УДК 517.925

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ЧАСТИЧНО РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ, В СЛУЧАЕ ПОЛЮСА

Д. Е. Лиманская

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова
ул. Дворянская, 2, Одесса, 65026, Украина
e-mail: liman.diana@gmail.com

We study existence of analytic solutions to some systems of ordinary differential equations partially solved with respect to derivatives. We obtain sufficient conditions for a Cauchy problem to have an analytic solution in the case of a pole. An estimate for such solutions on a certain domain is given, and the question on the number of solutions has been studied.

Досліджуються питання існування аналітичних розв'язків деяких систем звичайних диференціальних рівнянь, частково розв'язуваних відносно похідних. Отримано достатні умови існування аналітичних розв'язків задачі Коші у випадку полюса. Встановлено оцінку таких розв'язків у деякій області та досліджено питання щодо числа розв'язків.

1. Введение. Основоположниками теории исследования поведения решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений вблизи особой точки были Р. Фукс, Ш. Брио, Ж. Буке, А. М. Ляпунов, А. Пуанкаре, П. Пенлеве и др.

Позднее исследования подобных задач разделились на 2 направления: исследования в вещественной и комплексной областях. В вещественной области изучением систем обыкновенных дифференциальных уравнений вблизи особой точки занимались P. R. Frommer, P. E. Hartmann, T. Wazewski [16], A. Winter, В. Н. Зубов, В. Ф. Мячин, А. В. Костин, А. Ф. Андреев, А. Д. Брюно и др.

В конце XIX века французский математик П. Пенлеве совместно с Р. Фуксом доказали теоремы, согласно которым были выделены классы уравнений, решения которых не имеют подвижных особых точек или существенно особых точек. Позднее изучением систем обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области занимались Э. И. Грудо, M. Jwano [11], W. Trjitzinsky [15], M. Hurukaru, W. Wasow, J. Malmquist [12], W. Strod [14] и др.

Отдельной задачей является изучение вопросов существования и асимптотического поведения решений систем уравнений, не разрешенных относительно производных. Исследования конкретных видов систем, не разрешенных относительно производных в комплексной области, проведены в работах M. Jwano, O. Song Guk [13], Pak Ponk, Chol Permissible, В. И. Громака и др.

Методы исследования в вещественной области систем, не разрешенных относительно производных, продолжены Р. Г. Грабовской и J. Diblic [3, 10], и развиты в комплексной области в работах Г. Е. Самковой [5], Н. В. Шарай [6, 8], Е. А. Михайленко и др.

Рассмотрим задачу Коши

$$z^d Y' = P(z)Y + F(z, Y, Y'), \tag{1}$$

$$Y(z) \to 0 \quad \text{при} \quad z \to 0, \quad z \in D_{10}, \tag{2}$$

где $d \in \mathbb{N}$, матрица $P\colon D_1 \to \mathbb{C}^{p\times p}$, $D_1 = \{z\colon \ | z |< R_1, R_1 > 0\} \subset \mathbb{C}$, $D_{10} = D_1 \backslash \{0\}$, $P(z)$ — аналитическая в области D_1 матрица, $\det(P(z)) \neq 0$ при $z \in D_{10}$, а вектор-функция $F\colon D_1 \times G_1 \times G_2 \to \mathbb{C}^p$, $G_k \subset \mathbb{C}^p$, $0 \in G_k$, $k = 1, 2$, $F(z, Y, Y')$ — аналитическая в области $D_1 \times G_1 \times G_2$ вектор-функция.

В настоящей работе исследуются вопросы существования аналитических решений задачи Коши (1), (2), удовлетворяющих дополнительному условию

$$Y^{'}(z) \to 0 \quad \text{при} \quad z \to 0, \quad z \in D_{10}. \tag{3}$$

Согласно методу аналитического продолжения решений [2], систему (1) изучим вдоль двух семейств кривых, а затем проведем аналитическое продолжение решений с некоторой кривой одного семейства с помощью кривых второго семейства на некоторую область.

2. Введение вспомогательных множеств и функций. Введем вспомогательные множества $I = \{z = te^{iv} \in \mathbb{C}\colon t \in (0, t_1), t_1 > 0, v \in (v_1, v_2), v_1 < v_2\}$.

При $z = z(t, v) = te^{iv}$ множеству $I \subset \mathbb{C}$ поставим в соответствие множество $\check{I}_{t,v}(t_1) \subset \subset \mathbb{R}^2$,

$$\check{I}_{t,v}(t_1) = \left\{(t, v) \in \mathbb{R}^2\colon t \in (0, t_1),\ t_1 > 0,\ v \in (v_1, v_2),\ v_1 < v_2\right\}.$$

В частности, $\check{I}_{t,v_0}(t_1) = \{(t, v) \in \mathbb{R}^2\colon t \in (0, t_1),\ v = v_0,\ v_0 \in (v_1, v_2)\}$, где v_0 — фиксированное число; $\check{I}_{t_0,v}(t_1) = \{(t, v) \in \mathbb{R}^2\colon t = t_0, t_0 \in (0, t_1), v \in (v_1, v_2)\}$, где t_0 — фиксированное число.

Пусть вещественнозначные функции $p(t, v)$, $g(t, v)$ принимают неотрицательные значения на множестве $\check{I}_{t,v}(t_1)$.

Определение 1. *Будем говорить, что при $v_0 \in [v_1, v_2]$ функция $p(t, v_0)$ имеет свойство Q_1 относительно функции $g(t, v_0)$ на множестве $\check{I}_{t,v_0}(t_1)$ при $t \to +0$, если функция $p(t, v_0)$ является функцией более высокого порядка малости относительно функции $g(t, v_0)$ при $t \to +0$.*

Определение 2. *Будем говорить, что функция $p(t_0, v)$ имеет свойство Q_2 относительно функции $g(t_0, v)$ на множестве $\check{I}_{t_0,v}(t_1)$, если существуют такие $C_1 \geq 0$, $C_2 \geq 0$, что на этом множестве выполняется неравенство*

$$C_1\, g(t_0, v) \leq p(t_0, v) \leq C_2\, g(t_0, v)$$

для любого $t_0 \in (0, t_1)$.

