УДК 517.9

НАБЛИЖЕНИЙ СИНТЕЗ РОЗПОДІЛЕНОГО ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ШВИДКОКОЛИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

О. В. Перегуда, А. В. Русіна

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна
e-mail: perol@ukr.net
rusina.alina@gmail.com

We consider the problem of finding an approximation of an optimal control, with respect to a quadratic type quality criterion, in the form of a feedback for a linear-quadratic problem that consists of a hyperbolic equation with rapidly oscillating coefficients and a distributed control in the right-hand side. On the basis of an exact synthesis formula, an approximate form of the synthesis is substantiated; it is obtained by replacing the fast changing variables and making averaging.

Рассматривается задача нахождения приближенной формы оптимального управления в форме обратной связи (синтеза) для линейно квадратической задачи, состоящей из гиперболического уравнения с быстроколеблющимися коэффициентами и распределенным управлением в правой части, и квадратического критерия качества. На основании точной формулы синтеза обоснована его приближенная форма, заключающаяся в замене быстроколеблющихся параметров на усредненные.

Вступ. Для лінійно квадратичних нескінченновимірних задач оптимального керування [1–3] однією з важливих проблем є побудова наближеного синтезу (керування у формі оберненого зв'язку). У випадку наявності швидкоколивних коефіцієнтів, зокрема при моделюванні процесів у мікронеоднорідних середовищах, оптимальне керування сингулярно залежить від малого параметра. Тому при побудові наближених оптимальних регуляторів природним є перехід до усереднених характеристик. Для параболічних та гіперболічних рівнянь у випадку зосередженого керування $g(x)u(t)$, де функція g є фіксованою, відповідні результати для спеціальних критеріїв якості одержано в [4] шляхом зведення вихідної задачі до скінченновимірної задачі оптимального керування. У випадку розподіленого керування $u(t,x)$ редукція можлива лише для зліченної кількості задач оптимального керування. Для параболічного випадку аналіз такої задачі та побудову наближеного синтезу проведено в [5]. У даній статті цей підхід реалізовано для гіперболічної задачі з розподіленим керуванням. На основі точної формули оптимального керування у формі оберненого зв'язку обґрунтовано процедуру наближеного усередненого синтезу шляхом заміни всіх швидкоколивних параметрів на усереднені, а всіх нескінченних сум на скінченні.

Постановка задачі. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область, $\varepsilon \in (0,1)$ — малий параметр. У циліндрі $Q = (0,T) \times \Omega$ розглядається задача оптимального керування

$$y_{tt}(t,x) = A^{\varepsilon} y(t,x) + u(t,x), \quad (t,x) \in Q,$$

$$y|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

$$y|_{t=0} = y_0^\varepsilon, \quad y_t|_{t=0} = y_1^\varepsilon,$$

$$J(y,u) = \int\limits_\Omega y^2(T,x)dx + \int\limits_Q u^2(t,x)dtdx \to \inf, \tag{2}$$

$$u \in L^2(Q), \tag{3}$$

де $y_0^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, $y_1^\varepsilon \in L^2(\Omega)$, $A^\varepsilon = \operatorname{div}(a^\varepsilon \nabla)$, $a^\varepsilon(x) = a\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, $a = ((a_{ij}))$ — вимірна, симетрична, періодична матриця, що задовольняє умови рівномірної еліптичності та обмеженості:

$$\exists v_1 > 0, v_2 > 0 \quad \forall\, \eta, x \in \mathbb{R}^n\colon\, v_1 \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \le \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\eta_i\eta_j \le v_2 \sum_{i=1}^n \eta_i^2. \tag{4}$$

Відомо [1, с. 290], що задача (1) – (3) має єдиний розв'язок $\{y^\varepsilon, u^\varepsilon\}$ у класі $W(0,T)\times L^2(Q)$, де

$$W(0,T) = \left\{ y \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \,\middle|\, \frac{dy}{dt} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \right\}.$$

Метою статті є побудова оптимального синтезу задачі (1) – (3) та обґрунтування його наближеної формули за допомогою переходу до усереднених параметрів.

