УДК 517.925.42

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

С. А. Айсагалиев

Казах. нац. ун-т им. аль-Фараби
просп. Аль-Фараби, 71, корп. 13, Алматы, 050040, Казахстан
e-mail: serikbai.aisagaliev@kaznu.kz

We propose a method for studying periodic solutions of autonomous dynamical systems given by ordinary differential equations with phase and integral restrictions. We formulate a general problem on periodic solutions as a boundary-value problem with restrictions. By introducing a fictitious control, the boundary-value problem is transformed to a control problem for dynamical systems with phase and integral restrictions. The control problem is solved by reducing it to an integral first kind Fredholm equation. We find necessary and sufficient conditions for existence of a periodic solution, and propose an algorithm for finding a periodic solution from limit points of minimizing sequences.

Запропоновано метод дослідження періодичних розв'язків автономних динамічних систем, що описуються звичайними диференціальними рівняннями з фазовими та інтегральними обмеженнями. Сформульовано загальну задачу про періодичний розв'язок у вигляді крайової задачі з обмеженнями. Шляхом уведення фіктивного керування крайову задачу зведено до задачі керованості динамічних систем із фазовими та інтегральними обмеженнями. Розв'язання задачі керованості зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду. Отримано необхідні та достатні умови існування періодичного розв'язку і розроблено алгоритм побудови періодичного розв'язку за граничними точками мінімізаційних послідовностей.

1. Введение. Основными методами исследования периодических решений процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, являются метод малого параметра, асимптотические методы разделения движения, метод фазового пространства и точечных отображений, метод гармонической линеаризации.

Метод малого параметра берет свое начало в работах А. Пуанкаре [1, 2] и А. М. Ляпунова [3]. Аппарат теории Пуанкаре – Ляпунова основан на использовании свойств аналитичности правых частей дифференциальных уравнений. Однако во многих прикладных задачах уравнения движения системы не имеют этих свойств.

Эффективный способ решения нелинейных задач в теории колебаний систем с одной степенью свободы был предложен голландским инженером Ван-дер-Полем [4].

В 30-х годах XX века Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов [5] предложили общий подход к исследованию уравнений с малым параметром. Его суть заключается в построении такой замены переменных, которая позволяет отделить „быстрые" переменные от „медленных". Эта замена переменных позволяет также представить решение в виде асимптотического ряда, первый член которого совпадает с решением, полученным по методу Ван-дер-Поля. Метод Крылова – Боголюбова с дополнением, а именно, исследованием систем с „медленно" меняющимися параметрами, изложен в работе [6].

Идея Крылова – Боголюбова была развита Е. П. Поповым [7, 8], и им в 50-е годы XX века создан метод гармонической линеаризации, получивший широкое практическое применение. Этот метод более чем какой-либо другой оказался способным в простейшем виде уловить самые главные специфические свойства нелинейных процессов в системе.

© С. А. Айсагалиев, 2017

Метод малого параметра и разделения движения, гармонической линеаризации относится к приближенным методам. Достоинствами этих методов являются универсальность и простота, а к недостаткам относится невозможность во многих случаях предсказать или оценить величину получаемой погрешности.

Метод фазового пространства и точечных отображений берет свое начало в работах М. Г. Леоте и А. Пфарр. Существенный вклад в развитие данного метода внесли А. Пуанкаре [2], Г. Д. Биркгоф [9], А. А. Андронов [10], Ю. И. Неймарк [11], Р. А. Нелепин [12]. Он весьма эффективен, если порядок автономной системы $n = 2$. Данный метод был распространен на нелинейные системы высокого порядка ($n \geq 3$) Р. А. Нелепиным [12].

Метод Ляпунова – Пуанкаре получил развитие в работах Г. В. Каменкова [13] и И. Г. Малкина [14]. О. Воеводы [15], А. П. Проскурякова [16], А. Бойчука, С. Чуйко [17, 18].

Существование и построение периодического решения при наличии фазового и интегрального ограничений относятся к числу нерешенных проблем качественной теории. К сожалению, в настоящее время нет публикаций, посвященных решению данной проблемы. Поэтому разработка методов построения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида является актуальной проблемой.

Данная работа является продолжением научных исследований, приведенных в работах [19, 20].

