УДК 517.926.7

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ

М. А. Елишевич

Киев. нац. ун-т стр-ва и архитектуры
Воздухофлотский просп., 31, Киев, 03037, Украина

We construct a solution to a boundary-value problem for a system of linear nonhomogeneous first order differential equations with rectangular matrices.

Побудовано розв'язок крайової задачі для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з прямокутними матрицями.

Постановка задачи. В данной работе для системы

$$B(t)\,\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [a;b], \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — прямоугольные матрицы-функции размерности $m \times n$, $f(t)$ — вектор-функция размерности m, $A(t)$, $B(t)$, $f(t) \in C^\infty[a;b]$ действительные или комплексные, рассматривается краевая задача с граничным условием

$$h[x(t)] = \gamma. \tag{2}$$

Здесь h — линейный оператор, отображающий пространство вектор-функций размерности n, принадлежащих $C^\infty[a;b]$, в пространство постоянных векторов размерности l, γ — постоянный вектор размерности l.

Случай, когда $A(t)$ и $B(t)$ — квадратные матрицы, рассматривался в [1], где решение построено с использованием жордановых наборов векторов матрицы $B(t)$ относительно оператора

$$L(t) = A(t) - B(t)\,\frac{d}{dt}$$

и сопряженной матрицы $B^*(t)$ относительно оператора

$$L^*(t) = A^*(t) + \frac{d}{dt}\,B^*(t),$$

формально сопряженного с $L(t)$. Они используются и в данной работе.

Основные определения.

Определение 1. *Элемент $\varphi^{(1)}(t) \in \ker B(t)$ имеет в точке $t \in [a;b]$ конечную жорданову цепочку векторов матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ длины p, $p \geq 1$,* *если существуют векторы $\varphi^{(i)}(t)$, $i=\overline{1,p}$, удовлетворяющие соотношениям*

$$B(t)\varphi^{(1)}(t)=0,$$

$$B(t)\varphi^{(i)}(t)=L(t)\varphi^{(i-1)}(t),\quad i=\overline{2,p},$$

$$L(t)\varphi^{(p)}(t)\notin \operatorname{Im} B(t).$$

Определение 2. *Элемент $\tilde{\varphi}^{(1)}(t)\in\ker B(t)$ имеет в точке $t\in[a;b]$ циклическую жорданову цепочку векторов матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ длины $\tilde{p}$, $\tilde{p}\geq 1$, если существуют векторы $\tilde{\varphi}^{(i)}(t)$, $i=\overline{1,\tilde{p}}$, удовлетворяющие соотношениям*

$$B(t)\tilde{\varphi}^{(1)}(t)=0,$$

$$B(t)\tilde{\varphi}^{(i)}(t)=L(t)\tilde{\varphi}^{(i-1)}(t),\quad i=\overline{2,\tilde{p}},$$

$$L(t)\tilde{\varphi}^{(\tilde{p})}(t)=0.$$

Определение 3. *Элемент $\hat{\varphi}^{(1)}(t)$ имеет в точке $t\in[a;b]$ вспомогательную цепочку векторов матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ длины $\hat{p}$, $\hat{p}\geq 1$, если существуют векторы $\hat{\varphi}^{(i)}(t)$, $i=\overline{1,\hat{p}}$, удовлетворяющие соотношениям*

$$B(t)\hat{\varphi}^{(i)}(t)=L(t)\hat{\varphi}^{(i-1)}(t),\quad i=\overline{2,\hat{p}},$$

$$B(t)\hat{\varphi}^{(1)}(t)\notin \operatorname{Im} L(t),$$

$$L(t)\hat{\varphi}^{(\hat{p})}(t)\notin \operatorname{Im} B(t).$$

Аналогично определим цепочки векторов на отрезке $[a;b]$. Их свойства исследованы в [2]. В дальнейшем будем предполагать, что доказываемые утверждения выполняются на всем отрезке $[a;b]$, если не оговорено иное.

В [1] рассмотрен случай, когда $A(t)$ и $B(t)$ — квадратные матрицы и существуют только конечные цепочки. В данной работе рассматривается случай, когда $A(t)$ и $B(t)$ — прямоугольные матрицы и могут существовать конечные, циклические и вспомогательные цепочки, но их количество и длины постоянны при всех $t\in[a;b]$.

Основной результат. Построим жордановы цепочки векторов матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ и матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$ при $t\in[a;b]$.

Определим циклические цепочки матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ единичной длины. Пусть мы построили $\breve{r}$, $\breve{r}\geq 0$, линейно независимых векторов $\breve{\varphi}_i(t)$, $i=\overline{1,\breve{r}}$.

Аналогично определим циклические цепочки матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$ единичной длины. Пусть мы построили $\breve{r}$, $\breve{r}\geq 0$, линейно независимых векторов $\breve{\psi}_i(t)$, $i=\overline{1,\breve{r}}$.

Определим циклические цепочки матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ длины больше 1 в порядке возрастания их длин. Выберем вектор $\tilde{\varphi}_1^{(1)}(t)\in\ker B(t)$, линейно независимый с $\breve{\varphi}_i(t)$, $i=\overline{1,\breve{r}}$, имеющий цепочку наименьшей из возможных длин $\tilde{s}_1+1$.

Далее выберем вектор $\tilde{\varphi}_2^{(1)}(t) \in \ker B(t)$, линейно независимый с $\breve{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, $\tilde{\varphi}_1^{(1)}(t)$, имеющий цепочку наименьшей из возможных длин $\tilde{s}_2 + 1$, и т. д. Пусть мы построили $\tilde{r}$, $\tilde{r} \geq 0$, цепочек длин $\tilde{s}_i + 1$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $0 < \tilde{s}_1 \leq \ldots \leq \tilde{s}_{\tilde{r}}$, состоящих из векторов $\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i + 1}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$.

Аналогично определим циклические цепочки матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$ длины больше 1 в порядке возрастания их длин. Пусть мы построили $\hat{r}$, $\hat{r} \geq 0$, цепочек длин $\hat{s}_i+1$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $0 < \hat{s}_1 \leq \ldots \leq \hat{s}_{\hat{r}}$, состоящих из векторов $\tilde{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i + 1}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$.