Введем вспомогательные вектор-функции

$$\varphi^{(0)}(z) = \left(\varphi_1^{(0)}(z), \ldots, \varphi_p^{(0)}(z)\right), \quad \varphi^{(0)}\colon I \to \mathbb{C}^p, \quad z = z(t, v) = te^{iv},$$

$$\psi_j^{(0)}(t, v) = \left|\varphi_j^{(0)}(z(t, v))\right|, \quad j = \overline{1, p}, \quad \psi^{(0)}(t, v) = \left(\psi_1^{(0)}(t, v), \ldots, \psi_p^{(0)}(t, v)\right).$$

Определение 3. *Будем говорить, что аналитическая на множестве I вектор-функция $\varphi^{(0)}(z)$ имеет свойство T_0 при $z \in I$, если для любых $(t, v) \in \check{I}_{t,v}(t_1)$ выполнены* *следующие условия:*

$$\psi_j^{(0)}(t,v) > 0, \quad \left(\psi_j^{(0)}(t,v)\right)_t^{'} > 0, \quad \left(\psi_j^{(0)}(t,v)\right)_v^{'} \geq 0,$$

$$\psi_j^{(0}(+0,v) = 0, \quad \left(\psi_j^{(0)}(+0,v)\right)_t^{'} = 0, \quad j = \overline{1,p}.$$

3. Система (1) на множестве $\check{I}_{t,v_0}(t_1)$. Рассмотрим систему (1) на отрезке $\check{I}_{t,v_0}(t_1)$ при произвольном фиксированном $v_0 \in (v_1, v_2)$.

При $z = z(t,v_0) = te^{iv_0}$ в системе (1) представим каждую из функций и матриц в алгебраической форме, отделяя вещественные и мнимые части и вводя следующие обозначения:

$$Y(z(t,v_0)) = \tilde{Y}(t), \quad \tilde{Y}(t) = \tilde{Y}_1(t) + i\tilde{Y}_2(t),$$

$$\tilde{Y}_j(t) = \mathrm{col}\left(\tilde{Y}_{j1}(t), \ldots, \tilde{Y}_{jp}(t)\right), \quad j = 1,2,$$

$$P(z(t,v_0)) = \|\tilde{p}_{jk}(t)\|_{j,k=1}^p = \tilde{P}_1(t) + i\tilde{P}_2(t),$$

$$\tilde{P}_s(t) = \|\tilde{p}_{jk}^{(s)}(t)\|_{j,k=1}^p, \quad s = 1,2,$$

где $\tilde{p}_{jk}(t) = \tilde{p}_{jk}^{(1)}(t) + i\tilde{p}_{jk}^{(2)}(t)$, $j,k = \overline{1,p}$,

$$F(z(t,v_0), Y(z(t,v_0)), Y'(z(t,v_0))) = \tilde{F}\left(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_1^{'}, \tilde{Y}_2^{'}\right),$$

$$\tilde{F}\left(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_1^{'}, \tilde{Y}_2^{'}\right) = \mathrm{col}\left(\tilde{F}_1(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_1^{'}, \tilde{Y}_2^{'}), \ldots, \tilde{F}_p(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_1^{'}, \tilde{Y}_2^{'})\right),$$

$$\tilde{F}_j\left(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_1^{'}, \tilde{Y}_2^{'}\right) = \tilde{F}_{1j}\left(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_1^{'}, \tilde{Y}_2^{'}\right) + i\tilde{F}_{2j}\left(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_1^{'}. \tilde{Y}_2^{'}\right), \quad j = \overline{1,p}.$$

Поскольку для каждого $z = te^{iv}$ выполняется

$$\tilde{Y}^{'}(t) = Y^{'}(z)\, e^{iv},$$

то при $z = z(t,v_0) = te^{iv_0}$ система (1) сводится к виду

$$t^d\left(\tilde{Y}_1^{'} + i\tilde{Y}_2^{'}\right) = (\tilde{P}_1 + i\tilde{P}_2)\left(\tilde{Y}_1 + i\tilde{Y}_2\right)e^{(1-d)iv_0} + \\ + e^{(1-d)iv_0}\left(\mathrm{Re}\,\tilde{F}\left(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_1^{'}, \tilde{Y}_2^{'}\right) + i\mathrm{Im}\,\tilde{F}\left(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_1^{'}, \tilde{Y}_2^{'}\right)\right). \qquad (4)$$

Введем матрицы и вектор-функцию вида

$$\tilde{P}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{P}_1(t) & -\tilde{P}_2(t) \\ \tilde{P}_2(t) & \tilde{P}_1(t) \end{pmatrix},$$

$$\tilde f\left(t,\tilde Y_1,\tilde Y_2,\tilde Y_1',\tilde Y_2'\right)=\mathrm{col}\Bigg(\tilde F_{11}\left(t,\tilde Y_1,\tilde Y_2,\tilde Y_1',\tilde Y_2'\right),\ldots,\tilde F_{1p}\left(t,\tilde Y_1,\tilde Y_2,\tilde Y_1',\tilde Y_2'\right),$$

$$\tilde F_{21}\left(t,\tilde Y_1,\tilde Y_2,\tilde Y_1',\tilde Y_2'\right),\ldots,\tilde F_{2p}\left(t,\tilde Y_1,\tilde Y_2,\tilde Y_1',\tilde Y_2'\right)\Bigg), \tag{5}$$

$$\tilde Q_1(v_0)=\begin{pmatrix}\cos((d-1)v_0)E & \sin((d-1)v_0)E\\ -\sin((d-1)v_0)E & \cos((d-1)v_0)E\end{pmatrix},$$

где E — единичная матрица размерности $p\times p$.

Приравняем в левой и правой частях системы (4) действительные и мнимые части указанных вектор-функций. Тогда система (4) сведется к системе

$$t^d\begin{pmatrix}\tilde Y_1'(t)\\ \tilde Y_2'(t)\end{pmatrix}=\tilde P(t)\tilde Q_1(v_0)\begin{pmatrix}\tilde Y_1(t)\\ \tilde Y_2(t)\end{pmatrix}+\tilde Q_1(v_0)\tilde f\left(t,\tilde Y_1,\tilde Y_2,\tilde Y_1',\tilde Y_2'\right). \tag{6}$$

Таким образом, система (1) вдоль отрезка $\check I_{t,v_0}(t_1)$ при произвольном фиксированном $v_0\in(v_1,v_2)$ сведется к системе (6).

4. Система (1) на множестве $\check I_{t_0,v}(t_1)$. Рассмотрим систему (1) вдоль дуги окружности $\check I_{t_0,v}(t_1)$ при произвольном фиксированном $t_0\in(0,t_1)$.