2. Постановка задачи. Рассмотрим нелинейную автономную систему

$$\dot{x} = Ax + Bf(x), \quad t \in I_* = [0, T_*], \tag{1}$$

$$x(0) = x(T_*) = x_0 \in S \subset R^n, \tag{2}$$

при наличии фазовых

$$x(t) \in G\colon G = \{x \in R^n / a \leq F(x) \leq b, \ t \in I_*\} \tag{3}$$

и интегральных

$$g_j(x) \leq c_j, \quad j = \overline{1, m_1}, \quad g_j(x) = c_j, \quad j = \overline{m_1 + 1, m_2}, \tag{4}$$

$$g_j(x) = \int\limits_0^{T_*} f_{0j}(x(t))dt, \quad j = \overline{1, m_2}, \tag{5}$$

ограничений. Здесь A, B — постоянные матрицы порядков $n \times n$, $n \times m$ соответственно, S — заданное выпуклое замкнутое множество, m-мерная вектор-функция $f(x)$ определена и непрерывна по переменной $x \in D$ и удовлетворяет условиям

$$|f(x) - f(y)| \leq l|x - y| \quad \forall x, y \in D, \quad l = \text{const} > 0,$$

$$|f(x)| \leq c_0, \quad x \in D, \quad c_0 = \text{const} > 0, \quad G \subset D,$$

где $D \subset R^n$ — ограниченное замкнутое множество. Функция $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_s(x))$ — s-мерная вектор-функция, непрерывная по переменной $x \in D$, $a \in R^s$, $b \in R^s$ — заданные векторы, T_* — период.

Величины c_j, $j = \overline{1, m_2}$, — заданные постоянные, $f_{0j}(x)$, $j = \overline{1, m_2}$, — заданные непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$|f_{0j}(x) - f_{0j}(y)| \leq l_j |x - y| \quad \forall x, y \in D,$$

$$|f_{0j}(x)| \leq c_{0j}, \quad c_{0j} = \mathrm{const} > 0, \quad j = \overline{1, m_2}.$$

Ставятся следующие задачи.

Задача 1. *Найти необходимые и достаточные условия существования периодического решения системы (1) – (5).*

Задача 2. *Построить периодическое решение системы (1) – (5). Найти период T_*.*

Заметим, что если матрица $A = 0$, $B = I_n$, то

$$\dot{x} = f(x), \quad t \in I_*, \quad I_* = [0, T_*], \tag{6}$$

где I_n — единичная матрица порядка $n \times n$. Поэтому полученные ниже результаты остаются справедливыми для уравнения вида (6) при условиях (2) – (5).

Из уравнения (1), в частности, могут быть получены система уравнений Ляпунова и система уравнений Пуанкаре, а также уравнение Ван-дер-Поля.

При отсутствии фазовых и интегральных ограничений (3) – (5) задачи 1, 2, в частности, можно сформулировать так:

Задача 3. *Найти необходимые и достаточные условия существования периодического решения уравнения (1).*

Задача 4. *Построить периодическое решение уравнения (1). Найти период T_*.*

Решения задач 3, 4 следуют из решений задач 1, 2. Известные результаты являются приближенными решениями задач 3, 4.

Как следует из постановки задачи, необходимо найти периодическое решение $x(t) = x(t + T_*)$, $t \geq 0$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $x(t) = x(t + T_*) \in G$, $t \geq 0$, 2) вдоль периодического решения выполнены соотношения (4), (5).

3. Преобразования. Рассмотрим интегральные ограничения (4), (5). Введем вектор-функцию $\eta(t) = (\eta_1(t), \ldots, \eta_{m_2}(t))$, $t \in I_*$, следующим образом:

$$\eta_j(t) = \int_0^t f_{0j}(x(\tau)) d\tau, \quad j = \overline{1, m_2}, \quad t \in I_*. \tag{7}$$

Из (7) следует, что

$$\dot{\eta} = f_0(x), \quad f_0(x) = (f_{01}(x), \ldots, f_{0m_2}(x)), \tag{8}$$