Определим конечные цепочки матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ в порядке убывания их длин. Выберем вектор $\varphi_1^{(1)}(t) \in \ker B(t)$, линейно независимый с $\breve{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, $\tilde{\varphi}_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, имеющий цепочку наибольшей из возможных длин s_1. Далее выберем вектор $\varphi_2^{(1)}(t) \in \ker B(t)$, линейно независимый с $\breve{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, $\tilde{\varphi}_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $\varphi_1^{(1)}(t)$, имеющий цепочку наибольшей из возможных длин s_2, и т. д. Пусть мы построили r, $r \geq 0$, цепочек длин s_i, $i = \overline{1, r}$, $s_1 \geq \ldots \geq s_r > 0$, состоящих из векторов $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$.

Обозначим

$$s = \sum_{i=1}^{r} s_i, \quad \tilde{s} = \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \tilde{s}_i, \quad \hat{s} = \sum_{i=1}^{\hat{r}} \hat{s}_i, \quad \alpha = n - \breve{r} - \tilde{r} - \tilde{s} - s - \hat{s} = m - \breve{r} - \hat{r} - \hat{s} - s - \tilde{s}.$$

Согласно [2, 3] существуют также:

r конечных цепочек матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$ длин s_i, $i = \overline{1, r}$, состоящих из векторов $\psi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$;

$\hat{r}$ вспомогательных цепочек матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ длин $\hat{s}_i$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, состоящих из векторов $\hat{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$;

$\tilde{r}$ вспомогательных цепочек матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$ длин $\tilde{s}_i$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, состоящих из векторов $\hat{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$;

$\breve{r}$ векторов $\breve{\varphi}_i(t) \notin \operatorname{Im} B(t) \bigcup \operatorname{Im} L(t)$, $i = \overline{1, \breve{r}}$;

$\breve{r}$ векторов $\breve{\psi}_i(t) \notin \operatorname{Im} B^*(t) \bigcup \operatorname{Im} L^*(t)$, $i = \overline{1, \breve{r}}$;

α векторов $q_i(t)$, $i = \overline{1, \alpha}$;

α векторов $p_i(t)$, $i = \overline{1, \alpha}$,

таких, что элементы каждого из следующих множеств принадлежат $C^\infty[a; b]$ и линейно независимы:

1) $q_i(t)$, $i = \overline{1, \alpha}$, $\breve{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, $\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i + 1}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, $\hat{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$;

2) $B(t)q_i(t)$, $i = \overline{1, \alpha}$, $\breve{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, $L(t)\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $L(t)\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, $B(t)\hat{\varphi}_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $L(t)\hat{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$;

3) $p_i(t)$, $i = \overline{1, \alpha}$, $\breve{\psi}_i(t)$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, $\tilde{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i + 1}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $\psi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, $\hat{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$;

4) $B^*(t)p_i(t)$, $i = \overline{1, \alpha}$, $\breve{\psi}_i(t)$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, $L^*(t)\tilde{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $L^*(t)\psi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, $B^*(t)\hat{\psi}_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $L^*(t)\hat{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$;

пары множеств 1 и 4, 2 и 3 соответственно представляют собой биортогональные системы

$$(B(t)q_i(t), p_k(t)) = (q_i(t), B^*(t)p_k(t)) = \delta_{ik}, \quad i,k = \overline{1,\alpha},$$

$$(\breve{\varphi}_i(t), \breve{\psi}_k(t)) = \delta_{ik}, \quad i,k = \overline{1,\breve{r}},$$

$$\left(\breve{\varphi}_i(t), \breve{\psi}_k(t)\right) = \delta_{ik}, \quad i,k = \overline{1,\breve{r}},$$

$$\left(\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t), L^*(t)\hat{\psi}_k^{(l)}(t)\right) = \left(L(t)\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t), \hat{\psi}_k^{(l)}(t)\right) = \delta_{ik}\delta_{l+j,\tilde{s}_i+1}, \quad j,l = \overline{1,\tilde{s}_i}, \quad i,k = \overline{1,\tilde{r}},$$

$$\left(\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i+1)}(t), B^*(t)\hat{\psi}_k^{(1)}(t)\right) = \delta_{ik}, \quad i,k = \overline{1,\tilde{r}},$$

$$\left(\hat{\varphi}_i^{(j)}(t), L^*(t)\tilde{\psi}_k^{(l)}(t)\right) = \left(L(t)\hat{\varphi}_i^{(j)}(t), \tilde{\psi}_k^{(l)}(t)\right) = \delta_{ik}\delta_{l+j,\hat{s}_i+1}, \quad j,l = \overline{1,\hat{s}_i}, \quad i,k = \overline{1,\hat{r}},$$

$$\left(B(t)\hat{\varphi}_i^{(1)}(t), \tilde{\psi}_k^{(\hat{s}_i+1)}(t)\right) = \delta_{ik}, \quad i,k = \overline{1,\hat{r}},$$

$$\left(\varphi_i^{(j)}(t), L^*(t)\psi_k^{(l)}(t)\right) = \left(L(t)\varphi_i^{(j)}(t), \psi_k^{(l)}(t)\right) = \delta_{ik}\delta_{l+j,s_i+1}, \quad j,l = \overline{1,s_i}, \quad i,k = \overline{1,r},$$

все остальные скалярные произведения векторов из соответствующих пар множеств равны 0.

Обозначим через c_i произвольный постоянный вектор размерности i, $c_0 = 0$, I_i — нильпотентный блок Жордана размерности i.

Перейдем непосредственно к краевой задаче (1), (2). Согласно [3] система (1) разрешима при выполнении условий

$$\sum_{j=0}^{\hat{s}_i} \frac{d^j}{dt^j} \left(f(t), \tilde{\psi}_i^{(\hat{s}_i-j+1)}(t)\right) = 0, \quad i = \overline{1,\hat{r}}, \tag{3}$$

$$\left(f(t), \breve{\psi}_i(t)\right) = 0, \quad i = \overline{1,\breve{r}}. \tag{4}$$

