УДК 517.929

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЛИНЕЙНО ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

Д. В. Бельский, Г. П. Пелюх

Ин-т математики НАН Украины
ул. Терещенковская, 3, Киев, 01004, Украина

We find new properties of solutions of differential-functional equation with a linearly transformed argument.

Встановлено нові властивості розв'язків диференціально-функціонального рівняння з лінійно перетвореним аргументом.

В настоящей статье рассмотрим уравнение

$$x'(t) = ax(t) + bx(qt) + cx'(qt), \tag{1}$$

где $\{a, b, c\} \subset R$, $0 < q < 1$, частные случаи которого изучались многими математиками. Так, в [1] исследованы асимптотические свойства решений уравнения $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$, в [2] установлены новые свойства решений уравнения $y'(x) = ay(\lambda x)$, в [3] получены условия существования аналитических почти периодических решений уравнения $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$, в [4] построено представление общего решения уравнения (1) при $|c| > 1$, в [5] получен ряд новых результатов о существовании ограниченных и финитных решений уравнений с линейно преобразованным аргументом, в [6] исследовано поведение решений уравнения (1) в окрестности точки $t = 0$, в [7] доказано существование решений уравнения $x'(t) = F(x(2t))$ с периодическим модулем, в [11] было исследовано уравнение (1) при $a = 0$, в [12] — при $a < 0$. Несмотря на это и на широкие приложения, которые находят такие уравнения в различных областях науки и техники (см. [8] и приведенную в ней библиографию), многие вопросы теории дифференциально-функционального уравнения (1) изучены мало. Это прежде всего относится к асимптотическим свойствам решений этого уравнения при $t \to +\infty$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие частные решения.

Пример 1. Если $\left|\dfrac{b}{a}\right| < 1$, то одно из решений уравнения (1) имеет вид

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n e^{aq^n t},$$

где $x_0 = 1$, $x_n = \dfrac{b + acq^{n-1}}{a\,(q^n - 1)}\, x_{n-1}$, $n \geq 1$, или в развернутой форме

$$x(t) = e^{at}\left\{1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{(b+ac)(b+acq)\ldots\left(b+acq^{n-1}\right)}{a^n(1-q)\,(1-q^2)\ldots(1-q^n)} e^{-a(1-q^n)t}\right\}.$$

Пример 2. Еще одним частным решением уравнения (1) является сходящийся при $t > 0$ ряд $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n t^{v_2+n}$, где величина v_2 определяется из равенства $q^{v_2} = \dfrac{q}{c}$ и удовлетворяет условию $v_2 \neq -n \; \forall n \in \mathrm{N}$, $x_0 = 1$ и $x_{n+1} = \dfrac{a+bq^{v_2+n}}{\left(1-cq^{v_2+n}\right)(v_2+n+1)}\, x_n$, $n \geq 0$; в развернутой форме

$$x(t) = t^{v_2}\left\{1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(a+\frac{b}{c}\,q\right)\left(a+\frac{b}{c}\,q^2\right)\ldots\left(a+\frac{b}{c}\,q^n\right)}{(1-q)\left(1-q^2\right)\ldots(1-q^n)\,(v_2+1)(v_2+2)\ldots(v_2+n)}\,t^n\right\}.$$

С помощью методов, примененных в [1], докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) $a > 0,\, bc \neq 0$;

2) $a + bq^n \neq 0 \; \forall n \in \mathrm{N}\bigcup\{0\}$ *или* $c > 0,\, 1 + \dfrac{\ln c}{\ln q^{-1}} \neq l \; \forall l \in \mathrm{Z}$;

3) величина $v_1 \in \mathrm{C}$ *определяется из равенства* $a + bq^{v_1} = 0$;

4) для параметров $\{j, m\} \subset \mathrm{N}\bigcup\{0\}$ *выполняются неравенства*

$$v_0 \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\ln\left(\frac{|b|}{a}\right)}{\ln q^{-1}} = \operatorname{Re} v_1 \geq v_{\min} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\ln\left(\left|cq^j\right| q^{-1} + \frac{\left|bq^j + acq^j q^{-1}\right|}{a}\right)}{\ln q^{-1}},$$

$$q^{-\operatorname{Re} v_1 + m}\left(\left|\frac{q}{c}\right| + \left|\frac{a}{b} + \frac{q}{c}\right|\right) < 1 \quad \text{и} \quad \left(\left|c^{-1}\right| + 2\left|ac^{-1} + qbc^{-2}\right|\right) q^{-\operatorname{Re} v_1 + m} < 1.$$