где $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{m_2})$,

$$\begin{gathered} \eta(t_0) = 0, \quad \eta(T_*) = \bar{c}, \quad \bar{c} \in Q = \big\{\bar{c} \in R^{m_2} / \bar{c} = (\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_{m_2}), \\ \bar{c}_j = c_j - d_j, \ j = \overline{1, m_1}, \ \bar{c}_j = c_j, \ j = \overline{m_1 + 1, m_2}, \ d_j \geq 0, \ j = \overline{1, m_1}\big\}. \end{gathered} \tag{9}$$

Введем следующие векторы и матрицы:

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} A & O_{nm_2} \\ O_{m_2n} & O_{m_2m_2} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} B \\ O_{m_2n} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} O_{nm_2} \\ I_{m_2} \end{pmatrix},$$

$$P_1 = (I_n,\, O_{nm_2}), \quad P_2 = (O_{m_2n},\, I_{m_2}).$$

Теперь систему уравнений (1), (8) можно записать в векторной форме

$$\dot{\xi} = A_1\xi + B_1 f(P_1\xi) + B_2 f_0(P_1\xi), \quad t \in I_*, \tag{10}$$

с краевыми условиями (см. (9))

$$P_1\xi(0) = P_1\xi(T_*) = x_0 \in S, \quad P_2\xi(0) = 0, \quad P_2\xi(T_*) = \bar{c} \in \Omega, \tag{11}$$

$$P_1\xi(t) \in G, \quad P_1\xi = x, \quad P_2\xi = \eta. \tag{12}$$

Заметим, что соотношения (1) – (6) равносильны (10) – (12). Тогда задачи 1, 2 равносильны следующим задачам.

Задача 1′. *Найти необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи (10) – (12).*

Задача 2′. *Построить решение краевой задачи (10) – (12).*

4. Интегральные уравнения. Для решения краевой задачи (10) – (12) необходимы теоремы о свойствах решений интегрального уравнения Фредгольма первого рода из работ [21, 22]. Рассмотрим интегральные уравнения вида

$$Ku \equiv \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)u(t)dt = a, \quad t \in I = [t_0, t_1], \tag{13}$$

где $K(t_0, t) = \|K_{ij}(t_0, t)\|$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, — известная матрица порядка $n \times m$ с кусочно-непрерывными элементами по t при фиксированных t_0, t_1, $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ — искомая функция, $a \in R^n$ — заданный вектор.

Теорема 1. *Интегральное уравнение (13) при любом фиксированном $a \in R^n$ имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$C(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)K^*(t_0, t)dt \tag{14}$$

порядка $n \times n$ является положительно определенной, $*$ — знак транспонирования, $t_1 >$ $> t_0$.

Теорема 2. *Пусть матрица $C(t_0, t_1)$ положительно определена. Тогда общее решение интегрального уравнения (13) имеет вид*

$$u(t) = v(t) + K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)a - K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)v(t)dt, \quad t \in I,$$

где $v(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ — *произвольная функция,* $a \in R^n$ — *произвольный вектор.*

5. Существование решения. Наряду с дифференциальным уравнением (10) с краевыми условиями (11) рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{y} = A_1 y + B_1 w_1(t) + B_2 w_2(t), \quad t \in I_* = [0, T_*], \tag{15}$$

$$y(0) = \xi(0) = \xi_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ O_{m_2 1} \end{pmatrix}, \quad y(T_*) = \xi(T_*) = \xi_1 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \overline{c} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$w_1(\cdot) \in L_2(I, R^m), \quad w_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}), \tag{17}$$

где

$$\xi(0) = \xi_0 = \begin{pmatrix} x(0) \\ \eta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ O_{m_2 1} \end{pmatrix}, \quad \xi(T_*) = \xi_1 = \begin{pmatrix} x(T_*) \\ \eta(T_*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \overline{c} \end{pmatrix},$$

$$\xi_0 \in R^n \times O_{m_2,1}, \quad \xi_1 \in R^n \times Q, \quad P_1\xi_0 = x(0) = x_0, \quad P_2\xi_0 = \eta(0) = O_{m_2,1},$$

$$P_1\xi_1 = x(T_*) = x_0, \quad P_2\xi_1 = \eta(T_*) = \overline{c}, \quad x_0 \in S, \quad \overline{c} \in Q,$$

$O_{m_2,1}$ — $(m_2 \times 1)$-вектор с нулевыми элементами.