При $z=z(t_0,v)=t_0e^{iv}$ в системе (1) представим каждую из функций и матриц в алгебраической форме, отделяя вещественные и мнимые части и вводя следующие обозначения:

$$Y(z(t_0,v))=\hat Y(v),\quad \hat Y(v)=\hat Y_1(v)+i\hat Y_2(v),$$

$$\hat Y_j(v)=\mathrm{col}\left(\hat Y_{j1}(v),\ldots,\hat Y_{jp}(v)\right),\quad j=1,2,$$

$$P(z(t_0,v))=\|\hat p_{jk}(v)\|_{k,j=1}^p=\hat P_1(v)+i\hat P_2(v),$$

$$\hat P_s(v)=\|\hat p_{jk}^{(s)}(v)\|_{j,k=1}^p,\quad s=1,2,$$

где $\hat p_{jk}(v)=\hat p_{jk}^{(1)}(v)+i\hat p_{jk}^{(2)}(v)$, $j,k=\overline{1,p}$,

$$F\left(z(t_0,v),Y(z(t_0,v)),Y'(z(t_0,v))\right)=\hat F\left(v,\hat Y_1,\hat Y_2,\hat Y_1',\hat Y_2'\right),$$

$$\hat F\left(v,\hat Y_1,\hat Y_2,\hat Y_1',\hat Y_2'\right)=\mathrm{col}\left(\hat F_1\left(v,\hat Y_1,\hat Y_2,\hat Y_1',\hat Y_2'\right),\ldots,\hat F_p\left(v,\hat Y_1,\hat Y_2,\hat Y_1',\hat Y_2'\right)\right),$$

$$\hat F_j\left(v,\hat Y_1,\hat Y_2,\hat Y_1',\hat Y_2'\right)=\hat F_{1j}\left(v,\hat Y_1,\hat Y_2,\hat Y_1',\hat Y_2'\right)+i\hat F_{2j}\left(v,\hat Y_1,\hat Y_2,\hat Y_1',\hat Y_2'\right),\quad j=\overline{1,p}.$$

Поскольку для каждого фиксированного $z=te^{iv}$ выполняется

$$\hat Y'(v)=Y'(z)\,ite^{iv},$$

то при $z = z(t_0, v) = t_0 e^{iv}$ система (1) сводится к виду

$$t_0^{d-1} e^{iv(d-1)} \left(\hat{Y}_1' + i\hat{Y}_2'\right) = i\left(\hat{P}_1 + i\hat{P}_2\right)\left(\hat{Y}_1 + i\hat{Y}_2\right) + \\ + i\left(\mathrm{Re}\hat{F}\left(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}_1', \hat{Y}_2'\right) + i\mathrm{Im}\,\hat{F}\left(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}_1', \hat{Y}_2'\right)\right). \quad (7)$$

Введем матрицы и вектор-функцию вида

$$\hat{P}(v) = \begin{pmatrix} \hat{P}_1(v) & -\hat{P}_2(v) \\ \hat{P}_2(v) & \hat{P}_1(v) \end{pmatrix},$$

$$\hat{f}\left(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}_1', \hat{Y}_2'\right) = \mathrm{col}\Bigg(\hat{F}_{11}\left(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}_1', \hat{Y}_2'\right), \ldots, \hat{F}_{1p}\left(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}_1', \hat{Y}_2'\right), \\ \hat{F}_{21}\left(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}_1', \hat{Y}_2'\right), \ldots, \hat{F}_{2p}\left(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}_1', \hat{Y}_2'\right)\Bigg),$$

$$\hat{Q}_1(v) = \begin{pmatrix} \sin((d-1)v)E & -\cos((d-1)v)E \\ \cos((d-1)v)E & \sin((d-1)v)E \end{pmatrix},$$

Приравняем в левой и правой частях системы (7) действительные и мнимые части приведенных вектор-функций. Тогда система (7) сведется к виду

$$t_0^{d-1} \begin{pmatrix} \hat{Y}_1'(v) \\ \hat{Y}_2'(v) \end{pmatrix} = \hat{P}(v)\hat{Q}_1(v) \begin{pmatrix} \hat{Y}_1(v) \\ \hat{Y}_2(v) \end{pmatrix} + \hat{Q}_1(v)\hat{f}\left(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}_1', \hat{Y}_2'\right). \quad (8)$$

Таким образом, система (1) вдоль дуги окружности $\check{I}_{t_0,v}(t_1)$ при произвольном фиксированном $t_0 \in (0, t_1)$ сведется к виду (8).

5. Некоторые классы функций и свойства систем. Введем вспомогательное свойство S_{1d}, согласно которому элементы матрицы $P(z)$ удовлетворяют некоторым условиям.

Определение 4. *Будем говорить, что матрица $P(z)$ имеет свойство S_{1d} относительно вектор-функции $\varphi^{(0)}(z)$, если выполняются следующие условия:*

1) для каждого $v_0 \in (v_1, v_2)$ и каждого $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ функция $t^d \left(\psi_j^{(0)}(z(t, v_0))\right)_t'$ имеет свойство Q_1 относительно функции $|\tilde{p}_{jj}(t)|\, \psi_j^{(0)}(z(t, v_0))$ на множестве $\check{I}_{t,v_0}(t_1)$ при $t \to +0$;

2) для каждого $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ функция $t_0^{d-1} \left(\psi_j^{(0)}(t_0, v)\right)_v'$ имеет свойство Q_2 относительно функции $|\hat{p}_{jj}(v)|\, \psi_j^{(0)}(t_0, v)$ на множестве $\check{I}_{t_0,v}(t_1)$;

3) для каждого $v_0 \in (v_1, v_2)$ и каждого $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ функции $|\tilde{p}_{jk}(t)|\, \psi_k^{(0)}(t, v_0)$, $k = \overline{1, p}$, $j \neq k$, имеют свойство Q_1 относительно функции $t^d \left(\psi_j^{(0)}(t, v_0)\right)_t'$ на множестве $\check{I}_{t,v_0}(t_1)$ при $t \to +0$;

4) для каждого $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ *функции* $|\hat{p}_{jk}(v)|\, \psi_k^{(0)}(t_0, v)$, $k = \overline{1, p}$, $j \neq k$, *имеют свойство* Q_2 *относительно функции* $t_0^{d-1} \left(\psi_j^{(0)}(t_0, v) \right)'_v$ *на множестве* $\check{I}_{t_0,v}(t_1)$.

Введем вспомогательное свойство M_{1d}, согласно которому элементы вектор-функции $F\,(z, Y, Y')$ удовлетворяют некоторым условиям.

Обозначим множества

$$\widetilde{\Omega}\left(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0))\right) =$$
$$= \left\{ \left(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2\right) : t \in (0, t_1), \tilde{Y}_{1j}^2 + \tilde{Y}_{2j}^2 < \delta_j^2 \left(\psi_j^{(0)}(t, v_0)\right)^2, j = \overline{1, p} \right\},$$
$$v_0 \quad \text{фиксировано на} \quad (v_1, v_2), \tag{9}$$
$$\widehat{\Omega}\left(\tau, \varphi^{(0)} z((t_0, v))\right) =$$
$$= \left\{ \left(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2\right) : v \in (v_1, v_2),\ \hat{Y}_{1j}^2 + \hat{Y}_{2j}^2 < \tau_j^2 \left(\psi_j^{(0)}(t_0, v)\right)^2, j = \overline{1, p} \right\},$$
$$t_0 \quad \text{фиксировано на} \quad (0, t_1), \tag{10}$$

где $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_p)\,, \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_p)\,, \delta_j, \tau_j \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, j = \overline{1, p}$.