Основні результати. Далі через $\|\cdot\|$ і $(\cdot,\cdot)$ будемо позначати норму і скалярний добуток в $L^2(\Omega)$. Нехай $\{X_i^\varepsilon\}$, $\{\lambda_i^\varepsilon\}$ — розв'язки спектральної задачі

$$\begin{gathered} A^\varepsilon X_i^\varepsilon = -\lambda_i^\varepsilon X_i^\varepsilon, \\ X_i^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

$\{X_i^\varepsilon\} \subset H_0^1(\Omega)$ — ортонормований базис в $L^2(\Omega)$, $0 < \lambda_1^\varepsilon \le \lambda_2^\varepsilon \le \ldots, \lambda_i^\varepsilon \to \infty, i \to \infty$.

Розв'язок задачі (1) – (3) шукаємо у вигляді

$$y^\varepsilon(t,x) = \sum_{i=1}^\infty y_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon(x), \;\; u^\varepsilon(t,x) = \sum_{i=1}^\infty u_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon(x).$$

Тоді маємо зліченну систему одномірних задач оптимального керування

$$\begin{gathered} \ddot{y}_i^\varepsilon(t) = -\lambda_i^\varepsilon y_i^\varepsilon(t) + u_i^\varepsilon(t), \\ y_i^\varepsilon(0) = (y_0^\varepsilon, X_i^\varepsilon), \quad \dot{y}_i^\varepsilon(0) = (y_1^\varepsilon, X_i^\varepsilon), \\ (y_i^\varepsilon(T))^2 + \int\limits_0^T (u_i^\varepsilon(t))^2 dt \to \inf . \end{gathered} \tag{6}$$

Оптимальний регулятор у кожній із цих задач визначається за формулою [3] (гл. 4, § 6)

$$u_i^\varepsilon(t) = K_{1i}^\varepsilon(t) y_i^\varepsilon(t) + K_{2i}^\varepsilon(t) \dot{y}_i^\varepsilon(t), \tag{7}$$

де

$$K_{1i}^\varepsilon(t) = -\frac{b_i^\varepsilon(t) \cos\sqrt{\lambda_i^\varepsilon}(T-t)}{1+\int_t^T (b_i^\varepsilon(s))^2 ds}, \quad K_{2i}^\varepsilon(t) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda_i^\varepsilon}} \frac{b_i^\varepsilon(t) \sin\sqrt{\lambda_i^\varepsilon}(T-t)}{1+\int_t^T (b_i^\varepsilon(s))^2 ds}, \tag{8}$$

$$b_i^\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i^\varepsilon}} \sin\sqrt{\lambda_i^\varepsilon}(T-t).$$

Переходячи до вихідної задачі, остаточно отримуємо оптимальне керування у формі оберненого зв'язку

$$u^\varepsilon(t,x,y^\varepsilon,y_t^\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(K_{1i}^\varepsilon(t)(y^\varepsilon, X_i^\varepsilon) + K_{2i}^\varepsilon(t)(y_t^\varepsilon, X_i^\varepsilon)\right) X_i^\varepsilon(x). \tag{9}$$

Нехай стала матриця a^0 є усередненою для $a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $A^0 = \operatorname{div}(a^0\nabla)$, $\{\lambda_i^0\}$, $\{X_i^0\}$ — розв'язки спектральної задачі (5) при $\varepsilon = 0$, причому будемо вважати, що спектр A^0 є простим, тобто

$$0 < \lambda_1^0 < \lambda_2^0 < \ldots < \lambda_k^0 <, \ldots, \lambda_i^0 \to \infty, \quad i \to \infty. \tag{10}$$

Тоді для довільних $i \geq 1$ справджуються граничні рівності [6, с. 299]

$$\lambda_i^\varepsilon \to \lambda_i^0, \quad X_i^\varepsilon \to X_i^0 \quad \text{в} \quad L^2(\Omega) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{11}$$