Заметим, что уравнение (15) получено из (10) путем замены $f(P_1\xi)$, $f_0(P_1\xi)$ на $w_1(t)$, $w_2(t)$ соответственно.

Пусть матрица $E = (B_1, B_2)$ имеет порядок $(n + m_2) \times (m + m_2)$, функция $w(t) = (w_1(t), w_2(t))$ принадлежит $L_2(I, R^{m+m_2})$, матрица $\Psi(t,\tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, где $\theta(t) = e^{A_1 t}$ — фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\zeta} = A_1\zeta$. По исходным данным системы (15) – (17) определим следующие векторы и матрицы:

$$a = \Psi(0,T_*)\xi_1 - \xi_0, \quad W_1(0,T_*) = \int\limits_0^{T_*} \Psi(0,t)EE^*\Psi^*(0,t)dt,$$

$$W_1(0,t) = \int\limits_0^{t} \Psi(0,\tau)EE^*\Psi^*(0,\tau)d\tau, \quad W_1(t,T_*) = W_1(0,T_*) - W_1(0,t),$$

$$\Gamma_1(t,\xi_0,\xi_1) = E^*\Psi^*(0,t)W_1^{-1}(0,T_*)a, \quad M_1(t) = -E^*\Psi^*(0,t)W_1^{-1}(0,T_*)\Psi(0,T_*) =$$

$$= \begin{pmatrix} -B_1^*\Psi^*(0,t)W_1^{-1}(0,T_*)\Psi(0,T_*) \\ -B_2^*\Psi^*(0,t)W_1^{-1}(0,T_*)\Psi(0,T_*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}(t) \\ M_{12}(t) \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_2(t,\xi_0,\xi_1) = \Psi(t,0)W_1(t,T_*)W_1^{-1}(0,T_*)\xi_0 + \Psi(t,0)W_1(0,t)W_1^{-1}(0,T_*)\Psi(0,T_*)\xi_1,$$

$$M_2(t) = -\Psi(t,0)W_1(0,t)W_1^{-1}(0,T_*)\Psi(0,T_*), \quad t \in T_*, \quad \Psi(t,\tau) = e^{A_1(t-\tau)}.$$

Теорема 3. *Пусть матрица $W_1(0, T_*)$ положительно определена. Управление $w(\cdot) \in \in L_2(I, R^{m+m_2})$ переводит траекторию системы (15)–(17) из любой заданной точки $\xi_0 \in R^{n+m_2}$ в любое заданное конечное состояние $\xi_1 \in R^{n+m_2}$ тогда и только тогда, когда*

$$w(t) \in \Omega = \big\{w(\cdot) \in L_2(I, R^{m+m_2})/w(t) = v(t)+ \\ +\Gamma_1(t, \xi_0, \xi_1) + M_1(t)z(T_*, v) \ \ \forall v(\cdot) \in L_2(I, R^{m+m_2}), \ \ t \in I_*\big\}, \tag{18}$$

где $v(\cdot) \in L_2(I, R^{m+m_2})$ — произвольная функция, а функция $z(t, v)$, $t \in I_*$, — решение дифференциального уравнения

$$\dot z = A_1 z + Ev(t), \quad z(0) = 0, \quad v(t) = (v_1(t), v_2(t)), \quad t \in I_*. \tag{19}$$

Решение дифференциального уравнения (15), соответствующее управлению $w(t) \in \in \Omega$, определяется по формуле

$$y(t) = z(t) + \Gamma_2(t, \xi_0, \xi_1) + M_2(t)z(T_*, v), \quad t \in I_*. \tag{20}$$

Доказательство. Уравнения движения управляемой системы (15)–(17) могут быть представлены в виде

$$\dot y = A_1 y + Ew(t), \quad t \in [0, T_*], \quad y(0) = \xi_0, \quad y(T_*) = \xi_1, \\ w(t) = (w_1(t), w_2(t)) \in L_2(I, R^{m+m_2}). \tag{21}$$

Решение дифференциального уравнения

$$\dot y = A_1 y + Ew(t), \quad y(0) = \xi_0, \quad t \in I_* = [0, T_*],$$

имеет вид

$$y(t) = \Phi(t, 0)\xi_0 + \int\limits_0^t \Psi(t, \tau)Ew(t)d\tau, \quad t \in I_*.$$