Определение 5. *Будем говорить, что вектор-функция* $F(z, Y, Y')$ *имеет свойство* M_{1d} *относительно вектор-функции* $\varphi^{(0)}(z)$, *если выполняются следующие условия:*

1) для каждого $v_0 \in (v_1, v_2)$ *и каждого* $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ *при*

$$(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) \in \widetilde{\Omega}\left(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0))\right)$$

функции $\tilde{F}_{kj}\left(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_1', \tilde{Y}_2'\right)$, $k = 1, 2$, *имеют свойство* Q_1 *на множестве* $\check{I}_{t,v_0}(t_1)$ *относительно функции* $|p_{jj}(z(t, v_0))|\, \psi_j^{(0)}(t, v_0)$ *при* $t \to +0$;

2) для каждого $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ *при*

$$(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2) \in \widehat{\Omega}\left(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))\right)$$

функции $\hat{F}_{kj}\left(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}_1', \hat{Y}_2'\right)$, $k = 1, 2$, *имеют свойство* Q_2 *относительно функции* $\left(|p_{jj}(z(t_0, v))|\, \psi_j^{(0)}(t_0, v)\right)$ *на множестве* $\check{I}_{t_0,v}(t_1)$.

Проведем дальнейшую классификацию свойств матрицы $P(z)$.

Введем вспомогательные функции $\widetilde{\alpha}_{jk}(t)$, $\widehat{\alpha}_{jk}(v)$, $j,k=\overline{1,p}$, так, что

$$\begin{aligned}\cos\left(\widetilde{\alpha}_{jk}(t)\right) &= \frac{\tilde{p}_{jk}^{(1)}(t)}{\sqrt{\left(\tilde{p}_{jk}^{(1)}(t)\right)^2+\left(\tilde{p}_{jk}^{(2)}(t)\right)^2}},\\ \sin\left(\widetilde{\alpha}_{jk}(t)\right) &= \frac{\tilde{p}_{jk}^{(2)}(t)}{\sqrt{\left(\tilde{p}_{jk}^{(1)}(t)\right)^2+\left(\tilde{p}_{jk}^{(1)}(t)\right)^2}},\end{aligned} \qquad j,k=\overline{1,p}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\widehat{\alpha}_{jk}(v)\right) &= \frac{\hat{p}_{jk}^{(1)}(v)}{\sqrt{\left(\hat{p}_{jk}^{(1)}(v)\right)^2+\left(\hat{p}_{jk}^{(2)}(v)\right)^2}},\\ \sin\left(\widehat{\alpha}_{jk}(v)\right) &= \frac{\hat{p}_{jk}^{(2)}(v)}{\sqrt{\left(\hat{p}_{jk}^{(1)}(v)\right)^2+\left(\hat{p}_{jk}^{(2)}(v)\right)^2}},\end{aligned} \qquad j,k=\overline{1,p}. \tag{12}$$

Введем области $\Lambda_{m,k}(t_1)$, $m,k\in\{+,-\}$, которые определяются следующим образом:

$$\Lambda_{+,+}(t_1)=\Big\{(t,v)\colon \cos\left((d-1)v+\widetilde{\alpha}_{jj}(t)\right)>0,\ \ \sin\left((d-1)v+\widehat{\alpha}_{jj}(v)\right)>0,$$

$$j=\overline{1,p},\ \ t\in(0,t_1),\ \ v\in(v_1,v_2)\Big\},$$

$$\Lambda_{+,-}(t_1)=\Big\{(t,v)\colon \cos\left((d-1)v+\widetilde{\alpha}_{jj}(t)\right)>0,\ \ \sin\left((d-1)v+\widehat{\alpha}_{jj}(v)\right)<0,$$

$$j=\overline{1,p},\ \ t\in(0,t_1),\ \ v\in(v_1,v_2)\Big\},$$

$$\Lambda_{-,+}(t_1)=\Big\{(t,v)\colon \cos\left((d-1)v+\widetilde{\alpha}_{jj}(t)\right)<0,\ \ \sin\left((d-1)v+\widehat{\alpha}_{jj}(v)\right)>0,$$

$$j=\overline{1,p},\ \ t\in(0,t_1),\ \ v\in(v_1,v_2)\Big\},$$

$$\Lambda_{-,-}(t_1)=\Big\{(t,v)\colon \cos\left((d-1)v+\widetilde{\alpha}_{jj}(t)\right)<0,\ \ \sin\left((d-1)v+\widehat{\alpha}_{jj}(v)\right)<0,$$

$$j=\overline{1,p},\ \ t\in(0,t_1),\ \ v\in(v_1,v_2)\Big\}.$$

Определение 6. *Будем говорить, что система (1) принадлежит классу* $C_{m,k}$, *если матрица* $P(z)=P(te^{iv})$ *такова, что* $(t,v)\in\Lambda_{m,k}$, $m,k\in\{+,-\}$.

Будем полагать, что

$$G_{2,m,k}(t_1)=\Big\{z=z(t,v)\colon 0<|z|<t_2,\ \ (t,v)\in\Lambda_{m,k}(t_1),\Big\},\quad m,k\in\{+,-\}.$$

6. Основные результаты. Изучим асимптотику решений задачи Коши (1), (2), удовлетворяющих дополнительному условию (3), в случае, когда система (1) принадлежит одному из классов $C_{m,k}$, $m,k\in\{+,-\}$, и $t_2=\min(t_1,R_1)$.

Теорема 1. *Пусть для системы (1) выполняются следующие условия:*

1) матрица $P(z)$ является аналитической в области D_1 и имеет свойство S_{1d} относительно аналитической вектор-функции $\varphi^{(0)}(z)$;

2) вектор-функция $F(z,Y,Y')$ является аналитической в области $D_1 \times G_1 \times G_2$ и имеет свойство M_{1d} относительно аналитической вектор-функции $\varphi^{(0)}(z)$;

3) система (1) принадлежит одному из классов $C_{+,k}$, $k \in \{+,-\}$.

Тогда при $k \in \{+,-\}$ существует $t^* \in (0,t_2)$, для которого решения системы (1), удовлетворяющие начальным условиям $Y(z_0) = Y_0$ при

$$z_0 \in G_{2,+,k}(t^*), \quad Y_0 \in \Big\{ Y\colon |Y_j(z_0)| < \delta_j |\varphi_j^{(0)}(z_0)|, \ \delta_j > 0, \ j = \overline{1,p} \Big\},$$

аналитичны в области $D_1 \cap G_{2,+,k}(t^*)$, и для них в этой области справедлива оценка

$$|Y_j(z)|^2 < \delta_j^2 \left| \varphi_j^{(0)}(z) \right|^2, \quad j = \overline{1,p}. \tag{13}$$

Доказательство. 1. Рассмотрим систему (1) на отрезке $\check{I}_{t,v_0}(t_2)$ при фиксированном значении $v_0 \in (v_1, v_2)$.