Будемо вважати виконаними умови збіжності

$$y_0^\varepsilon \to y_0 \quad \text{слабко в} \quad H_0^1(\Omega), \quad y_1^\varepsilon \to y_1 \quad \text{слабко в} \quad L^2(\Omega) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{12}$$

Слід зауважити, що клас симетричних матриць, що задовольняють умову (4), є компактним відносно G-збіжності [6, с. 167]. Тоді наближений усереднений синтез має вигляд

$$u_N^0(t,x,y_N^\varepsilon,y_{Nt}^\varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \left(K_{1i}^0(t)(y_N^\varepsilon, X_i^0) + K_{2i}^0(t)(y_{Nt}^\varepsilon, X_i^0)\right) X_i^0(x), \tag{13}$$

де $y_N^\varepsilon(t,x)$ — розв'язок задачі (1) з керуванням (13), функції K_{1i}^0, K_{2i}^0 визначаються формулами (8), в яких коефіцієнти λ_i^ε замінено на λ_i^0.

Основним результатом роботи є така теорема.

Теорема. *Нехай для задачі (1)–(3) виконуються умови (4), (10), (12). Тоді формула (13) є наближеним усередненим синтезом для задачі (1)–(3) в тому сенсі, що існують*

$\eta > 0$, $\overline{N} \ge 1$ *і* $\overline{\varepsilon} \in (0,1)$ *такі, що*

$$\left\| u^\varepsilon[\cdot,\cdot,y^\varepsilon,y^\varepsilon_t] - u^0_N[\cdot,\cdot,y^\varepsilon_N,y^\varepsilon_{Nt}] \right\|_{L_2(Q)} < \eta \quad \forall\, N \ge \overline{N} \quad \forall\, \varepsilon \in (0,\overline{\varepsilon}), \tag{14}$$

$$\|y^\varepsilon - y^\varepsilon_N\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} < \eta, \tag{15}$$

$$\left| J(y^\varepsilon, u^\varepsilon[t,x,y^\varepsilon,y^\varepsilon_t]) - J(y^\varepsilon_N, u^0_N[t,x,y^\varepsilon_N,y^\varepsilon_{Nt}]) \right| < \eta. \tag{16}$$

Доведення. Розглянемо допоміжну задачу

$$\begin{gathered} z_{tt} = A^\varepsilon z + u^0[t,x,z,z_t], \\ z|_{\partial\Omega} = 0, \\ z|_{t=0} = y^\varepsilon_0, \quad z_t|_{t=0} = y^\varepsilon_1, \end{gathered} \tag{17}$$

де $u^0\colon [0,T]\times\Omega\times H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ задається рівністю

$$u^0[t,x,\phi,\psi] = \sum_{i=0}^{\infty} \left(K^0_{1i}(t)(\phi,X^0_i) + K^0_{2i}(t)(\psi,X^0_i) \right) X^0_i(x).$$

Оскільки

$$|K^0_{1i}(t)| \le \frac{1}{\sqrt{\lambda^0_i}}, \quad |K^0_{2i}(t)| \le \frac{1}{\lambda^0_i}, \tag{18}$$

то з рівності Парсеваля випливає, що

$$\|u^0[t,x,\phi,\psi]\|^2 \le 2\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda^0_i}\, \left(\phi,X^0_i\right)^2 + \frac{1}{(\lambda^0_i)^2}\, \left(\psi,X^0_i\right)^2 \right) \le \frac{2}{(\lambda^0_1)^2}\, \left(\|\phi\|^2_{H^1_0} + \|\psi\|^2 \right), \tag{19}$$

$$\left\| u^0[t,x,\phi_1,\psi_1] - u^0[t,x,\phi_2,\psi_2] \right\|^2 \le \frac{2}{(\lambda^0_1)^2}\, \left(\|\phi_1-\phi_2\|^2_{H^1_0} + \|\psi_1-\psi_2\|^2 \right). \tag{20}$$

Це означає, що задача (17) має єдиний розв'язок у класі $W(0,T)$, причому для нього справджується рівність [7, с. 77]