Тогда любое непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1) имеет свойство $x(t)e^{-at} \to L$, $t \to \infty$, *где* L *— некоторая постоянная, и для любого числа* L *существует решение с указанным свойством; кроме того,*

в случае $bc < 0$ *справедливы утверждения:*

1) для произвольной $m + 1$ *раз непрерывно дифференцируемой периодической функции* $f_0(u)$ *с периодом* 1 *существует непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1)*

$$x_f(t) = t^{v_1} f_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-1} f_1\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \ldots + t^{v_1-m} f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} z_n(t), \quad t > 0,$$

где $f_p(u)$, $1 \leq p \leq m$, *— периодические функции с периодом* 1, *определяемые рекуррентной формулой*

$$f_{p+1}(u) = \frac{\left(bq^{p+1} + ac\right)}{ba\left(q^{p+1} - 1\right)}\left((v_1 - p) f_p(u) + \frac{1}{\ln q^{-1}}\, f_p'(u)\right), \quad 0 \leq p \leq m - 1,$$

$$z_1(t) = \left(bc^{-2} q^{-v_1+m+1} - bc^{-1}\right) \times$$

$$\times\, e^{-bc^{-1}t} \int_t^{+\infty}\left[u^{v_1-m} f_m\left(\frac{\ln u}{\ln q^{-1}}\right) - t^{v_1-m} f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right] e^{bc^{-1}u}\, du,$$

$$z_{n+1}(t) = c^{-1}qz_n\left(q^{-1}t\right) + \left(ac^{-1} + qbc^{-2}\right)e^{-bc^{-1}t}\int\limits_t^{+\infty} z_n\left(q^{-1}u\right)e^{bc^{-1}u}\,du, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(t)$ *непрерывно дифференцируем и имеет асимптотическое свойство* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(t) = O\left(t^{v_1-m-1}\right),\ t \to +\infty$;

2) каждое $m+j+4$ *раза непрерывно дифференцируемое решение* $x(t)$ *уравнения (1) тождественно равно сумме* $x(t) = Lx_1(t) + x_f(t)$, *где* L *— некоторая постоянная,* $x_1(t)$ *— решение уравнения (1), имеющее свойство* $x_1(t)e^{-at} \to 1,\ t \to \infty$, $x_f(t)$ *— решение из предыдущего пункта, построенное на основе некоторой* $m+1$ *раз непрерывно дифференцируемой периодической функции* $f_0(u)$ *с периодом* 1;

в случае $bc > 0$ *имеют место следующие утверждения:*

1) для произвольной $m+1$ *раз непрерывно дифференцируемой периодической функции* $f_0(u)$ *с периодом* 1 *существует непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1)*

$$x_f(t) = t^{v_1}f_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-1}f_1\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \ldots$$

$$\ldots + t^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} z_n(t) + \gamma\, x_*(t), \quad t \geq \rho > 0,$$

где ρ *— достаточно большая и не зависящая от функции* $f_0(u)$ *постоянная,* $f_p(u),\ 1 \leq \leq p \leq m$, *— периодические функции с периодом 1, определяемые рекуррентной формулой*

$$f_{p+1}(u) = \frac{\left(bq^{p+1} + ac\right)}{ba\left(q^{p+1} - 1\right)}\left((v_1 - p)f_p(u) + \frac{1}{\ln q^{-1}}f_p'(u)\right), \quad 0 \leq p \leq m-1,$$

$$z_1(t) = \left(c^{-1}q^{-v_1+m+1} - 1\right)\Bigg[e^{-bc^{-1}(t-\rho)}t^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) -$$

$$-bc^{-1}\int\limits_\rho^t e^{-bc^{-1}(t-u)}\left\{u^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln u}{\ln q^{-1}}\right) - t^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right\}du\Bigg],$$

$$z_{n+1}(t) = c^{-1}qz_n\left(q^{-1}t\right) - \left(qbc^{-2} + ac^{-1}\right)\int\limits_\rho^t e^{-bc^{-1}(t-u)}z_n\left(q^{-1}u\right)du, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(t)$ *непрерывно дифференцируем и имеет асимптотическое свойство*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(t) = O\left(t^{v_1-m-1}\right), \quad t \to +\infty,$$

функция $x_*(t)$ *является частным решением уравнения (1) и определяется формулой*

$$x_*(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n e^{-\frac{b}{c}q^{-n}t},$$

где $x_n = \dfrac{ac + bq^{-n+1}}{bc\,(q^{-n}-1)}\,x_{n-1}$, $n \geq 1$, $x_0 = 1$, γ *— произвольная постоянная;*

2) каждое $m + j + 4$ *раза непрерывно дифференцируемое решение* $x(t)$ *уравнения (1) тождественно равно сумме* $x(t) = Lx_1(t) + x_f(t)$, *где* L *— некоторая постоянная,* $x_f(t)$ *— решение из предыдущего пункта, построенное на основе некоторой* $m+1$ *раз непрерывно дифференцируемой периодической функции* $f_0(u)$ *с периодом* 1 *и с некоторой постоянной* γ.