Ее общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) = {} & X_\alpha(t)c_\alpha + \int_a^t X_\alpha(t)Y_\alpha^*(\tau)f(\tau)d\tau - \sum_{i=1}^{r}\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{s_i-1} I_{s_i}^j \frac{d^j}{dt^j}\left[\Psi_i^*(t)f(t)\right] - \\ & - \sum_{i=1}^{\tilde{r}}\tilde{\Phi}_i(t)\sum_{j=0}^{\tilde{s}_i-1}\left(I_{\tilde{s}_i}^T\right)^j \frac{d^j}{dt^j}\left[\hat{\Psi}_i^*(t)f(t)\right] - \sum_{i=1}^{\hat{r}}\hat{\Phi}_i(t)\sum_{j=0}^{\hat{s}_i-1} I_{\hat{s}_i}^j \frac{d^j}{dt^j}\left[\tilde{\Psi}_i^*(t)f(t)\right] + \\ & + \sum_{i=1}^{\tilde{r}}\sum_{j=0}^{\tilde{s}_i}\left[\frac{d^j}{dt^j}\tilde{\beta}_i(t)\right]\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\breve{r}}\breve{\beta}_i(t)\breve{\varphi}_i(t), \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$X_\alpha(t) = Q(t)X(t), \quad Y_\alpha(t) = P(t)\left[X^{-1}(t)\right]^*,$$

$X(t)$ — фундаментальная матрица однородной системы

$$\frac{dx_0}{dt} = M(t)x_0,$$

$$M(t) = P^*(t)L(t)Q(t),$$

$$Q(t) = [q_1(t), \ldots, q_\alpha(t)], \quad P(t) = [p_1(t), \ldots, p_\alpha(t)],$$

$$\Phi_i(t) = \left[\varphi_i^{(1)}(t), \ldots, \varphi_i^{(s_i)}(t)\right], \quad i = \overline{1, r},$$

$$\tilde{\Phi}_i(t) = \left[\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i)}(t), \ldots, \tilde{\varphi}_i^{(1)}(t)\right], \quad i = \overline{1, \tilde{r}},$$

$$\hat{\Phi}_i(t) = \left[\hat{\varphi}_i^{(1)}(t), \ldots, \hat{\varphi}_i^{(\hat{s}_i)}(t)\right], \quad i = \overline{1, \hat{r}},$$

$$\Psi_i(t) = \left[\psi_i^{(s_i)}(t), \ldots, \psi_i^{(1)}(t)\right], \quad i = \overline{1, r},$$

$$\tilde{\Psi}_i(t) = \left[\tilde{\psi}_i^{(\hat{s}_i)}(t), \ldots, \tilde{\psi}_i^{(1)}(t)\right], \quad i = \overline{1, \hat{r}},$$

$$\hat{\Psi}_i(t) = \left[\hat{\psi}_i^{(1)}(t), \ldots, \hat{\psi}_i^{(\tilde{s}_i)}(t)\right], \quad i = \overline{1, \tilde{r}},$$

$\tilde{\beta}_i(t) \in C^\infty[a;b]$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $\breve{\beta}_i(t) \in C^\infty[a;b]$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, — произвольные скалярные функции.

Выберем из столбцов матрицы $h[X_\alpha(t)]$ и векторов $h\left\{\sum_{j=0}^{\tilde{s}_i}\left[\frac{d^j}{dt^j}\,\tilde{\xi}_k(t)\right]\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i-j+1)}(t)\right\}$, $k = 1, 2, \ldots$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $h\left[\breve{\xi}_i(t)\breve{\varphi}_i(t)\right]$, $k = 1, 2, \ldots$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, где $\tilde{\xi}_k(t) \in C^\infty[a;b]$, $k = 1, 2, \ldots$, $\breve{\xi}_k(t) \in C^\infty[a;b]$, $k = 1, 2, \ldots$, — произвольные скалярные функции, максимальное количество μ, $0 \le \mu \le l$, линейно независимых векторов и составим из соответствующих им столбцов матрицы $X_\alpha(t)$ и векторов $\sum_{j=0}^{\tilde{s}_i}\left[\frac{d^j}{dt^j}\,\tilde{\xi}_k(t)\right]\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i-j+1)}(t)$, $\breve{\xi}_k(t)\breve{\varphi}_i(t)$ матрицу $D(t)$ размерности $n \times \mu$, при этом $\dim\ker\, D(t) = \dim\ker\, h[D(t)] = 0$, а если $\mu = 0$, то положим $D(t)$ тождественно равной нулевому вектору размерности n.

В силу произвольности выбора вектора c_α и функций $\tilde{\beta}_i(t) \in C^\infty[a;b]$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $\breve{\beta}_i(t) \in C^\infty[a;b]$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, выражение (5) можно заменить выражением

$$x(t) = D(t)c_\mu + X_\alpha(t)c_\alpha + \int\limits_a^t X_\alpha(t)Y_\alpha^*(\tau)f(\tau)d\tau - \sum_{i=1}^{r}\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{s_i-1} I_{s_i}^j\frac{d^j}{dt^j}\,\left[\Psi_i^*(t)f(t)\right] -$$
$$- \sum_{i=1}^{\tilde{r}}\tilde{\Phi}_i(t)\sum_{j=0}^{\tilde{s}_i-1}\left(I_{\tilde{s}_i}^T\right)^j\frac{d^j}{dt^j}\,\left[\hat{\Psi}_i^*(t)f(t)\right] - \sum_{i=1}^{\hat{r}}\hat{\Phi}_i(t)\sum_{j=0}^{\hat{s}_i-1} I_{\hat{s}_i}^j\frac{d^j}{dt^j}\,\left[\tilde{\Psi}_i^*(t)f(t)\right] +$$
$$+ \sum_{i=1}^{\tilde{r}}\sum_{j=0}^{\tilde{s}_i}\left[\frac{d^j}{dt^j}\,\tilde{\beta}_i(t)\right]\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\breve{r}}\breve{\beta}_i(t)\breve{\varphi}_i(t). \tag{6}$$

Пусть $\dim\ker\{h[D(t)]\}^* = \nu$, $0 \le \nu \le l$. Составим из элементов базиса $\ker\{h[D(t)]\}^*$ матрицу H размерности $l \times \nu$, а если $\nu = 0$, то положим H равной нулевому вектору размерности l. Если $\mu = 0$, то $\nu = l$, $H = E_l$.