Тогда управление $w(\cdot) \in L_2(I, R^{m+m_2})$, которое переводит траекторию системы (21) из начального состояния $\xi_0 \in R^{n+m_2}$ в состояние $\xi_1 \in R^{n+m_2}$, определяется из условия

$$\int\limits_0^{T_*} \Psi(0, t)Ew(t)dt = \Psi(0, T_*)\xi_1 - \xi_0 = a. \tag{22}$$

Из теоремы 2 следует, что общее решение интегрального уравнения (22) имеет вид

$$w(t) = v(t) + K^*(0, t)C^{-1}(0, T_*)a - K^*(0, T_*)C^{-1}(0, T_*)\int\limits_0^{T_*} K(0, t)v(t)dt,$$

где $K(0,t) = \Psi(0,t)E$, $C(0,T_*) = W_1(0,T_*)$. Отсюда имеем (см. (14))

$$w(t) = E^*\Psi^*(0,t)W^{-1}(0,T_*)a + v(t) - E^*\Psi^*(0,t)W^{-1}(0,T_*)\int_0^{T_*}\Psi(0,t)Ev(t)dt, \quad t \in I, \tag{23}$$

где $v(\cdot) \in L_2(I, R^{m+m_2})$ — произвольная функция. Решение дифференциального уравнения (19) таково:

$$z(t) = z(t,v) = \Psi(t,0)z(0) + \int_0^t \Psi(t,\tau)Ev(\tau)d\tau = \int_0^t \Psi(t,\tau)Ev(\tau)d\tau.$$

Тогда

$$w(t) = v(t) + \Gamma_1(t,\xi_0,\xi_1) + M_1(t)z(T_*,v), \quad t \in I.$$

Отсюда следует, что $w(t)$ принадлежит Ω. Итак, доказано включение (18).

Пусть $w(t)$ принадлежит Ω. Тогда решение дифференциального уравнения (21) имеет вид

$$y(t) = \Psi(t,0)\xi_0 + \int_0^t \Psi(t,\tau)E[v(\tau) + \Gamma_1(\tau,\xi_0,\xi_1) + M_1(t)z(T_*,v)]d\tau =$$

$$= z(t,v) + \Gamma_2(t,\xi_0,\xi_1) + M_2(t)z(T_*,v), \quad t \in I_*.$$

Отсюда следует представление решения системы (21) в виде (20).

Легко убедиться в том, что $y(0) = z(0,v) + \Gamma_2(0,\xi_0,\xi_1) + M_2(0)z(T_*,v) = \xi_0$, $y(T_*) = = z(T_*,v) + \Gamma_2(T_*,\xi_0,\xi_1) + M_2(T_*)z(T_*,v) = \xi_1$.

Теорема 3 доказана.

Лемма 1. *Для того чтобы матрица*

$$W_1(0,T_*) = \int_0^{T_*} \Psi(0,t)EE^*\Psi^*(0,t)dt = \int_0^{T_*} e^{-A_1 t}EE^*e^{-A_1^* t}dt \tag{24}$$

была положительно определенной для любого $T_* > 0$, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$W = \left\| E, A_1E, A_1^2E, \ldots, A_1^{n+m_2-1}E \right\| \tag{25}$$

был равен $n + m_2$.

Критерий управляемости пары (A_1, E) в виде $\operatorname{rank} W = n + m_2$ был получен Р. Е. Калманом [23]. Доказательство равносильности $\operatorname{rank} W = n + m_2$ и $W_1(0,T_*) > 0$ можно найти в [24].