Доказательство. Запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{d}{dt}\,\left\{e^{-at}x(t)\right\} = be^{-at}x(qt) + ce^{-at}x'(qt)$$

и проинтегрируем его:

$$e^{-at}x(t) = e^{-aq^{-n}}x\left(q^{-n}\right) + cq^{-1}\left\{e^{-a(1-q)t}e^{-aqt}x(qt) - e^{-aq^{-n}(1-q)}e^{-aq^{-(n-1)}}x\left(q^{-(n-1)}\right)\right\} +$$
$$+\left(b + acq^{-1}\right)\int\limits_{q^{-n}}^{t} e^{-a(1-q)s}e^{-aqs}x(qs)\,ds.$$

Определим $\sup_{t\in[q^{-n+1},q^{-n}]}\left|e^{-at}x(t)\right| \stackrel{\mathrm{df}}{=} M_n$, и пусть $q^{-n} \leq t \leq q^{-n-1}$. Тогда

$$\left|e^{-at}x(t)\right| \leq \left|e^{-aq^{-n}}x\left(q^{-n}\right)\right| + \left|\frac{c}{q}\right| \times$$
$$\times\left\{e^{-a(1-q)t}\left|e^{-aqt}x(qt)\right| + e^{-aq^{-n}(1-q)}\left|e^{-aq^{-(n-1)}}x\left(q^{-(n-1)}\right)\right|\right\} +$$
$$+\left|b + acq^{-1}\right|\int\limits_{q^{-n}}^{t} e^{-a(1-q)s}\left|e^{-aqs}x(qs)\right|\,ds \leq$$
$$\leq M_n + 2\left|\frac{c}{q}\right|e^{-a(1-q)q^{-n}}M_n + \left|b + acq^{-1}\right|M_n\frac{e^{-a(1-q)q^{-n}}}{a(1-q)} =$$
$$= M_n\left\{1 + \left(2\left|\frac{c}{q}\right| + \frac{\left|b + acq^{-1}\right|}{a(1-q)}\right)e^{-a(1-q)q^{-n}}\right\},$$

откуда получаем неравенство

$$M_{n+1} \leq M_n\left\{1 + \left(2\left|\frac{c}{q}\right| + \frac{\left|b + acq^{-1}\right|}{a(1-q)}\right)e^{-a(1-q)q^{-n}}\right\}$$

и оценку $x(t) = O\left(e^{at}\right), t \to \infty$. Теперь из тождества

$$e^{-at_2}x(t_2) - e^{-at_1}x(t_1) = cq^{-1}\left\{e^{-a(1-q)t_2}e^{-aqt_2}x(qt_2) - e^{-a(1-q)t_1}e^{-aqt_1}x(qt_1)\right\} +$$

$$+\left(b + acq^{-1}\right)\int\limits_{t_1}^{t_2} e^{-a(1-q)s}e^{-aqs}x(qs)\,ds$$

для некоторой постоянной M такой, что $\left|e^{-at}x(t)\right| \le M$, $t \ge q^{-n+1}$, следует неравенство

$$\left|e^{-at_2}x(t_2) - e^{-at_1}x(t_1)\right| \le \Bigg(|c|q^{-1}\left\{e^{-a(1-q)t_2} + e^{-a(1-q)t_1}\right\} +$$

$$+\left|b + acq^{-1}\right| \frac{e^{-a(1-q)t_1} - e^{-a(1-q)t_2}}{a(1-q)}\Bigg)M.$$

Из принципа Коши следует существование $\lim_{t\to\infty} e^{-at}x(t) \in \mathrm{C}$.