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\left(\|z^\varepsilon_t\|^2 + (a^\varepsilon \nabla z^\varepsilon, \nabla z^\varepsilon) \right) = \left(u^0\left[t,x,z^\varepsilon,z^\varepsilon_t\right], z^\varepsilon_t \right). \tag{21}$$

З (19) – (21) і леми Гроноулла виводимо оцінку

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\|z^\varepsilon_t(t)\|^2 + \|z^\varepsilon(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \right) \le C_1. \tag{22}$$

Тут і далі сталі C_i залежать лише від параметрів задачі (1) – (3) і не залежать від ε. Звідси, враховуючи (20), отримуємо, що

$$\begin{gathered} \{z^\varepsilon\} \ \text{ обмежена в } \ L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \\ \{z_t^\varepsilon\} \ \text{ обмежена в } \ L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \\ \{z_{tt}^\varepsilon\} \ \text{ обмежена в } \ L^\infty\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right). \end{gathered} \tag{23}$$

Тоді з теореми про компактність [8] випливає, що існує така функція $z(t,x) \in W(0,T)$, що по підпослідовності

$$\begin{aligned} z^\varepsilon &\to z \quad \text{в} \quad C\left([0,T];L^2(\Omega)\right) \cap C\left([0,T];H_{0w}^1(\Omega)\right), \\ z_t^\varepsilon &\to z_t \quad \text{в} \quad C\left([0,T];H^{-1}(\Omega)\right) \cap C\left([0,T];L_w^2(\Omega)\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Оскільки для будь-якого $M \geq 1$

$$\int_0^T \|u^0[t,x,z^\varepsilon,z_t^\varepsilon] - u^0[t,x,z,z_t]\|^2 dt \leq$$

$$\leq 2\sum_{i=1}^M \int_0^T \left(\frac{1}{\lambda_i^0}\left(z^\varepsilon(t)-z(t),X_i^0\right)^2 + \frac{1}{(\lambda_i^0)^2}\left(z_t^\varepsilon(t)-z_t(t),X_i^0\right)^2\right)dt + \frac{4C_1T}{\lambda_{M+1}^0},$$

то з (24) випливає, що

$$u^0[t,x,z^\varepsilon,z_t^\varepsilon] \to u^0[t,x,z,z_t] \quad \text{в} \quad L^2(Q). \tag{25}$$

Оскільки $A^\varepsilon \xrightarrow{G} A^0$, то з результатів [9] виводимо, що z — розв’язок задачі

$$\begin{gathered} z_{tt} = A^0 z + u^0[t,x,z,z_t], \\ z|_{\partial\Omega} = 0, \\ z|_{t=0} = y_0, \quad z_t|_{t=0} = y_1, \end{gathered} \tag{26}$$

причому, оскільки задача (26) має єдиний розв’язок, збіжність у (24) відбувається по всій послідовності і

$$J\left(z^\varepsilon, u^0[t,x,z^\varepsilon,z_t^\varepsilon]\right) \to J\left(z, u^0[t,x,z,z_t]\right), \quad \varepsilon \to 0. \tag{27}$$

Далі, для різниці $\omega_N^\varepsilon = y_N^\varepsilon - z^\varepsilon$ маємо задачу

$$\begin{gathered} \omega_{Ntt}^\varepsilon = A^\varepsilon \omega_N^\varepsilon + \sum_{i=0}^N \left(K_{1i}^0(t)(\omega_N^\varepsilon, X_i^0) + K_{2i}^0(t)(\omega_{Nt}^\varepsilon, X_i^0)\right) X_i^0(x) + f_N^\varepsilon(t,x), \\ \omega_N^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \\ \omega_N^\varepsilon|_{t=0} = 0, \quad \omega_{Nt}^\varepsilon|_{t=0} = 0, \end{gathered} \tag{28}$$

де

$$f_N^\varepsilon(t,x) = -\sum_{i=N+1}^{\infty}\left(K_{1i}^0(t)(z^\varepsilon, X_i^0) + K_{2i}^0(t)(z_t^\varepsilon, X_i^0)\right) X_i^0(x).$$