Лемма 2. *Пусть матрица $W_1(0,T_*) > 0$. Тогда краевая задача с ограничениями (1) – (5) равносильна задаче*

$$w_1(t) = v_1(t) + \Gamma_{11}(t,\xi_0,\xi_1) + M_{11}(t)z(T_*,v_1,v_2) = f(P_1y(t)), \quad t \in I_*, \tag{26}$$

$$w_2(t) = v_2(t) + \Gamma_{12}(t,\xi_0,\xi_1) + M_{12}(t)z(T_*,v_1,v_2) = f_0(P_1y(t)), \quad t \in I_*, \tag{27}$$

$$w(t) = (w_1(t), w_2(t)) \in \Omega, \quad v(t) = (v_1, v_2) \in L_2(I_*, R^{m+m_2}),$$

$$v_1(\cdot) \in L_2(I, R^m), \quad v_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}), \tag{28}$$

$$\Gamma_1(t,\xi_0,\xi_1) = (\Gamma_{11}(t,\xi_0,\xi_1), \Gamma_{12}(t,\xi_0,\xi_1)), \quad P_1y(t) \in G(t), \quad t \in I_*,$$

где функция $z(t,v) = z(t,v_1,v_2)$, $t \in I_*$, — решение дифференциального уравнения (19), функция $y(t)$, $t \in I_*$, определяется по формуле (20).

Доказательство леммы следует из теоремы 3 и равенства $P_1y(t) = x(t)$, $\xi(t) = y(t)$, $t \in I_*$.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал (см. (23), (28))

$$J(v_1,v_2,x_0,d,p) = \int_0^{T_*} \big[|w_1(t) - f(P_1y(t))|^2 + |w_2(t) - f_0(P_1y(t))|^2 +$$

$$+ |p(t) - F(P_1y(t))|^2\big]\,dt \to \inf \tag{29}$$

при

$$\dot z = A_1 z + B_1 v_1(t) + B_2 v_2(t), \quad z(0) = 0, \quad t \in I_*, \tag{30}$$

$$v_1(\cdot) \in L_2(I_*, R^m), \quad v_2(\cdot) \in L_2(I_*, R^{m_2}), \tag{31}$$

$$x_0 \in S, \quad d \in \Gamma = \{d \in R^{m_1} / d \ge 0\}, \tag{32}$$

$$p(t) \in V = \{p(\cdot) \in L_2(I_*, R^s) / a \le p(t) \le b, \ t \in I_*\}, \tag{33}$$

где функции $w_1(t)$, $w_2(t)$, $t \in I_*$, определяются формулами (26), (27) соответственно.

Введем следующие обозначения:

$$\theta = (v_1(t), v_2(t), x_0, d, p(t)) \in X = L_2(I, R^m) \times L_2(I, R^{m_2}) \times S \times \Gamma \times V,$$

$$H = L_2(I, R^m) \times L_2(I, R^{m_2}) \times R^n \times R^{m_1} \times L_2(I_*, R^s), \quad X \subset H.$$

Теорема 4. *Пусть матрица $W_1(0,T_*) > 0$. Для того чтобы краевая задача с ограничениями (1) – (5) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы значение $J(\theta_*) = 0$, где $\theta_* = (v_1^*, v_2^*, x_0^*, d_*, p_*) \in X$ — решение оптимизационной задачи (29) – (33).*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть краевая задача (1) – (5) имеет решение. Покажем, что значение $J(\theta_*) = 0$. Пусть $x(t; 0, x_0^*)$, $t \in I_*$, — решение дифференциального уравнения (1), где $x_0^* \in S$. Как следует из леммы 2, краевая задача (1) – (5) равносильна задаче (26) – (28). Следовательно,

$$v_1^*(t) + \Gamma_{11}(t; x_0^*, d_*) + M_{11}(t) z(T_*, v_1^*, v_2^*) = f(P_1 y_*(t)), \quad t \in I_*,$$

$$v_2^*(t) + \Gamma_{12}(t; x_0^*, d_*) + M_{12}(t) z(T_*, v_1^*, v_2^*) = f_0(P_1 y_*(t)), \quad t \in I_*,$$

$$y_*(t) = z(t, v_1^*, v_2^*) + \Gamma_2(t; x_0^*, d_*) + M_2(t) z(T_*, v_1^*, v_2^*), \quad t \in I_*,$$

где

$$x_0^* \in S, \quad w_1^*(t) = v_1^*(t) + \Gamma_{11}(t; x_0^*, d_*) + M_{11}(t) z(T_*, v_1^*, v_2^*),$$

$$w_2^*(t) = v_2^*(t) + \Gamma_{12}(t; x_0^*, d_*) + M_{12}(t) z(T_*, v_1^*, v_2^*),$$

$$y_*(t) = \xi_*(t) = (x(t, 0, x_0^*), \eta_*(t; 0, 0)), \quad t \in I_*,$$

$$F(P_1 y_*(t)) = F(x(t; 0, x_0^*)), \quad t \in I_*.$$

Тогда

$$J(\theta_*) = \int_0^{T_*} [|w_1^* - f(P_1 y_*)|^2 + |w_2^*(t) - f_0(P_1 y_*(t))|^2 + |p_* - F(P_1 y_*)|^2] dt = 0,$$