Частное решение из первого примера существует при $\left|\dfrac{b}{a}\right| < 1$. Продифференцируем уравнение (1) p раз, чтобы выполнялось неравенство $|bq^p| < a$:

$$x^{(p+1)}(t) = ax^{(p)}(t) + bq^p x^{(p)}(qt) + cq^p x^{(p+1)}(qt).$$

Символом $y_p(t)$ обозначим решение этого уравнения

$$y_p'(t) = ay_p(t) + bq^p y_p(qt) + cq^p y_p'(qt), \tag{2}$$

имеющее свойство $y_p(t)e^{-at} \to a^p$, $t \to \infty$. Это решение уравнения (2) из первого примера, умноженное на a^p. Определим функцию

$$y_{p-1}(t) = \int\limits_1^t y_p(u)\,du + h_p$$

и проинтегрируем уравнение (2) на отрезке $[1, t]$:

$$y_{p-1}'(t) = ay_{p-1}(t) + bq^{p-1}y_{p-1}(qt) + cq^{p-1}y_{p-1}'(qt) - h_p\left(a + bq^{p-1}\right) +$$

$$+ bq^{p-1}\int\limits_q^1 y_p(u)\,du - cq^{p-1}y_p(q) + y_p(1).$$

Если $a + bq^{p-1} \ne 0$, то с помощью соответствующего выбора h_p имеем

$$y_{p-1}'(t) = ay_{p-1}(t) + bq^{p-1}y_{p-1}(qt) + cq^{p-1}y_{p-1}'(qt).$$

Легко проверить, что $y_{p-1}(t)e^{-at} \to a^{p-1}$, $t \to \infty$. Повторяя эти рассуждения несколько раз, получаем $x(t)e^{-at} = y_0(t)e^{-at} \to 1$, $t \to \infty$.

Предположим, что $a + bq^n = 0$, $n \in \mathrm{N}\bigcup\{0\}$, но $c > 0$ и $1 + \dfrac{\ln c}{\ln q^{-1}} \neq l\ \forall l \in \mathrm{Z}$. Тогда решение из второго примера после замены коэффициентов b и c величинами bq^n и cq^n соответственно становится неограниченным бесконечно дифференцируемым решением $x_2(t)$ уравнения

$$x^{(n+1)}(t) = ax^{(n)}(t) + bq^n x^{(n)}(qt) + cq^n x^{(n+1)}(qt).$$

В дальнейшем будет доказано, что из предположения $x^{(n)}(t) = o\left(e^{at}\right)$, $t \to \infty$, для достаточно гладкого решения следует оценка $x^{(n)}(t) = O(1)$, $t \to \infty$. Поэтому $x_2(t)e^{-at} \to h \neq 0$, $t \to \infty$, и после умножения на подходящую величину получаем решение, имеющее свойство $y_n(t)e^{-at} \to a^n$, $t \to \infty$. Дальнейшие рассуждения повторяют предыдущие. Первая часть утверждения теоремы доказана.

Предположим, что $x(t) = o\left(e^{at}\right)$, $t \to \infty$. Тогда, устремляя в тождестве

$$e^{-at_1}x(t_1) - e^{-at}x(t) = cq^{-1}\left\{e^{-a(1-q)t_1}e^{-aqt_1}x(qt_1) - e^{-a(1-q)t}e^{-aqt}x(qt)\right\} + \\ + \left(b + acq^{-1}\right)\int\limits_t^{t_1} e^{-a(1-q)s}e^{-aqs}x(qs)\,ds$$

аргумент t_1 к ∞, получаем

$$x(t) = cq^{-1}x(qt) - \left(b + acq^{-1}\right)e^{at}\int\limits_t^{+\infty} e^{-a(1-q)s}e^{-aqs}x(qs)\,ds.$$

Если $|x(t)| \leq Me^{at}$, $t \geq U$, M, U — некоторые постоянные, то для $t \geq q^{-1}U$ выполняется неравенство

$$|x(t)| \leq |c|q^{-1}|x(qt)| + \left|b + acq^{-1}\right|e^{at}\int\limits_t^{+\infty} e^{-a(1-q)s}e^{-aqs}|x(qs)|ds \leq \\ \leq |c|q^{-1}Me^{aqt} + \left|b + acq^{-1}\right|e^{at}\int\limits_t^{+\infty} e^{-a(1-q)s}M\,ds = M\left\{|c|q^{-1} + \frac{\left|b + acq^{-1}\right|}{a(1-q)}\right\}e^{aqt}.$$