Рассмотрим множество $\widetilde{\Omega}\left(\delta, \varphi^{(0)}(z(t,v_0))\right)$ как пересечение множеств $\widetilde{\Omega_j}$ вида

$$\widetilde{\Omega}\left(\delta, \varphi^{(0)}(z(t,v_0))\right) = \bigcap_{j=1}^{p} \widetilde{\Omega_j}\left(\delta, \varphi^{(0)}(z(t,v_0))\right),$$

где

$$\widetilde{\Omega_j}\left(\delta, \varphi^{(0)}(z(t,v_0))\right) = \left\{ \left(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2\right) : \tilde{Y}_{1j}^2 + \tilde{Y}_{2j}^2 < \delta_j^2 \left(\psi_j^{(0)}(t,v_0)\right)^2, \ t \in (0,t_1) \right\}.$$

Часть границы множества $\widetilde{\Omega_j}$, $j \in \{1,2,\ldots,p\}$, будем обозначать так:

$$\partial\,\widetilde{\Omega_j}\left(\delta, \varphi^{(0)}(z(t,v_0))\right) = \left\{ \left(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2\right) : \tilde{Y}_{1j}^2 + \tilde{Y}_{2j}^2 = \delta_j^2 \left(\psi_j^{(0)}(t,v_0)\right)^2, \right.$$
$$\left. \tilde{Y}_{1k}^2 + \tilde{Y}_{2k}^2 < \delta_k^2 \left(\psi_k^{(0)}(t,v_0)\right)^2, \ k = \overline{1,p}, \ k \neq j, \ t \in (0,t_1) \right\}.$$

Обозначим

$$\widetilde{\Phi_j}\left(t, \tilde{Y}(t)\right) = \tilde{Y}_{1j}^2(t) + \tilde{Y}_{2j}^2(t) - \delta_j^2 \left(\psi_j^{(0)}(t,v_0)\right)^2, \quad j \in \{1,2,\ldots,p\}.$$

Тогда вектор внешней нормали поверхности $\partial\,\widetilde{\Omega_j}(\delta, \varphi(z(t,v_0)))$ при фиксированном $j \in \{1,\ldots,p\}$ имеет вид

$$\frac{\bar{N}_j}{2} = \left(-\delta_j^2\, \psi_j^{(0)}(t,v_0)\, (\psi_j^{(0)}(t,v_0))'_t, 0,\ldots,0, \tilde{Y}_{1j}, 0,\ldots,0, \tilde{Y}_{2j}, 0,\ldots,0 \right).$$

Пусть $\bar{T}$ — вектор поля направлений системы (6) в произвольной фиксированной точке $(t, \tilde{Y}(t)) \in \partial\widetilde{\Omega}_j(\delta, \varphi(z(t, v_0)))$, $j \in \{1, \ldots, p\}$.

Обозначим

$$S_{1j} = \sum_{k=1}^{p} \Big[\Big(\tilde{p}_{jk}^{(1)}(t) \cos((d-1)v_0) - \tilde{p}_{jk}^{(2)}(t) \sin((d-1)v_0) \Big) \tilde{Y}_{1k} +$$

$$+ \Big(\tilde{p}_{jk}^{(1)}(t) \sin((d-1)v_0) - \tilde{p}_{jk}^{(2)}(t) \cos((d-1)v_0) \Big) \tilde{Y}_{2k} \Big] +$$

$$+ \Big(\tilde{F}_{1j} \cos((d-1)v_0) - \tilde{F}_{2j} \sin((d-1)v_0) \Big), \quad j = \overline{1,p},$$

$$S_{2j} = \sum_{k=1}^{p} \Big[\Big(\tilde{p}_{jk}^{(1)}(t) \cos((d-1)v_0) - \tilde{p}_{jk}^{(2)}(t) \sin((d-1)v_0) \Big) \tilde{Y}_{2k} +$$

$$+ \Big(\tilde{p}_{jk}^{(1)}(t) \sin((d-1)v_0) + \tilde{p}_{jk}^{(2)}(t) \cos((d-1)v_0) \Big) \tilde{Y}_{1k} \Big] +$$

$$+ \Big(\tilde{F}_{1j} \sin((d-1)v_0) + \tilde{F}_{2j} \cos((d-1)v_0) \Big), \quad j = \overline{1,p}.$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$\left(t^d \bar{T}, \frac{\bar{N}_j}{2} \right) = -t^d \delta_j^2 \, \psi_j^{(0)}(t, v_0) \, \Big(\psi_j^{(0)}(t, v_0) \Big)'_t + S_{1j}\tilde{Y}_{1j} + S_{2j}\tilde{Y}_{2j}, \quad j = \overline{1,p},$$

$$\left(t^d \bar{T}, \frac{\bar{N}_j}{2} \right) = -t^d \delta_j^2 \psi_j^{(0)}(t, v_0) \Big(\psi_j^{(0)}(t, v_0) \Big)'_t + \Big(\tilde{p}_{jj}^{(1)}(t) \cos((d-1)v_0) - \tilde{p}_{jj}^{(2)}(t) \sin((d-1)v_0) \Big) \times$$

$$\times \delta_j^2 \big(\psi_j^{(0)}(t, v_0)\big)^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{p} \Big(\tilde{p}_{jk}^{(1)}(t) \cos((d-1)v_0) - \tilde{p}_{jk}^{(2)}(t) \sin((d-1)v_0) \Big) \times$$

$$\times \Big(\tilde{Y}_{1k}\tilde{Y}_{1j} + \tilde{Y}_{2k}\tilde{Y}_{2j} \Big) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{p} \Big(\tilde{p}_{jk}^{(1)}(t) \sin((d-1)v_0) + \tilde{p}_{jk}^{(2)}(t) \cos((d-1)v_0) \Big) \times$$

$$\times \Big(\tilde{Y}_{2k}\tilde{Y}_{1j} - \tilde{Y}_{1k}\tilde{Y}_{2j} \Big) + \Big(\tilde{F}_{1j} \cos((d-1)v_0) - \tilde{F}_{2j} \sin((d-1)v_0) \Big) \tilde{Y}_{1j} +$$

$$+ \Big(\tilde{F}_{1j} \sin((d-1)v_0) + \tilde{F}_{2j} \cos((d-1)v_0) \Big) \tilde{Y}_{2j}, \quad j = \overline{1,p}. \tag{14}$$

Поскольку, по условию, матрица $P(z)$ имеет свойство S_{1d}, а вектор-функция $F(z, Y, Y')$ — свойство M_{1d} относительно вектор-функции $\varphi^{(0)}(z)$, то

$$\left(t^d \bar{T}, \frac{\bar{N}_j}{2} \right) = \sqrt{\big(\tilde{p}_{jj}^{(1)}(t)\big)^2 + \big(\tilde{p}_{jj}^{(2)}(t)\big)^2} \, \big(\cos((d-1)v_0 + \widetilde{\alpha}_{jj}(t))\big) \, (1 + o(t)),$$
$$j = \overline{1,p}, \quad \text{при} \quad t \to +0, \tag{15}$$

где функция $\widetilde{\alpha}_{jj}(t)$ определена равенством (11).