Теорема 1. *Пусть $A(t)$, $B(t)$ и $f(t)$ принадлежат $C^\infty[a;b]$, при всех $t \in [a;b]$ существуют жордановы цепочки векторов:*

матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$:

$r, r \ge 0$, конечных длин s_i, $s_i > 0$, $i = \overline{1,r}$;

$\tilde r, \tilde r \ge 0$, циклических длин $\tilde s_i + 1$, $\tilde s_i > 0$, $i = \overline{1,\tilde r}$;

$\breve r, \breve r \ge 0$ циклических длины 1;

матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$:

$\hat r, \hat r \ge 0$, циклических длин $\hat s_i + 1$, $\hat s_i > 0$, $i = \overline{1,\hat r}$;

$\check r, \check r \ge 0$, циклических длины 1.

Тогда краевая задача (1), (2) разрешима в том и только в том случае, когда выполняются условия (3), (4),

$$H^*\left(\gamma - h\left\{\int\limits_a^t X_\alpha(t)Y_\alpha^*(\tau)f(\tau)d\tau - \sum_{i=1}^{r}\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{s_i-1} I_{s_i}^j \frac{d^j}{dt^j}\,[\Psi_i^*(t)f(t)] - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sum_{i=1}^{\tilde r}\tilde\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\tilde s_i-1}\left(I_{\tilde s_i}^T\right)^j \frac{d^j}{dt^j}\left[\hat\Psi_i^*(t)f(t)\right] - \sum_{i=1}^{\hat r}\hat\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\hat s_i-1} I_{\hat s_i}^j \frac{d^j}{dt^j}\left[\tilde\Psi_i^*(t)f(t)\right]\right\}\right) = 0. \quad (7)$$

Ее общее решение имеет вид

$$x(t) = D(t)\{h[D(t)]\}^-\left(\gamma - h\left\{X_\alpha(t)c_\alpha + \int\limits_a^t X_\alpha(t)Y_\alpha^*(\tau)f(\tau)d\tau - \right.\right.$$
$$- \sum_{i=1}^{r}\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{s_i-1} I_{s_i}^j \frac{d^j}{dt^j}\,[\Psi_i^*(t)f(t)] - \sum_{i=1}^{\tilde r}\tilde\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\tilde s_i-1}\left(I_{\tilde s_i}^T\right)^j \frac{d^j}{dt^j}\left[\hat\Psi_i^*(t)f(t)\right] -$$
$$- \sum_{i=1}^{\hat r}\hat\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\hat s_i-1} I_{\hat s_i}^j \frac{d^j}{dt^j}\left[\tilde\Psi_i^*(t)f(t)\right] + \sum_{i=1}^{\tilde r}\sum_{j=0}^{\tilde s_i}\left[\frac{d^j}{dt^j}\,\tilde\beta_i(t)\right]\tilde\varphi_i^{(\tilde s_i-j+1)}(t) +$$
$$\left.\left. + \sum_{i=1}^{\breve r}\breve\beta_i(t)\breve\varphi_i(t)\right\}\right) + X_\alpha(t)c_\alpha + \int\limits_a^t X_\alpha(t)Y_\alpha^*(\tau)f(\tau)d\tau -$$
$$- \sum_{i=1}^{r}\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{s_i-1} I_{s_i}^j \frac{d^j}{dt^j}\,[\Psi_i^*(t)f(t)] - \sum_{i=1}^{\tilde r}\tilde\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\tilde s_i-1}\left(I_{\tilde s_i}^T\right)^j \frac{d^j}{dt^j}\left[\hat\Psi_i^*(t)f(t)\right] -$$

$$-\sum_{i=1}^{\hat r}\hat\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\hat s_i-1}I^j_{\hat s_i}\frac{d^j}{dt^j}\left[\tilde\Psi^*_i(t)f(t)\right]+\sum_{i=1}^{\tilde r}\sum_{j=0}^{\tilde s_i}\left[\frac{d^j}{dt^j}\tilde\beta_i(t)\right]\tilde\varphi_i^{(\tilde s_i-j+1)}(t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{\breve r}\breve\beta_i(t)\breve\varphi_i(t). \tag{8}$$

Доказательство. Подставив (6) в (2), получим систему

$$h[D(t)]c_\mu=\gamma-h\Biggl\{X_\alpha(t)c_\alpha+\int\limits_a^t X_\alpha(t)Y^*_\alpha(\tau)f(\tau)d\tau-\sum_{i=1}^{r}\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{s_i-1}I^j_{s_i}\frac{d^j}{dt^j}\left[\Psi^*_i(t)f(t)\right]-$$

$$-\sum_{i=1}^{\tilde r}\tilde\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\tilde s_i-1}\left(I^T_{\tilde s_i}\right)^j\frac{d^j}{dt^j}\left[\hat\Psi^*_i(t)f(t)\right]-\sum_{i=1}^{\hat r}\hat\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\hat s_i-1}I^j_{\hat s_i}\frac{d^j}{dt^j}\left[\tilde\Psi^*_i(t)f(t)\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{\tilde r}\sum_{j=0}^{\tilde s_i}\left[\frac{d^j}{dt^j}\tilde\beta_i(t)\right]\tilde\varphi_i^{(\tilde s_i-j+1)}(t)+\sum_{i=1}^{\breve r}\breve\beta_i(t)\breve\varphi_i(t)\Biggr\}.$$

Для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнения условия (7), поскольку столбцы матрицы $h\left[X_\alpha\left(t\right)\right]$ и векторы

$$h\left\{\sum_{j=0}^{\tilde s_i}\left[\frac{d^j}{dt^j}\tilde\beta_i(t)\right]\tilde\varphi_i^{(\tilde s_i-j+1)}(t)\right\},\quad i=\overline{1,\tilde r},\quad h\left[\breve\beta_i(t)\breve\varphi_i(t)\right],\quad i=\overline{1,\breve r},$$

являются линейными комбинациями столбцов матрицы $h[D(t)]$. При его выполнении

$$c_\mu=\{h[D(t)]\}^-\Biggl(\gamma-h\Biggl\{X_\alpha(t)c_\alpha+\int\limits_a^t X_\alpha(t)Y^*_\alpha(\tau)f(\tau)d\tau-\sum_{i=1}^{r}\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{s_i-1}I^j_{s_i}\frac{d^j}{dt^j}\left[\Psi^*_i(t)f(t)\right]-$$

$$-\sum_{i=1}^{\tilde r}\tilde\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\tilde s_i-1}\left(I^T_{\tilde s_i}\right)^j\frac{d^j}{dt^j}\left[\hat\Psi^*_i(t)f(t)\right]-\sum_{i=1}^{\hat r}\hat\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\hat s_i-1}I^j_{\hat s_i}\frac{d^j}{dt^j}\left[\tilde\Psi^*_i(t)f(t)\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{\tilde r}\sum_{j=0}^{\tilde s_i}\left[\frac{d^j}{dt^j}\tilde\beta_i(t)\right]\tilde\varphi_i^{(\tilde s_i-j+1)}(t)+\sum_{i=1}^{\breve r}\breve\beta_i(t)\breve\varphi_i(t)\Biggr\}\Biggr). \tag{9}$$

Подставив (9) в (6), получим (8).