Повторяя процесс, для $t \geq q^{-n}U$ получаем

$$|x(t)| \leq M\left\{|c|q^{-1} + \frac{\left|b + acq^{-1}\right|}{a(1-q)}\right\}\left\{|c|q^{-1} + \frac{\left|b + acq^{-1}\right|}{a\left(1-q^2\right)}\right\}\ldots\left\{|c|q^{-1} + \frac{\left|b + acq^{-1}\right|}{a\left(1-q^n\right)}\right\}e^{aq^nt}.$$

Поэтому на промежуточном отрезке $q^{-n}U \leq t \leq q^{-n-1}U$ выполняется неравенство

$$|x(t)| \leq M\left\{|c|q^{-1} + \frac{\left|b + acq^{-1}\right|}{a(1-q)}\right\}\left\{|c|q^{-1} + \frac{\left|b + acq^{-1}\right|}{a\left(1-q^2\right)}\right\}\ldots$$

$$\ldots \left\{ |c|q^{-1} + \frac{\left|b + acq^{-1}\right|}{a\,(1-q^n)} \right\} e^{aq^{-1}U} \le$$

$$\le Me^{aq^{-1}U} \left(|c|q^{-1} + \frac{\left|b + acq^{-1}\right|}{a} \right)^n \prod_{k=1}^{n} \left(1 + Lq^k\right) \le$$

$$\le Me^{aq^{-1}U} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + Lq^k\right) \left(|c|q^{-1} + \frac{\left|b + acq^{-1}\right|}{a} \right)^n,$$

где L — некоторая постоянная. Из условия $q^{-n}U \le t \le q^{-n-1}U$ следует, что

$$\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - 1 - \frac{\ln U}{\ln q^{-1}} \le n \le \frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - \frac{\ln U}{\ln q^{-1}}.$$

Тогда оценку $|x(t)|$ можно продолжить:

$$|x(t)| \le L_1 \left(|c|q^{-1} + \frac{\left|b + acq^{-1}\right|}{a} \right)^{\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}} = L_1 t^{\frac{\ln\left(|c|q^{-1} + \frac{\left|b+acq^{-1}\right|}{a}\right)}{\ln q^{-1}}}$$

для некоторой постоянной L_1. Функция в правой части последнего неравенства не зависит от n.

Определим для краткости

$$\frac{\ln\left(|c|q^{-1} + \frac{\left|b+acq^{-1}\right|}{a}\right)}{\ln q^{-1}} \stackrel{\mathrm{df}}{=} v,$$

и приблизительно (качественно) оценим производную $x'(t)$. Запишем уравнение (1) в следующем виде:

$$x'(t) = cx'(qt) + ax(t) + bx(qt) \stackrel{\mathrm{df}}{=} cx'(qt) + f(t).$$

Для неоднородности справедливо равенство $f(t) = O\left(t^v\right),\ t \to \infty$. Выполним замену $x'(t) = t^{v_3}y(t)$, $v_3 > v$:

$$y(t) = cq^{v_3}y(qt) + t^{-v_3}f(t).$$

Оценим коэффициент $c_1 \stackrel{\mathrm{df}}{=} cq^{v_3}$ и неоднородность $t^{-v_3}f(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} g(t)$:

$$|c_1| = |c|q^{v_3} < |c|q^v < q < 1, \quad |g(t)| < M < +\infty$$

для некоторой постоянной M. Тогда

$$y(t) = c_1 y(qt) + g(t)$$

и для $q^{-n-1} \le t \le T$ получаем

$$|y(t)| \le |c_1|\,|y(qt)| + M \le |c_1| \sup_{q^{-n-1}\le t\le T} |y(qt)| + M = |c_1| \sup_{q^{-n}\le t\le qT} |y(t)| + M \le$$

$$\le |c_1| \sup_{q^{-n}\le t\le T} |y(t)| + M = |c_1| \max\left\{ \sup_{q^{-n}\le t\le q^{-n-1}} |y(t)|, \sup_{q^{-n-1}\le t\le T} |y(t)| \right\} + M \le$$

$$\le |c_1| \sup_{q^{-n}\le t\le q^{-n-1}} |y(t)| + |c_1| \sup_{q^{-n-1}\le t\le T} |y(t)| + M,$$

откуда

$$\sup_{q^{-n-1}\le t\le T} |y(t)| \le |c_1| \sup_{q^{-n}\le t\le q^{-n-1}} |y(t)| + |c_1| \sup_{q^{-n-1}\le t\le T} |y(t)| + M,$$

$$\sup_{q^{-n-1}\le t\le T} |y(t)| \le (1-|c_1|)^{-1} \left(|c_1| \sup_{q^{-n}\le t\le q^{-n-1}} |y(t)| + M \right).$$

T — произвольное число, поэтому

$$|y(t)| \le (1-|c_1|)^{-1} \left(|c_1| \sup_{q^{-n}\le t\le q^{-n-1}} |y(t)| + M \right) \quad \forall t \ge q^{-n-1},$$

т. е. $x'(t) = t^{v_3} y(t) = O\left(t^{v_3}\right), t \to \infty$.