Так как система (1) принадлежит одному из классов $C_{+,k}(t,v)$, $k \in \{+,-\}$, то существует такое t^*, $t^* \in (0,t_2)$, что при $t \in (0,t^*)$ справедливо $\left(t^d\bar{T}, \dfrac{\bar{N}_j}{2}\right) > 0$, $j = \overline{1,p}$. Следовательно, при $t \in (0,t^*)$ поверхность $\partial\,\widetilde{\Omega}(\delta,\varphi^{(0)}(z(t,v_0)))$ является поверхностью без контакта для системы (6), причем при убывании переменной t интегральная кривая входит в область $\widetilde{\Omega}(\delta,\varphi^{(0)}(z(t,v_0)))$.

Согласно условиям 1 – 3 теоремы, через каждую точку множества $\widetilde{\Omega}(\delta,\varphi^{(0)}(z(t,v_0))) \cup \cup\partial\,\widetilde{\Omega}(\delta,\varphi^{(0)}(z(t,v_0))) \cap (t = t^*)$ проходит хотя бы одна гладкая интегральная кривая системы (6), и все интегральные кривые данной системы, проходящие через точки

$$\widetilde{\Omega}(\delta,\varphi^{(0)}(z(t,v_0))) \cup \partial\widetilde{\Omega}(\delta,\varphi^{(0)}(z(t,v_0))) \cap (t = t^*),$$

остаются в области $\widetilde{\Omega}(\delta,\varphi^{(0)}(z(t,v_0)))$ при $(t,v) \in \Lambda_{+,k}(t^*)$, $k \in \{+,-\}$, $v_0 \in (v_1,v_2)$. При этом выполнено неравенство

$$|Y_{sj}(z(t,v_0))|^2 < \delta_j{}^2\left(\psi_j^{(0)}(t,v_0)\right)^2, \quad j = \overline{1,p}, \quad s = 1,2, \tag{16}$$

при $(t,v) \in \Lambda_{+,k}(t^*)$, $k \in \{+,-\}$.

2. Рассмотрим поведение решений системы (1) вдоль дуги окружности $\check{I}_{t_0,v}(t_1)$ при фиксированном $t_0 \in (0,t_1)$. Рассмотрим множество $\widehat{\Omega}(\tau,\varphi^{(0)}(z(t_0,v)))$ как пересечение множеств $\widehat{\Omega}_j$ вида

$$\widehat{\Omega}\left(\tau,\varphi^{(0)}(z(t_0,v))\right) = \bigcap_{j=1}^{p}\widehat{\Omega}_j\left(\tau,\varphi^{(0)}(z(t_0,v))\right),$$

где

$$\widehat{\Omega}_j\left(\tau,\varphi^{(0)}(z(t_0,v))\right) = \left\{\left(v,\hat{Y}_1,\hat{Y}_2\right): \hat{Y}_{1j}^2 + \hat{Y}_{2j}^2 < \tau_j^2\left(\psi_j^{(0)}(t_0,v)\right)^2,\ v \in (v_1,v_2)\right\}.$$

Часть границы множества $\widetilde{\Omega_j}$, $j = \{1,2,\ldots,p\}$, будем обозначать так:

$$\partial\,\widehat{\Omega}_j\left(\tau,\varphi^{(0)}(z(t_0,v))\right) = \left\{\left(v,\hat{Y}_1,\hat{Y}_2\right): \hat{Y}_{1j}^2 + \hat{Y}_{2j}^2 = \tau_j^2\left(\psi_j^{(0)}(t_0,v)\right)^2,\right.$$
$$\left.\hat{Y}_{1k}^2 + \hat{Y}_{2k}^2 < \tau_k^2\left(\psi_k^{(0)}(t_0,v)\right)^2,\ k = \overline{1,p},\ k \neq j,\ v \in (v_1,v_2)\right\}.$$

Изучим поведение интегральных кривых системы (8) на поверхности

$$\partial\,\widehat{\Omega}_j\left(\tau,\varphi^{(0)}(z(t_0,v))\right)$$

при фиксированном $j \in \{1,\ldots,p\}$:

$$\left(t_0^{d-1}\bar{T}, \frac{\bar{N}_j}{2}\right) = -t_0^{d-1}\tau_j^2 {\psi_j}^{(0)}(t_0,v)\left({\psi_j}^{(0)}(t_0,v)\right)'_v +$$
$$+\left(\hat{p}_{jj}^{(1)}(v)\cos((d-1)v) - \hat{p}_{jj}^{(2)}(v)\sin((d-1)v)\right)\tau_j^2\left(\psi_j^{(0)}(t_0,v)\right)^2 +$$
$$+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p}\left(\hat{p}_{jk}^{(1)}(v)\cos((d-1)v) - \hat{p}_{jk}^{(2)}(v)\sin((d-1)v)\right)\left(\hat{Y}_{1k}\hat{Y}_{1j} + \hat{Y}_{2k}\hat{Y}_{2j}\right) +$$
$$+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p}\left(-\hat{p}_{jk}^{(1)}(v)\sin((d-1)v) - \hat{p}_{jk}^{(2)}(v)\cos((d-1)v)\right)\left(\hat{Y}_{2k}\hat{Y}_{1j} - \hat{Y}_{1k}\hat{Y}_{2j}\right) +$$
$$+\left(\hat{F}_{1j}\cos((d-1)v) - \hat{F}_{2j}\sin((d-1)v)\right)\hat{Y}_{1j} +$$
$$+\left(-\hat{F}_{1j}\sin((d-1)v) - \hat{F}_{2j}\cos((d-1)v)\right)\hat{Y}_{2j}, \quad j = \overline{1,p}. \tag{17}$$

Поскольку, по условию, матрица $P(z)$ имеет свойство S_{1d}, а вектор-функция $F(z,Y(z), Y'(z))$ — свойство M_{1d} относительно вектор-функции $\varphi^{(0)}(z)$, то

$$\left(t_0^{d-1}\bar{T}, \frac{\bar{N}_j}{2}\right) = \sqrt{\left(\hat{p}_{jj}^{(1)}(v)\right)^2 + \left(\hat{p}_{jj}^{(2)}(v)\right)^2}\left(\sin((d-1)v + \widehat{\alpha}_{jj}(v))\right)(1+\underline{O}(1)), \quad j = \overline{1,p},$$

при $t_0 \in (+0,t^*)$, $v \in (v_1,v_2)$, где функция $\widehat{\alpha}_{jj}(v)$ определена равенством (12). Следовательно,

$$\operatorname{sign}\left(t_0^{d-1}\bar{T}, \frac{\bar{N}_j}{2}\right) = \operatorname{sign}\left(\sin((d-1)v + \widehat{\alpha}_{jj}(v))\right), \quad j = \overline{1,p}, \quad v \in (v_1,v_2), \tag{18}$$

и существует $t^* \in (0;t_1)$ такое, что без ограничения общности для каждого фиксированного $t_0 \in (0,t^*)$ поверхность $\partial\widehat{\Omega}\left(\tau,\varphi^{(0)}(z(t_0,v))\right) \in \Lambda_{+,k}(t^*)$, $k \in \{+,-\}$, является поверхностью без контакта для системы (8).