Теорема 1 доказана.

Пример. Пусть в (1), (2) $m=n=l=2$, $h[x(t)]=x(b)-x(a)$,

$$B(t)=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad A(t)=\begin{bmatrix}a_{11}(t)&a_{12}(t)\\a_{21}(t)&a_{22}(t)\end{bmatrix},\quad f(t)=\begin{bmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\end{bmatrix},\quad \gamma=\begin{bmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\end{bmatrix},$$

$a_{ij}(t) \in C^{\infty}[a;b]$, $i,j = 1,2$, $f_i(t) \in C^{\infty}[a;b]$, $i = 1,2$, — действительные скалярные функции, γ_i, $i = 1,2$, — действительные числа. Рассмотрим следующие случаи [2, 3].

Случай 1: $a_{22}(t) \neq 0 \ \ \forall t \in [a;b]$. Имеем $r = 1$, $s_1 = 1$, $\breve{r} = \check{r} = \tilde{r} = \hat{r} = 0$, $\alpha = 1$,

$$\Phi_1(t) = \varphi_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Psi_1(t) = \psi_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix},$$

$$Q(t) = q_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)\, a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix}, \quad P(t) = p_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{12}(t)\, a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix},$$

$$M(t) = m_{11}(t) = a_{11}(t) - a_{12}(t)a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t).$$

Общее решение (5) системы (1) имеет вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left[\int\limits_a^t m_{11}(z)dz\right] c_1 + \int\limits_a^t \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left[\int\limits_a^t m_{11}(z)dz\right] \times$$

$$\times \exp\left[-\int\limits_a^{\tau} m_{11}(z)dz\right] \left[f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\right] d\tau - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \end{bmatrix},$$

$$h[X_1(t)] = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(b)a_{22}^{-1}(b) \end{bmatrix} \exp\left[\int\limits_a^b m_{11}(z)dz\right] - \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(a)a_{22}^{-1}(a) \end{bmatrix}.$$

Если $\int_a^b m_{11}(z)dz = 0$ и $a_{21}(a)a_{22}^{-1}(a) = a_{21}(b)a_{22}^{-1}(b)$, то

$$\mu = 0, \quad D(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h[D(t)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\nu = 2, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \{h[D(t)]\}^{-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},$$

условие (7) разрешимости краевой задачи (1), (2) принимает вид

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} - \int\limits_a^b \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(b)\, a_{22}^{-1}(b) \end{bmatrix} \exp\left[-\int\limits_a^{\tau} m_{11}(z)dz\right] \times$$

$$\times \left[f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\right] d\tau + \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(b)\, f_2(b) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(a)\, f_2(a) \end{bmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{c}\gamma_1\\ \gamma_2\end{array}\right]=\int\limits_a^b\left[\begin{array}{c}1\\ -a_{21}(b)\,a_{22}^{-1}(b)\end{array}\right]\exp\left[-\int\limits_a^\tau m_{11}(z)dz\right]\times$$

$$\times\left[f_1(\tau)-a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\right]d\tau-\left[\begin{array}{c}0\\ a_{22}^{-1}(b)\,f_2(b)\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c}0\\ a_{22}^{-1}(a)\,f_2(a)\end{array}\right].$$

Тогда общее решение (8) задачи (1), (2) имеет вид

$$x(t)=\left[\begin{array}{c}1\\ -a_{21}(t)\,a_{22}^{-1}(t)\end{array}\right]\exp\left[\int\limits_a^t m_{11}(z)dz\right]c_1+\int\limits_a^t\left[\begin{array}{c}1\\ -a_{21}(t)\,a_{22}^{-1}(t)\end{array}\right]\exp\left[\int\limits_a^t m_{11}(z)dz\right]\times$$

$$\times\exp\left[-\int\limits_a^\tau m_{11}(z)dz\right]\left[f_1(\tau)-a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\right]d\tau-\left[\begin{array}{c}0\\ a_{22}^{-1}(t)\,f_2(t)\end{array}\right].$$

Если $\int_a^b m_{11}(z)dz=0$ и $a_{21}(a)a_{22}^{-1}(a)\neq a_{21}(b)a_{22}^{-1}(b)$, то

$$\mu=1,\quad D(t)=\left[\begin{array}{c}1\\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t)\end{array}\right]\exp\left[\int\limits_a^t m_{11}(z)dz\right],$$

$$h[D(t)]=\left[\begin{array}{c}0\\ -a_{21}(b)a_{22}^{-1}(b)+a_{21}(a)a_{22}^{-1}(a)\end{array}\right],\quad \nu=1,\quad H=\left[\begin{array}{c}1\\ 0\end{array}\right],$$

$$\{h[D(t)]\}^-=\left[\begin{array}{cc}0 & \left[-a_{21}(b)a_{22}^{-1}(b)+a_{21}(a)a_{22}^{-1}(a)\right]^{-1}\end{array}\right],$$

условие (7) разрешимости краевой задачи (1), (2) принимает вид

$$\gamma_1-\int\limits_a^b\exp\left[-\int\limits_a^\tau m_{11}(z)dz\right]\left[f_1(\tau)-a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\right]d\tau=0.$$

Отсюда

$$\gamma_1=\int\limits_a^b\exp\left[-\int\limits_a^\tau m_{11}(z)dz\right]\left[f_1(\tau)-a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\right]d\tau.$$

Тогда единственное решение (8) задачи (1), (2) имеет вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left[\int\limits_a^t m_{11}(z)dz\right] \left[-a_{21}(b)a_{22}^{-1}(b) + a_{21}(a)a_{22}^{-1}(a)\right]^{-1} \times$$

$$\times \left\{\gamma_2 + a_{21}(b)a_{22}^{-1}(b)\int\limits_a^b \exp\left[-\int\limits_a^\tau m_{11}(z)dz\right]\left[f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\right]d\tau + \right.$$

$$\left. + a_{22}^{-1}(b)f_2(b) - a_{22}^{-1}(a)f_2(a)\right\} + \int\limits_a^t \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left[\int\limits_a^t m_{11}(z)dz\right]\times$$

$$\times \exp\left[-\int\limits_a^\tau m_{11}(z)dz\right]\left[f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\right]d\tau - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \end{bmatrix}.$$

