha\mu_0 > 0$, то уравнение (3.10) имеет однопараметрическое семейство $P_\omega(Y_0, 0)$-решений, допускающих при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (3.8), (3.9), причем таких, производная которых удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$y'(t) = -\frac{\alpha_0 c_0}{\pi_\omega(t)} \left[1 + |E_0(t)|^{-\frac{1}{2}} o(1)\right] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где

$$E_0(t) = \frac{c_0 \varphi'\left(-\alpha_0 c_0 \ln|\pi_\omega(t)| + c_1\right)}{\varphi\left(-\alpha_0 c_0 \ln|\pi_\omega(t)| + c_1\right)};$$

б) если $\alpha\mu_0 < 0$ и выполняются условия

$$\lim_{t\uparrow\omega} h_0(t)|E_0(t)|^{\frac{1}{2}} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{|E_0(\tau)|^{\frac{1}{2}}\, d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|} = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} r(t) \left(\int\limits_{t_0}^{t} \frac{|E_0(\tau)|^{\frac{1}{2}}\, d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|}\right)^2 = 0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{|E_0(\tau)|^{\frac{1}{2}}\, d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|}}{|E_0(t)|^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

где t_0 — некоторое число из промежутка $[a, \omega[$ и

$$h_0(t) = \left.\frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2}\right|_{y=-\alpha_0 c_0 \ln|\pi_\omega(t)|+c_1},$$

то уравнение (3.10) имеет по крайней мере одно $P_\omega(Y_0, 0)$-решение, допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$y(t) = -\alpha_0 c_0 \ln|\pi_\omega(t)| + c_1 + \frac{\varphi\left(-\alpha_0 c_0 \ln|\pi_\omega(t)| + c_1\right)}{\varphi'\left(-\alpha_0 c_0 \ln|\pi_\omega(t)| + c_1\right)} \left(\int\limits_{t_0}^{t} \frac{|E_0(\tau)|^{\frac{1}{2}}\, d\tau}{\pi_\omega(\tau)}\right)^{-1} o(1),$$

$$y'(t) = -\frac{\alpha_0 c_0}{\pi_\omega(t)} \left[1 + |E_0(t)|^{-\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{t_0}^{t} \frac{|E_0(\tau)|^{\frac{1}{2}}\, d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|}\right)^{-1} o(1)\right].$$

4. Выводы. В настоящей работе получены результаты, существенно дополняющие полученные ранее в [2] относительно существования и асимптотики $P_\omega(Y_0, 0)$-решений дифференциального уравнения (1.1) с быстро меняющейся нелинейностью. Кроме того, построены примеры уравнений вида (1.1), которые заведомо допускают $P_\omega(Y_0, 0)$-решения, и во всех возможных случаях приведены асимптотические представления для таких решений и их производных первого порядка.

Литература

1. *Marić V.* Regular variation and differential equations // Lect. Notes Math. — 2000. — **1726**, — 128 p.
2. *Евтухов В. М., Черникова А. Г.* Асимптотика медленно меняющихся решений обыкновенных двучленных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью // Нелінійні коливання. — 2016. — **19**, № 4. — С. 466 – 483.
3. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. — 144 с.
4. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 1. — С. 52 – 80.
5. *Евтухов В. М.* Об исчезающих на бесконечности решениях неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 2003. — **39**, № 4. – С. 441 – 452.

Получено 16.01.17