Застосовуючи рівність Парсеваля та (22), отримуємо оцінку

$$\|f_N^\varepsilon(t,x)\|^2 \le 2\sum_{i=N+1}^{\infty}\left(K_{1i}^0(t)\right)^2 (z^\varepsilon, X_i^0)^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty}\left(K_{2i}^0(t)\right)^2 (z_t^\varepsilon, X_i^0)^2 \le$$

$$\le \frac{2}{(\lambda_{N+1}^0)^2}\left(\sum_{i=N+1}^{\infty}(z^\varepsilon, X_i^0)^2_{H_0^1} + \sum_{i=N+1}^{\infty}(z_t^\varepsilon, X_i^0)^2\right) \le \frac{2C_1}{(\lambda_{N+1}^0)^2}. \tag{29}$$

Тоді з (28) та леми Гронуолла випливає, що

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\|\omega_{Nt}^\varepsilon(t)\|^2 + \|\omega^\varepsilon(t)\|^2_{H_0^1}\right) \le \frac{C_2}{(\lambda_{N+1}^0)^2}. \tag{30}$$

Звідси і з (19) остаточно маємо

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\|\omega_{Nt}^\varepsilon(t)\|^2 + \|\omega_N^\varepsilon(t)\|^2_{H_0^1}\right) + \int_0^T \|u_N^0[t,x,y_N^\varepsilon,y_{Nt}^\varepsilon] - u^0[t,x,z^\varepsilon,z_t^\varepsilon]\|^2 dt \le \frac{C_3}{(\lambda_{N+1}^0)^2}. \tag{31}$$

З огляду на (27) і (31) залишилось показати, що для процесів $\{y^\varepsilon, u^\varepsilon[t,x,y^\varepsilon,y_t^\varepsilon]\}$ та $\{z, u^0[t,x,z,z_t]\}$ виконуються нерівності (14) – (16). Спочатку зауважимо, що задача оптимального керування (1) – (3) при $\varepsilon = 0$ має єдиний розв'язок $\{y^0, u^0\}$, причому оптимальне керування $u^0 = u^0[t,x,y^0,y_t^0]$ визначається формулами (7) – (9) при $\varepsilon = 0$.

Таким чином, внаслідок єдиності $z \equiv y^0$.

Оскільки для $u^\varepsilon[t,x,y^\varepsilon,y_t^\varepsilon]$ справджуються оцінки (18) – (20) з $\{X_i^\varepsilon\}$, $\{\lambda_i^\varepsilon\}$ замість $\{X_i^0\}$, $\{\lambda_i^0\}$, то y^ε задовольняє (23).

Отже, існує така функція $y \in W(0,T)$, що по підпослідовності

$$\begin{aligned} y^\varepsilon \to y \quad &\text{в} \quad C\left([0,T];L^2(\Omega)\right) \cap C\left([0,T];H^1_{0w}(\Omega)\right), \\ y_t^\varepsilon \to y_t \quad &\text{в} \quad C\left([0,T];H^{-1}(\Omega)\right) \cap C\left([0,T];L^2_w(\Omega)\right), \end{aligned} \tag{32}$$

де $H^1_{0w}(\Omega)$ та $L^2_w(\Omega)$ — простори $H_0^1(\Omega)$ та $L^2(\Omega)$ зі слабкою топологією.

З (11) маємо, що $K_{ji}^\varepsilon \to K_{ji}^0$ в $C([0,T])$ при $\varepsilon \to 0$, $j = 1,2$, тому з (11), (32) і теореми Лебега для будь-якого $M > 1$ отримуємо

$$\sum_{i=1}^{M}\left(K_{1i}^\varepsilon(t)(y^\varepsilon, X_i^\varepsilon) + K_{2i}^\varepsilon(t)(y_t^\varepsilon, X_i^\varepsilon)\right) X_i^\varepsilon(x) \to$$

$$\to \sum_{i=1}^{M}\left(K_{1i}^0(t)(y, X_i^0) + K_{2i}^0(t)(y_t, X_i^0)\right) X_i^0(x) \;\text{ в }\; L^2(Q). \tag{33}$$