Если $\int_a^b m_{11}(z)dz \neq 0$, то

$$\mu = 1, \quad D(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)\,a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left[\int\limits_a^t m_{11}(z)dz\right],$$

$$h[D(t)] = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(b)\,a_{22}^{-1}(b) \end{bmatrix} \exp\left[\int\limits_a^b m_{11}(z)dz\right] - \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(a)\,a_{22}^{-1}(a) \end{bmatrix},$$

$$\nu = 1, \quad H = \begin{bmatrix} a_{21}(b)\,a_{22}^{-1}(b) \\ 1 \end{bmatrix} \exp\left[\int\limits_a^b m_{11}(z)dz\right] - \begin{bmatrix} a_{21}(a)\,a_{22}^{-1}(a) \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\{h[D(t)]\}^- = \left[\left\{\exp\left[\int\limits_a^b m_{11}(z)dz\right] - 1\right\}^{-1} \quad 0\right],$$

условие (7) разрешимости краевой задачи (1), (2) принимает вид

$$\gamma_1\left\{a_{21}(b)a_{22}^{-1}(b)\exp\left[\int\limits_a^b m_{11}(z)dz\right] - a_{21}(a)a_{22}^{-1}(a)\right\} +$$

$$+ \gamma_2\left\{\exp\left[\int\limits_a^b m_{11}(z)dz\right] - 1\right\} - \left[a_{21}(b)a_{22}^{-1}(b) - a_{21}(a)a_{22}^{-1}(a)\right]\times$$

$$\times\exp\left[\int\limits_a^b m_{11}(z)dz\right]\int\limits_a^b\exp\left[-\int\limits_a^\tau m_{11}(z)dz\right]\left[f_1(\tau)-a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\right]d\tau+$$

$$+\left[a_{22}^{-1}(b)f_2(b)-a_{22}^{-1}(a)f_2(a)\right]\left\{\exp\left[\int\limits_a^b m_{11}(z)dz\right]-1\right\}=0.$$

Отсюда

$$\gamma_2=-\gamma_1\left\{a_{21}(b)a_{22}^{-1}(b)\exp\left[\int\limits_a^b m_{11}(z)dz\right]-a_{21}(a)a_{22}^{-1}(a)\right\}\times$$

$$\times\left\{\exp\left[\int\limits_a^b m_{11}(z)dz\right]-1\right\}^{-1}+\left[a_{21}(b)a_{22}^{-1}(b)-a_{21}(a)a_{22}^{-1}(a)\right]\exp\left[\int\limits_a^b m_{11}(z)dz\right]\times$$

$$\times\int\limits_a^b\exp\left[-\int\limits_a^\tau m_{11}(z)dz\right]\left[f_1(\tau)-a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\right]d\tau\times$$

$$\times\left\{\exp\left[\int\limits_a^b m_{11}(z)dz\right]-1\right\}^{-1}-a_{22}^{-1}(b)f_2(b)+a_{22}^{-1}(a)f_2(a).$$

Тогда единственное решение (8) задачи (1), (2) имеет вид

$$x(t)=\begin{bmatrix}1\\-a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t)\end{bmatrix}\exp\left[\int\limits_a^t m_{11}(z)dz\right]\left\{\exp\left[\int\limits_a^b m_{11}(z)dz\right]-1\right\}^{-1}\times$$

$$\times\left\{\gamma_1-\exp\left[\int\limits_a^t m_{11}(z)dz\right]\int\limits_a^b\exp\left[-\int\limits_a^\tau m_{11}(z)dz\right]\left[f_1(\tau)-a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\right]d\tau\right\}+$$

$$+\int\limits_a^t\begin{bmatrix}1\\-a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t)\end{bmatrix}\exp\left[\int\limits_a^t m_{11}(z)dz\right]\exp\left[-\int\limits_a^\tau m_{11}(z)dz\right]\times$$

$$\times\left[f_1(\tau)-a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\right]d\tau-\begin{bmatrix}0\\a_{22}^{-1}(t)f_2(t)\end{bmatrix}.$$

Случай 2: $a_{22}(t)\equiv 0$, $a_{12}(t)\neq 0$, $a_{21}(t)\neq 0$ $\forall t\in[a;b]$. Имеем $r=1$, $s_1=2$, $\check{r}=\check{r}=$ $=\tilde{r}=\hat{r}=0$, $\alpha=0$,

$$\varphi_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi_1^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t) \\ \\ a_{12}^{-1}(t)\, \dfrac{d}{dt}\, a_{12}(t) - a_{11}(t) \end{bmatrix},$$

$$\psi_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{12}^{-1}(t)\, a_{21}^{-1}(t) \end{bmatrix}, \quad \psi_1^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}(t) \\ \\ 1 & a_{12}^{-1}(t)\, \dfrac{d}{dt}\, a_{12}(t) - a_{11}(t) \end{bmatrix}, \quad \Psi_1(t) = \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) & 0 \\ 0 & a_{12}^{-1}(t)\, a_{21}^{-1}(t) \end{bmatrix}.$$

Общее решение (5) системы (1) таково:

$$x(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t) f_2(t) \\ \\ a_{12}^{-1}(t) \left\{ a_{11}(t) a_{21}^{-1}(t) f_2(t) - f_1(t) - \dfrac{d}{dt} \left[a_{21}^{-1}(t) f_2(t) \right] \right\} \end{bmatrix},$$

$$\mu = 0, \quad D(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; h[D(t)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \nu = 2, \; H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; \{h[D(t)]\}^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},$$