Дифференцируя уравнение (1) и последовательно применяя только что изложенные рассуждения, получаем $x^{(m)}(t) = O\left(t^{v_{m+2}}\right), t \to \infty$, где $v < v_3 < \ldots < v_{m+1} < v_{m+2}$, т. е. все производные $o\left(e^{at}\right), t \to \infty$.

Продифференцируем уравнение (1) j раз

$$x^{(j+1)}(t) = ax^{(j)}(t) + bq^j x^{(j)}(qt) + cq^j x^{(j+1)}(qt).$$

Так же, как и для функции $x(t)$, из условия $x^{(j)}(t) = o\left(e^{at}\right), t \to \infty$, получаем оценку $x^{(j)}(t) = O\left(t^{v_{\min}}\right), t \to \infty$. В уравнении

$$x^{(j)}(t) = ax^{(j-1)}(t) + bq^{j-1}x^{(j-1)}(qt) + cq^{j-1}x^{(j)}(qt),$$

$$x^{(j-1)}(t) = -\frac{b}{a}\, q^{j-1}\, x^{(j-1)}(qt) - \frac{c}{a}\, q^{j-1} x^{(j)}(qt) + \frac{1}{a}\, x^{(j)}(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} -\frac{b}{a}\, q^{j-1}\, x^{(j-1)}(qt) + f(t)$$

выполняем замену $x^{(j-1)}(t) = t^{v_*} y(t)$, где $v_* \ge v_{\min}$ и $v_* > \dfrac{\ln\left(\frac{|bq^{j-1}|}{a}\right)}{\ln q^{-1}} = v_0 - (j-1)$,

$$y(t) = -\frac{b}{a}\, q^{j-1}\, q^{v_*} y(qt) + t^{-v_*} f(t).$$

Переопределим вспомогательные коэффициент $c_1 \stackrel{\mathrm{df}}{=} -\dfrac{b}{a}\, q^{j-1}\, q^{v_*}$, неоднородность $g(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=}$ $\stackrel{\mathrm{df}}{=} t^{-v_*} f(t)$ и оценим их согласно выбору v_*:

$$|g(t)| = O\left(t^{v_{\min}-v_*}\right) < M < +\infty, \quad t \to \infty,$$

для некоторой постоянной M,

$$|c_1| = \exp\left\{\left(\frac{\ln\left|\frac{bq^{j-1}}{a}\right|}{\ln q^{-1}} - v_*\right)\ln q^{-1}\right\} < 1.$$

Применяя к уравнению $y(t) = c_1 y(qt) + g(t)$ предыдущие рассуждения, получаем ограниченность $|y(t)|$ и свойство $x^{(j-1)}(t) = O\left(t^{v_*}\right) = O\left(t^{\max\{v_{\min}, v_0-(j-1)+\varepsilon\}}\right)$, $t \to \infty$, $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Повторяя этот процесс, убеждаемся, что

$$x^{(j-2)}(t) = O\left(t^{\max\{v_0-(j-2)+\varepsilon; \max\{v_{\min}, v_0-(j-1)+\varepsilon\}\}}\right) = O\left(t^{\max\{v_0-(j-2)+\varepsilon, v_{\min}\}}\right), \quad t \to \infty,$$

а после нескольких раз получаем (по условию теоремы $v_0 \geq v_{\min}$)

$$x(t) = O\left(t^{\max\{v_0+\varepsilon, v_{\min}\}}\right) = O\left(t^{v_0+\varepsilon}\right), \quad t \to \infty.$$

Аналогично, для производной справедлива оценка $x'(t) = O\left(t^{v_0-1+\varepsilon}\right)$, $t \to \infty$.