Крім того,

$$\int_0^T \left\| \sum_{i=M+1}^{\infty} \left(K_{1i}^0(t)(y, X_i^0) + K_{2i}^0(t)(y_t, X_i^0)\right) X_i^0 \right\|^2 dt \le \frac{C_4}{(\lambda_{M+1}^0)^2}. \quad (34)$$

Використовуючи оптимальність u^ε, маємо

$$\xi_M^\varepsilon(t,x) := \sum_{i=M+1}^{\infty} \left(K_{1i}^\varepsilon(t)(y^\varepsilon(t), X_i^\varepsilon) + K_{2i}^\varepsilon(t)(y_t^\varepsilon(t), X_i^\varepsilon)\right) X_i^\varepsilon = \sum_{i=M+1}^{\infty} u_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon(x),$$

де з (6) випливає, що

$$u_i^\varepsilon(t) = -\frac{b_i^\varepsilon(t)}{1+\int_0^T (b_i^\varepsilon(s))^2 ds} \left((y_0^\varepsilon, X_i^\varepsilon) \cos\sqrt{\lambda_i^\varepsilon}(T-t) + \frac{(y_1^\varepsilon, X_i^\varepsilon)}{\sqrt{\lambda_i^\varepsilon}} \sin\sqrt{\lambda_i^\varepsilon}(T-t) \right). \quad (35)$$

Звідси для будь-якого $t \in [0,T]$ маємо

$$|u_i^\varepsilon(t)|^2 \le C_5 \left((y_0^\varepsilon, X_i^\varepsilon)^2 + \frac{1}{\lambda_i^\varepsilon}(y_1^\varepsilon, X_i^\varepsilon)^2 \right). \quad (36)$$

На підставі (12)

$$y_0^\varepsilon \to y_0 \ \text{ в } \ L^2(\Omega), \quad y_1^\varepsilon \to y_1 \ \text{ в } \ H^{-1}(\Omega),$$

отже,

$$\sum_{i=1}^{\infty} (y_0^\varepsilon, X_i^\varepsilon)^2 \to \sum_{i=1}^{\infty} (y_0, X_i^0)^2, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^\varepsilon}(y_1^\varepsilon, X_i^\varepsilon)^2 \to \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^0}(y_1, X_i^0)^2. \quad (37)$$

З (35) – (37) виводимо, що для будь-якого $\eta > 0$ існує $M \ge 1$ таке, що для всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$ виконується нерівність

$$\int_0^T \|\xi_M^\varepsilon(t)\|^2 dt < \eta.$$

Звідси і з (33), (34) одержуємо шукану збіжність

$$u^\varepsilon[t,x,y^\varepsilon,y_t^\varepsilon] \to u^0[t,x,y,y_t] \quad \text{в} \quad L^2(Q).$$

Оскільки $A^\varepsilon \xrightarrow{G} A^0$, то з [9] виводимо, що $y \equiv z$.

Теорему доведено.

Література

1. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 416 с.

2. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. — Новосибирск: Науч. книга, 1999. — 350 с.
3. *Егоров А. И.* Оптимальное управление линейными системами. — Киев: Вища шк., 1988. — 278 с.
4. *Kapustyan O. V., Kapustian O. A., Sukretna A. V.* Approximate bounded synthesis for distributed systems. — Saarbrucken: Lambert Acad. Publ., 2013. — 235 p.
5. *Капустян О. В., Русіна А. В.* Наближений синтез розподіленого обмеженого керування в параболічній задачі зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, № 3. — С. 355 – 365.
6. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Физматлит, 1993. — 464 с.
7. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. — New York: Springer, 1993. — 530 p.
8. *Simon J.* Compact sets in the space $Lp(0, T; B)$ // Ann. mat. pura ed appl. — 1986. — **146**, № 1. — P. 65 – 96.
9. *Colombini F., Spagnolo S.* On the convergence of solutions of hyperbolic equations // Communs Partial Different. Equat. — 1978. — **3**, № 1. — P. 77 – 103.

Одержано 22.02.16,
після доопрацювання — 23.03.16