условие (7) разрешимости краевой задачи (1), (2) принимает вид

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(b) f_2(b) \\ \\ a_{12}^{-1}(b) \left\{ a_{11}(b)\, a_{21}^{-1}(b) f_2(b) - f_1(b) - \dfrac{d}{dt} \left[a_{21}^{-1}(t) f_2(t) \right]_{t=b} \right\} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(a) f_2(a) \\ a_{12}^{-1}(a) \left\{ a_{11}(a)\, a_{21}^{-1}(a) f_2(a) - f_1(a) - \dfrac{d}{dt} \left[a_{21}^{-1}(t) f_2(t) \right]_{t=a} \right\} \end{bmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(b) f_2(b) \\ \\ a_{12}^{-1}(b) \left\{ a_{11}(b)\, a_{21}^{-1}(b)\, f_2(b) - f_1(b) - \dfrac{d}{dt} \left[a_{21}^{-1}(t) f_2(t) \right]_{t=b} \right\} \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(a) f_2(a) \\ \\ a_{12}^{-1}(a) \left\{ a_{11}(a)\, a_{21}^{-1}(a)\, f_2(a) - f_1(a) - \dfrac{d}{dt} \left[a_{21}^{-1}(t) f_2(t) \right]_{t=a} \right\} \end{bmatrix}.$$

Тогда единственное решение (8) задачи (1), (2) имеет вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t) f_2(t) \\ a_{12}^{-1}(t) \left\{ a_{11}(t)\, a_{21}^{-1}(t)\, f_2(t) - f_1(t) - \dfrac{d}{dt} \left[a_{21}^{-1}(t) f_2(t)\right] \right\} \end{bmatrix}.$$

Случай 3: $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \neq 0$, $a_{21}(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [a;b]$. Имеем $\tilde{r} = 1$, $\tilde{s}_1 = 1$, $\check{r} = 1$, $\breve{r} = r = \hat{r} = 0$, $\alpha = 0$,

$$\tilde{\Phi}_1(t) = \tilde{\varphi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\varphi}_1^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\, \dfrac{d}{dt}\, a_{12}(t) - a_{11}(t) \end{bmatrix},$$

$$\breve{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Psi}_1(t) = \hat{\psi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \check{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Условие (4) разрешимости системы (1) принимает вид

$$f_2(t) \equiv 0.$$

При его выполнении ее общее решение (5) имеет вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t)\tilde{\beta}_1(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\tilde{\beta}_1(t)\, \dfrac{d}{dt}\, a_{12}(t) - a_{11}(t)\tilde{\beta}_1(t) - a_{12}^{-1}(t) f_1(t) + \dfrac{d}{dt}\, \tilde{\beta}_1(t) \end{bmatrix}.$$

Функции $\tilde{\xi}_k(t)$, $k = 1, 2$, выберем таким образом, чтобы векторы

$$\begin{bmatrix} a_{12}(t)\tilde{\xi}_k(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\tilde{\xi}_k(t)\, \dfrac{d}{dt}\, a_{12}(t) - a_{11}(t)\tilde{\xi}_k(t) + \dfrac{d}{dt}\, \tilde{\xi}_k(t) \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2,$$

были линейно независимы и выполнялись равенства

$$\tilde{\xi}_1(b) = a_{12}^{-1}(b) \left[a_{12}(a)\tilde{\xi}_1(a) + 1\right],$$

$$\frac{d}{dt}\, \tilde{\xi}_1(t)_{t=b} = -a_{12}^{-1}(b)\tilde{\xi}_1(b)\, \frac{d}{dt}\, a_{12}(t)_{t=b} + a_{11}(b)\tilde{\xi}_1(b) + a_{12}^{-1}(a)\tilde{\xi}_1(a)\, \frac{d}{dt}\, a_{12}(t)_{t=a} - {}$$
$$- a_{11}(a)\tilde{\xi}_1(a) + \frac{d}{dt}\, \tilde{\xi}_1(t)_{t=a},$$

$$\tilde{\xi}_2(b) = a_{12}^{-1}(b) a_{12}(a)\tilde{\xi}_2(a),$$

$$\frac{d}{dt}\,\tilde{\xi}_2(t)_{t=b} = -a_{12}^{-1}(b)\tilde{\xi}_2(b)\,\frac{d}{dt}\,a_{12}(t)_{t=b} + a_{11}(b)\tilde{\xi}_2(b) + a_{12}^{-1}(a)\tilde{\xi}_2(a)\,\frac{d}{dt}\,a_{12}(t)_{t=a} -$$

$$- a_{11}(a)\tilde{\xi}_2(a) + \frac{d}{dt}\,\tilde{\xi}_2(t)_{t=a} + 1.$$

Составим из этих векторов матрицу $D(t)$. Тогда

$$\mu = 2, \quad h[D(t)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \nu = 0, \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \{h[D(t)]\}^{-} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

условие (7) разрешимости краевой задачи (1), (2) выполняется. Ее общее решение (8) имеет вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t)\xi(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\xi(t)\,\frac{d}{dt}\,a_{12}(t) - a_{11}(t)\xi(t) - a_{12}^{-1}(t)f_1(t) + \frac{d}{dt}\,\xi(t) \end{bmatrix},$$

где

$$\xi(t) = \Big[\gamma_1 - a_{12}(b)\tilde{\beta}_1(b) + a_{12}(a)\tilde{\beta}_1(a)\Big]\,\tilde{\xi}_1(t) +$$

$$+ \Big[\gamma_2 - a_{12}^{-1}(b)\tilde{\beta}_1(b)\,\frac{d}{dt}\,a_{12}(t)_{t=b} + a_{11}(b)\tilde{\beta}_1(b) + a_{12}^{-1}(b)f_1(b) -$$

$$- \frac{d}{dt}\,\tilde{\beta}_1(t)_{t=b} + a_{12}^{-1}(a)\tilde{\beta}_1(a)\,\frac{d}{dt}\,a_{12}(t)_{t=a} -$$

$$- a_{11}(a)\tilde{\beta}_1(a) - a_{12}^{-1}(a)f_1(a) + \frac{d}{dt}\,\tilde{\beta}_1(t)_{t=a}\Big]\,\tilde{\xi}_2(t) + \tilde{\beta}_1(t).$$

Случай 4: $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \equiv 0$, $a_{21}(t) \neq 0\ \forall t \in [a; b]$. Имеем $\breve{r} = 1$, $\hat{r} = 1$, $\hat{s}_1 = 1$, $\tilde{r} = r = \check{r} = 0$, $\alpha = 0$,

$$\breve{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Psi}_1(t) = \tilde{\psi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\psi}_1^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{21}(t) \\ -a_{11}(t) - a_{21}^{-1}(t)\,\frac{d}{dt}\,a_{21}(t) \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Phi}_1(t) = \hat{\varphi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} a_{21}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \breve{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Условие (4) разрешимости системы (1) принимает вид

$$a_{21}(t)f_1(t) - a_{11}(t)f_2(t) - a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\frac{d}{dt}\,a_{21}(t) + \frac{d}{dt}\,f_2(t) \equiv 0.$$