Так как система (1) принадлежит классу $C_{+,k}(t,v)$, $k \in \{+,-\}$, то любая интегральная кривая системы (8), проходящая через точку множества $\widehat{\Omega}\left(\tau,\varphi^{(0)}(z(t_0,v))\right) \cap (v = v_0)$, $v_0 \in (v_1,v_2)$, если $(t,v) \in \Lambda_{+,+}(t^*)$, остается в области $\widehat{\Omega}\left(\tau,\varphi^{(0)}(z(t_0,v))\right)$ при убывании v, а если $(t,v) \in \Lambda_{+,-}(t^*)$, остается в области $\widehat{\Omega}\left(\tau,\varphi^{(0)}(z(t_0,v))\right)$ при возрастании v. При этом выполнены неравенства

$$\begin{gathered}|Y_{sj}(z(t_0,v))|^2 < {\tau_j}^2\left|\psi_j^{(0)}(t_0,v)\right|^2, \quad j = \overline{1,p}, \quad s = 1,2,\\ (t,v) \in \Lambda_{+,k}(t^*), \quad k \in \{+,-\}.\end{gathered} \tag{19}$$

3. Применим метод аналитического продолжения для задач, разрешенных относительно производных, предложенный Р. Г. Грабовской [2] и развитый для задач, не разрешенных относительно производных, Г. Е. Самковой [5, 6] и использованный Н. В. Шарай

при доказательстве пункта 3 теоремы 2.1 [8]. Предположим, что для векторов $\delta, \tau \in \mathbb{C}^p$, $\delta_j \neq 0$, $\tau_j \neq 0$, $j = \overline{1,p}$, выполняются неравенства

$$\delta_j^2 < \tau_j^2, \quad j = \overline{1,p}. \tag{20}$$

В пункте 1 доказательства настоящей теоремы получено, что вдоль кривой $\check{I}_{t,v_0}(t^*)$, $v_0 \in (v_1, v_2)$, при $t \in (0, t^*)$ существует бесконечно много непрерывно дифференцируемых решений системы (6), удовлетворяющих оценке (16). Обозначим множество таких решений $\{Y(z(t, v_0))\}$.

Любое решение $Y(z(t, v_0))$ из множества $\{Y(z(t, v_0))\}$ можно аналитически продолжить с $\check{I}_{t,v_0}(t^*)$, где $(t, v) \in \Lambda_{+,k}(t^*)$, при фиксированном $v_0 \in (v_1, v_2)$ на содержащую его область с сохранением оценки (16).

Из пункта 2 доказательства настоящей теоремы следует, что при выполнении неравенства (20) решение $Y(z(t, v))$ при фиксированном $v = v_0$ можно продолжить с кривой $\check{I}_{t,v_0}(t^*)$ вдоль кривых $\check{I}_{t_0,v}(t^*)$, $v \in (v_1, v_2)$, на множество $\widehat{\Omega}\left(\tau, \varphi^{(0)}(z(t^*, v))\right)$ при $t \in (0, |z(t_0, v)|]$. При этом аналитическое продолжение обозначим $Y(z)$. Получим множество решений $\{Y(z)\}$.

В итоге любое решение $Y(z)$ аналитически продолжаемо на $G_{2,+,k}(t^*) \times \{Y : |Y_{sj}| < \delta_j |\varphi_j(z_0)|,\ j = \overline{1,p},\ s = 1, 2\}$, причем в данной области выполнено неравенство (13). Значит, система (1) имеет бесконечно много аналитических решений, удовлетворяющих оценке (13) при $z \in D_1 \cap G_{2,+,k}(t^*)$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть для системы (1) выполняются следующие условия:*

1) матрица $P(z)$ является аналитической в области D_1 и имеет свойство S_{1d} относительно аналитической вектор-функции $\varphi^{(0)}(z)$;

2) вектор-функция $F(z, Y, Y')$ является аналитической в области $D_1 \times G_1 \times G_2$ и имеет свойство M_{1d} относительно аналитической вектор-функции $\varphi^{(0)}(z)$;

3) система (1) принадлежит одному из классов $C_{-,k}$, $k \in \{+, -\}$.

Тогда при $k \in \{+, -\}$ существует $t^* \in (0, t_1)$, для которого решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям $Y(z_0) = Y_0$ при $z_0 \in G_{2,-,k}(t^*)$, $Y_0 \in \{Y : |Y_j(z_0)| < \delta_j |\varphi_j^{(0)}(z_0)|,\ \delta_j > 0,\ j = \overline{1,p}\}$, аналитично в области $D_1 \cap G_{2,-,k}(t^*)$, и для него в этой области справедлива оценка (13).

Доказательство. 1. Рассмотрим систему (1) на отрезке $\check{I}_{t,v_0}(t_1)$ при фиксированном значении $v_0 \in (v_1, v_2)$. Скалярное произведение $\left(t^d \bar{T}, \dfrac{\bar{N}_j}{2}\right)$ будет иметь вид (14).

Поскольку, по условию, матрица $P(z)$ имеет свойство S_{1d}, а вектор-функция $F(z, Y, Y')$ — свойство M_{1d} относительно вектор-функции $\varphi^{(0)}(z)$, то выполняется (15).

Так как система (1) принадлежит одному из классов $C_{-,k}(t, v)$, $k \in \{+, -\}$, то существует такое t^*, что при $t \in (0, t^*)$ выполняется $\left(t^d \bar{T}, \dfrac{\bar{N}_j}{2}\right) < 0$, $j = \overline{1,p}$. Следовательно, при $t \in (0, t^*)$ поверхность $\partial\widetilde{\Omega}\left(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0))\right)$ является поверхностью без контакта для системы (6), причем при убывании переменной t интегральная кривая выходит из области $\widetilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)))$.

Согласно условиям 1 – 3 теоремы, существует хотя бы одна гладкая интегральная кривая системы (6), которая остается в области $\widetilde{\Omega}\left(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0))\right)$ на максимальном промежутке своего существования, и при $t \in (0, t^*)$ данная интегральная кривая остается в области $\widetilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)))$ при $(t, v) \in \Lambda_{-,k}(t^*)$, $k \in \{+, -\}$, $v_0 \in (v_1, v_2)$, $t \in (0, t^*)$. При этом выполнено неравенство (16) при $(t, v) \in \Lambda_{-,k}(t^*)$, $k \in \{+, -\}$.