Запишем уравнение (1) в виде

$$x(t) = -\frac{b}{a}\, x(qt) + \frac{1}{a}\, x'(t) - \frac{c}{a}\, x'(qt) \stackrel{\mathrm{df}}{=} -\frac{b}{a}\, x(qt) + f(t)$$

и выполним замену $x(t) = t^{v_1-\varepsilon} y(t)$:

$$y(t) = -\frac{b}{a} q^{v_1-\varepsilon} y(qt) + t^{-(v_1-\varepsilon)} f(t) = q^{-\varepsilon} y(qt) + t^{-(v_1-\varepsilon)} f(t).$$

Оценим неоднородность $g(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} t^{-(v_1-\varepsilon)} f(t)$:

$$|g(t)| = t^{-(v_1-\varepsilon)} O\left(t^{v_1-1+\varepsilon}\right) = O\left(t^{-1+2\varepsilon}\right) = O(1), \quad t \to \infty,$$

при малом ε и $|g(t)| < M < +\infty$, $t \geq 1$, для некоторой постоянной M. Распишем тождество

$$\begin{aligned} y(t) &= q^{-\varepsilon} y(qt) + g(t) = \ldots = q^{-n\varepsilon} y\left(q^n t\right) + q^{-(n-1)\varepsilon} g\left(q^{n-1} t\right) + \ldots \\ &\ldots + q^{-2\varepsilon} g\left(q^2 t\right) + q^{-\varepsilon} g(qt) + g(t), \end{aligned}$$

n выбираем так, чтобы выполнялось неравенство $qt_0 \le q^n t \le t_0$. Тогда

$$|y(t)| \le q^{-n\varepsilon}\left\{|y(q^n t)| + q^{\varepsilon}M + \ldots + q^{(n-2)\varepsilon}M + q^{(n-1)\varepsilon}M + q^{n\varepsilon}M\right\} \le$$

$$\le q^{-n\varepsilon}\left\{\sup_{qt_0\le u\le t_0}|y(u)| + \frac{M}{q^{-\varepsilon}-1}\right\}.$$

Из условия $qt_0 \le q^n t \le t_0$ следует неравенство $n \le \dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}} + 1 + \dfrac{\ln t_0}{\ln q}$. Продолжая оценку $|y(t)|$, получаем

$$|y(t)| \le t^{\varepsilon}\left(q^{-\varepsilon}\right)^{1+\frac{\ln t_0}{\ln q}}\left\{\sup_{qt_0\le u\le t_0}|y(u)| + \frac{M}{q^{-\varepsilon}-1}\right\},$$

$$x(t) = t^{v_1-\varepsilon}y(t) = t^{v_1-\varepsilon}O\left(t^{\varepsilon}\right) = O\left(t^{v_1}\right), \quad t \to \infty.$$

Повторяя эти рассуждения для производной, находим $x'(t) = O\left(t^{v_1-1}\right), t \to \infty$.

Выполним в уравнении (1) замену $x(t) = t^{v_1}y\left(\dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)$ с учетом только что полученной оценки для производной $x'(t)$:

$$y\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) - y\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - 1\right) = O\left(t^{-1}\right) = O\left(e^{-\ln q^{-1}\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}}\right), \quad t \to \infty.$$

Обозначим $s \overset{\mathrm{df}}{=} \dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}}$, $l \overset{\mathrm{df}}{=} \ln q^{-1} > 0$,

$$y(s) - y(s+1) = O\left(e^{-ls}\right), \quad s \to \infty.$$

Отсюда получаем фундаментальность, а следовательно, и сходимость последовательности $y(s+n)$. Обозначим ее предел символом $g(s)$. Это периодическая функция с периодом 1, для которой выполняется равенство

$$y(s) - g(s) = O\left(e^{-ls}\right), \quad s \to \infty.$$

Из равномерной сходимости непрерывных функций к $g(s)$ следует непрерывность этой функции. Возвращаясь к искомой функции, получаем

$$x(t) = t^{v_1}\left\{g(s) + O\left(t^{-1}\right)\right\}, \quad t \to \infty.$$

Для $m + j + 4$ раза непрерывно дифференцируемого решения $x(t) = o\left(e^{at}\right), t \to \infty$, уравнения (1), повторяя этот процесс для его производных, устанавливаем равенства

$$x^{(k)}(t) = t^{v_1-k}\left\{f_{k,0}(s) + O\left(t^{-1}\right)\right\}, \quad t \to \infty,$$

где $0 \le k \le m+1$, $f_{k,0}(s)$ — непрерывные периодические функции с периодом 1. Далее, применяя рассуждения из доказательства теоремы 5 из § 2 [9] или из [10], получаем представление

$$x(t) = t^{v_1} f_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-1} f_1\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-2} f_2\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \ldots$$

$$\ldots + t^{v_1-m+1} f_{m-1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-m} f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) +$$

$$+ t^{v_1-m-1} d_{m+1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right), \quad t \ge 1, \tag{3}$$