Тогда ее общее решение (5) имеет вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ \breve{\beta}_1(t) \end{bmatrix}.$$

Функцию $\breve{\xi}_1(t)$ выберем таким образом, чтобы $\breve{\xi}_1(t) \neq 0 \;\; \forall t \in [a;b]$ и выполнялось равенство $\breve{\xi}_1(b) = \breve{\xi}_1(a) + 1$. Тогда

$$\mu = 1, \quad D(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \breve{\xi}_1(t) \end{bmatrix}, \quad h[D(t)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\nu = 1, \quad H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \{h[D(t)]\}^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},$$

условие (7) разрешимости краевой задачи (1), (2) принимает вид

$$\gamma_1 + a_{21}^{-1}(b) f_2(b) - a_{21}^{-1}(a) f_2(a) = 0.$$

Отсюда

$$\gamma_1 = -a_{21}^{-1}(b) f_2(b) + a_{21}^{-1}(a) f_2(a).$$

Тогда общее решение (8) краевой задачи (1), (2) имеет вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t) f_2(t) \\ \breve{\xi}_1(t) \left[\gamma_2 - \breve{\beta}_1(b) + \breve{\beta}_1(a)\right] + \breve{\beta}_1(t) \end{bmatrix}.$$

Случай 5: $a_{22}(t) \equiv 0, a_{12}(t) \equiv 0, a_{21}(t) \equiv 0 \;\; \forall t \in [a;b]$. Имеем $\breve{r} = 1, \check{r} = 1, \tilde{r} = r = \hat{r} = 0, \alpha = 1,$

$$\breve{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \breve{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \check{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \check{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$Q(t) = q_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P(t) = p_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M(t) = a_{11}(t).$$

Условие (4) разрешимости системы (1) принимает вид

$$f_2(t) \equiv 0.$$

Тогда общее решение (6) системы (1) имеет вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left[\int\limits_a^t a_{11}(z)dz\right] c_1 + \int\limits_a^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left[\int\limits_a^t a_{11}(z)dz\right] \times$$

$$\times \exp\left[-\int\limits_a^\tau a_{11}(z)dz\right] f_1(\tau)d\tau + \begin{bmatrix} 0 \\ \breve{\beta}_1(t) \end{bmatrix},$$

$$h[X_1(t)] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left[\int\limits_a^b a_{11}(z)dz\right] - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Функцию $\breve{\xi}_1(t)$ выберем таким образом, чтобы $\breve{\xi}_1(t) \neq 0 \ \ \forall t \in [a;b]$ и выполнялось равенство $\breve{\xi}_1(b) = \breve{\xi}_1(a) + 1$.

Если $\int_a^b a_{11}(z)dz = 0$, то

$$\mu = 1, \quad D(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \breve{\xi}_1(t) \end{bmatrix}, \quad h[D(t)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\nu = 1, \quad H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \{h[D(t)]\}^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},$$

условие (7) разрешимости краевой задачи (1), (2) принимает вид

$$\gamma_1 - \int_a^b \exp\left[-\int_a^\tau a_{11}(z)dz\right] f_1(\tau)d\tau = 0.$$

Отсюда

$$\gamma_1 = \int_a^b \exp\left[-\int_a^\tau a_{11}(z)dz\right] f_1(\tau)d\tau.$$

Тогда общее решение (8) задачи (1), (2) имеет вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left[\int_a^t a_{11}(z)dz\right] c_1 + \int_a^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left[\int_a^t a_{11}(z)dz\right] \times$$
$$\times \exp\left[-\int_a^\tau a_{11}(z)dz\right] f_1(\tau)d\tau + \begin{bmatrix} 0 \\ \breve{\xi}_1(t)\left[\gamma_2 - \breve{\beta}_1(b) + \breve{\beta}_1(a)\right] + \breve{\beta}_1(t) \end{bmatrix}.$$

Если $\int_a^b {}_{11}(z)dz \neq 0$, то

$$\mu = 1, \quad D(t) = \begin{bmatrix} \exp\left[\int_a^t a_{11}(z)dz\right] & 0 \\ 0 & \breve{\xi}_1(t) \end{bmatrix}, \quad h[D(t)] = \begin{bmatrix} \exp\left[\int_a^b a_{11}(z)dz\right] - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\nu = 0, \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \{h[D(t)]\}^- = \begin{bmatrix} \left\{\exp\left[\int_a^b a_{11}(z)dz\right] - 1\right\}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

условие (7) разрешимости краевой задачи (1), (2) выполняется. Ее общее решение (8) имеет вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left[\int\limits_a^t a_{11}(z)dz\right] \left\{\exp\left[\int\limits_a^b a_{11}(z)dz\right] - 1\right\}^{-1} \times$$

$$\times \left\{\gamma_1 - \exp\left[\int\limits_a^b a_{11}(z)dz\right] \int\limits_a^b \exp\left[-\int\limits_a^\tau a_{11}(z)dz\right] f_1(\tau)d\tau\right\} +$$

$$+ \int\limits_a^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left[\int\limits_a^t a_{11}(z)dz\right] \exp\left[-\int\limits_a^\tau a_{11}(z)dz\right] f_1(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ \breve{\xi}_1(t)\left[\gamma_2 - \breve{\beta}_1(b) + \breve{\beta}_1(a)\right] + \breve{\beta}_1(t) \end{bmatrix}.$$

Литература

1. *Бойчук О. А., Шегда Л. М.* Виродженi нетеровi крайовi задачi // Нелiнiйнi коливання. — 2007. — **10**, № 3. — С. 303 – 312.
2. *Елишевич М. А.* Некоторые свойства жордановых наборов векторов матрицы относительно оператора, содержащего дифференцирование // Журн. обчислюв. та прикл. математики. — 2012. — № 2 (108). — С. 119 – 134.
3. *Елишевич М. А.* Задача Коши для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с прямоугольными матрицами // Нелiнiйнi коливання. — 2013. — **16**, № 2. — С. 173 – 190.

Получено 31.10.14