2. Рассмотрим поведение решений системы (1) вдоль дуги окружности $\check{I}_{t_0,v}(t_1)$ при фиксированном $t_0 \in (0, t_1)$. Скалярное произведение $\left(t_0^{d-1}\bar{T}, \dfrac{\bar{N}_j}{2}\right)$ будет иметь вид (17).

Поскольку, по условию, матрица $P(z)$ имеет свойство S_{1d}, а вектор-функция $F(z, Y(z), Y'(z))$ — свойство M_{1d} относительно вектор-функции $\varphi^{(0)}(z)$, то выполняется (18).

Существует $t^* \in (0, t_1)$ такое, что без ограничения общности для каждого фиксированного $t_0 \in (0, t^*)$ поверхность $\partial\widehat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))) \in \Lambda_{-,k}(t^*)$, $k \in \{+, -\}$, является поверхностью без контакта для системы (8).

Так как система (1) принадлежит классу $C_{-,k}(t, v)$, $k \in \{+, -\}$, то любая интегральная кривая системы (8), проходящая через точку множества $\widehat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))) \cap (v = v_0)$, $v_0 \in (v_1, v_2)$, если $(t, v) \in \Lambda_{-,+}(t^*)$, остается в области $\widehat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v)))$ при убывании v, а если $(t, v) \in \Lambda_{-,-}(t^*)$, остается в области $\widehat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v)))$ при возрастании v. При этом выполнено неравенство (19) при $(t, v) \in \Lambda_{-,k}(t^*)$, $k \in \{+, -\}$.

3. Применим метод аналитического продолжения, использованный в пункте 3 доказательства теоремы 1. Предположим, что выполняются неравенства (20).

В пункте 1 доказательства настоящей теоремы получено, что вдоль кривой $\check{I}_{t,v_0}(t^*)$, $v_0 \in (v_1, v_2)$, при $t \in (0, t^*)$ существует хотя бы одно непрерывно дифференцируемое решение системы (6), удовлетворяющее оценке (16). Обозначим множество таких решений $\{Y(z(t, v_0))\}$.

Любое решение $Y(z(t, v_0))$ из множества $\{Y(z(t, v_0))\}$ можно аналитически продолжить с кривой $\check{I}_{t,v_0}(t^*)$, где $(t, v) \in \Lambda_{-,k}(t^*)$, при фиксированном $v_0 \in (v_1, v_2)$ на содержащую ее область с сохранением оценки (16).

Из пункта 2 доказательства настоящей теоремы следует, что при выполнении неравенства (20) решение $Y(z(t, v))$ при фиксированном $v = v_0$ можно продолжить с кривой $\check{I}_{t,v_0}(t^*)$ вдоль кривых $\check{I}_{t_0,v}(t^*)$ на множество $\widehat{\Omega}\left(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))\right) \cap (v = v_0)$ при $t \in \in (0, |z(t_0, v)|]$. При этом аналитическое продолжение обозначим $Y(z)$.

В итоге решение $Y(z)$ аналитически продолжаемо на $G_{2,-,k}(t^*) \times \{Y : Y_{sj}| < \delta_j |\varphi_j(z_0)|$, $j = \overline{1, p}$, $s = 1, 2\}$, причем в данной области выполнено неравенство (13). Значит, система (1) имеет хотя бы одно аналитическое решение, удовлетворяющее оценке (13) при $z \in \in D_1 \cap G_{2,-,k}(t^*)$.

Теорема 2 доказана.

7. Вывод. В настоящей работе задача (1)–(3) изучена в предположении, что матрица $P(z)$ аналитическая в области D_1, а вектор-функция $F(z, Y, Y')$ является аналитической всюду в $D_1 \times G_1 \times G_2$. Найдены достаточные условия существования или бесконечного множества аналитических решений задачи Коши (1), (2) на множестве $D_1 \cap G_{2,+,k}(t^*)$, или хотя бы одного аналитического решение на множестве $D_1 \cap G_{2,-,k}(t^*)$. Для этих решений получена оценка (13).

Литература

1. *Бохнер С., Мартин У.* Функции многих комплексных переменных. — М.: Изд-во иностр. лит., 1951. — 300 с.

2. *Грабовская Р. Г.* Об асимптотическом поведении решения системы двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка // Дифференц. уравнения. — 1975. — **11**, № 4. — С. 639–644.

3. *Грабовская Р. Г., Диблик Й.* Асимптотика систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных. — Деп. в ВИНИТИ, № 1786.
4. *Ганнинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных переменных. — М.: Мир, 1969. — 397 с.
5. *Самкова Г. Е.* Существование и асимптотическое поведение аналитических решений некоторых сингулярных дифференциальных систем, не разрешенных относительно производных // Дифференц. уравнения. — 1991. — **27**, № 11. — С. 2012 – 2013.
6. *Самкова Г. Е., Шарай Н. В.* Об исследовании некоторой полуявной системы дифференциальных уравнений в случае переменного пучка матриц // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 2. — С. 224 – 236.
7. *Самойленко А. М.* Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 11. — С. 1505 – 1517.
8. *Шарай Н. В., Самкова Г. Є.* Асимптотика розв'язків деяких напів'явних систем диференціальних рівнянь // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2006. — Вип. 314 – 315. — С. 181 – 188.
9. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование систем дифференциальных уравнений с вырождениями. — Киев: Вища шк., 1991. — 207 с.
10. *Diblic J.* On the an asymptotic behavior of solutions of a certain system of quasilinear differential equations not solved wich respect to derivatives // Rici mat. Univ. Parma. — 1987. — № 13. — P. 413 – 419.
11. *Jwano M.* A method to construct stable domain of a sectorial type // Funkc. ekvacioj. — 1999. — **42**, № 1. — P. 71 – 103.
12. *Malmquist J.* Sur l'edude analitique des solutions d'un systeme d'equations differentielles dans le voisinage d'un point singulier d'indetermination // Acta Math. — 1941. — P. 1 – 64, 73, 74, 87 – 129, 109 – 128.
13. *Song Guk O., Pak Ponk, Chol Permissible.* Boundary condition of a system of linear ordinary differential equations in a closed angle domain of complex plane // Kwahagwonthongbo Bull. Acad. Sci. DPR Korea. — 2001. — № 3. — P. 2 – 4.
14. *Strodt W.* Contributions to the asymptotic theory of ordinary differential equations in the complex domain // Mem. Amer. Math. Soc. — 1957. — № 13. — P. 1 – 81.
15. *Trjitzinsky W.* Theory of non-linear singular differential system // Trans. Amer. Math. Soc. — 1937. — № 42. — P. 225 – 321.
16. *Wazewski T.* Sur l'evaluation du domaine d'existence des fonctions implicites reelles ou complexes // Ann. Soc. Pol. Math. — 1947. — № 20. — P. 81 – 120.

Получено 30.03.15,
после доработки — 17.11.15