где $f_p(u), 0 \le p \le m,$ — периодические функции с периодом 1 такие, что $f_0(u) \in C^{m+1}(R)$ и $f_{p+1}(u) = \dfrac{bq^{p+1}+ac}{ba\left(q^{p+1}-1\right)}\left((v_1-p)f_p(u) + \dfrac{1}{\ln q^{-1}}\, f'_p(u)\right), 0 \le p \le m-1; d_{m+1}(u)$ — непрерывно дифференцируемая, ограниченная функция. После этого, записывая уравнение (1) как уравнение с опережением

$$x'(t) = -bc^{-1}x(t) - ac^{-1}x\left(q^{-1}t\right) + c^{-1}x'\left(q^{-1}t\right)$$

и применяя к нему рассуждения из доказательства теоремы из [12], получаем равенства $x(t) = x_f(t)$, где функции $x_f(t)$ определены в условии теоремы.

Поскольку любое решение имеет свойство $x(t)e^{-at} \to L \in \mathrm{C}, t \to \infty$, то разность $x(t) - Lx_1(t) = o\left(e^{at}\right), t \to \infty$, функция $x_1(t)$ определена в условии теоремы. Отсюда при достаточной гладкости решения $x(t)$ получаем тождества $x(t) - Lx_1(t) = x_f(t)$.

Теорема доказана.

В доказательстве теоремы построение решения $x_1(t)$ в случае $a+bq^n = 0, n \in \mathrm{N}\bigcup\{0\}$, было основано на решении из второго примера. Если же и оно не существует, то можно попробовать с помощью начальной функции построить, как в [1], или снова найти частное неограниченное решение уравнения

$$x^{(n+1)}(t) = ax^{(n)}(t) + bq^n x^{(n)}(qt) + cq^n x^{(n+1)}(qt).$$

Это решение, например $y(t)$, будет иметь свойство $y(t)e^{-at} \to h \ne 0, t \to \infty$, и послужит отправным пунктом в построении решения $x_1(t)$.

Представление (3) для достаточно гладких решений, имеющих свойство $x(t) = o\left(e^{at}\right)$, $t \to \infty$, было получено на основе формального решения

$$x_\phi(t) = t^{v_1} f_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-1} f_1\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-2} f_2\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \ldots,$$

где $f_0(u)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1,

$$f_{p+1}(u) = \frac{bq^{p+1}+ac}{ba\left(q^{p+1}-1\right)}\left((v_1-p)\, f_p(u) + \frac{1}{\ln q^{-1}}\, f'_p(u)\right), \quad p \ge 0.$$

Это решение является расходящимся степенным рядом при $f_0(u) \equiv \mathrm{const} \ne 0$.

Литература

1. *Kato T., McLeod J. B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — **77**. — P. 891–937.
2. *de Bruijn N. G.* The difference-differential equation $F'(x) = e^{\alpha x+\beta}F(x-1)$. I, II // Ned. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 56-Indag. Math. — 1953. — **15**. — P. 449–464.
3. *Frederickson P. O.* Series solutions for certain functional-differential equations // Lect. Notes. Math. — 1971. — **243**. — P. 249–254.
4. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1974. — 192 с.
5. *Дерфель Г. А.* Вероятностный метод исследования одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 10. — С. 1483–1491.
6. *Полищук В. М., Шарковский А. Н.* Представление решений линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Дифференц. уравнения. — 1973. — **9**, № 9. — С. 1627–1645.
7. *Frederickson P. O.* Global solutions to certain nonlinear functional differential equations // J. Math. Anal. and Appl. — 1971. — **33**. — P. 355–358.
8. *Gumovski I., Mira C.* Recurrences and discrete dynamic systems // Lect. Notes Math. — 1980. — **809**. — 267 p.
9. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений функциональных и дифференциально-функциональных уравнений с линейно преобразованным аргументом. — Киев, 2011. — 94 с. — (Препринт / НАН Украины, Ин-т математики).
10. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений некоторых дифференциально-функциональных уравнений // Нелінійні коливання. — 2016. — **19**, № 3. — С. 311–348.
11. *Бельский Д. В., Пелюх Г. П.* Об асимптотических свойствах решений одного дифференциально-функционального уравнения с линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 3. — С. 291–313.
12. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений линейного дифференциально-функционального уравнения нейтрального типа с постоянными коэффициентами и линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. — 2012. — **15**, № 4. — С. 466–493.

Получено 29.08.15,
после доработки — 26.03.17