где $P_*(t) = F(P_1 y_*(t)) \in V, t \in I_*$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть значение $J(\theta_*) = 0$. Покажем, что краевая задача (1) – (5) имеет решение. В самом деле, значение $J(\theta_*) = 0$ тогда и только тогда, когда $w_1^*(t) = f(P_1 y_*(t)), w_2^*(t) = f_0(P_1 y_*(t)), p_*(t) = F(P_1 y_*(t))$, где

$$y_*(t) = (x(t; 0, x_0^*), \eta_*(t)), \quad (w_1^*(t), w_2^*(t)) \in \Omega, \quad \theta_* \in X.$$

Отсюда следует, что $x(t; 0, x_0^*)$, $t \in I_*$, — решение уравнения (1), $x(0) = x(T_*) = x_0^*$, $\eta_*(0) = 0, \eta_*(T_*) \in Q, p_*(t) = F(P_1 y_*(t)) \in G$. Достаточность доказана.

Теорема 4 доказана.

Поскольку

$$\Gamma_{11}(t, \xi_0, \xi_1) = T_1(t) x_0 + T_2(t) d + r_1(t) + M_{11}(t) z(T_*, v),$$

$$\Gamma_{12}(t, \xi_0, \xi_1) = C_1(t) x_0 + C_2(t) + r_2(t) + M_{12}(t) z(T_*, v),$$

$$\Gamma_2(t, \xi_0, \xi_1) = D_1(t) x_0 + D_2(t) d + r(t) + M_2(t) z(T_*, v),$$

то

$$\begin{aligned} w_1(t) &= v_1(t) + T_1(t) x_0 + T_2(t) d + r_1(t) + M_{11}(t) z(T_*, v), \quad t \in I_*, \\ w_2(t) &= v_2(t) + C_1(t) x_0 + C_2(t) d + r_2(t) + M_{12}(t) z(T_*, v), \quad t \in I_*, \\ y_*(t) &= z(t, v) + D_1(t) x_0 + D_2(t) d + r(t) + M_2(t) z(T_*, v), \quad t \in I_*, \end{aligned} \tag{34}$$

функция

$$F_0 = |w_1(t) - f(P_1 y(t))|^2 + |w_2(t) - f_0(P_1 y(t))|^2 + |p(t) - F(P_1 y(t))|^2 = F_0(q(t), t),$$
$$q(t) = (\theta(t), z(t, v), z(T_*, v)). \tag{35}$$

Обозначим $F_{0q}(q,t) = (F_{0v_1}, F_{0v_2}, F_{0x_0}, F_{0d}, F_{0p}, F_{0z}, F_{0z(T_*)})$.

Лемма 3. *Пусть выполнено неравенство*

$$\langle F_{0q}(q_1, t) - F_{0q}(q_2, t), q_1 - q_2 \rangle_{R^N} \geq 0, \quad q_1, q_2 \in R^N,$$
$$N = m + m_1 + s + 3(n + m_2). \tag{36}$$

Тогда функционал (29) при условиях (30) – (33) является выпуклым.

Доказательство. Для любого фиксированного $t \in I_*$ соотношение (36) является необходимым и достаточным условием выпуклости гладкой функции $F_0(q,t)$ по переменной q, т. е.

$$F_0(\alpha q_1 + (1-\alpha) q_2, t) \leq \alpha F_0(q_1, t) + (1-\alpha) F_0(q_2, t), \quad q_1, q_2 \in R^N, \quad \alpha \in [0,1]. \tag{37}$$

Значение функционала (см. (34), (35)) таково:

$$J(\theta_\alpha) = J(\alpha\theta_1 + (1-\alpha)\theta_2) = \int_0^{T_*} F_0(q_\alpha(t), t) dt =$$
$$= \int_0^{T_*} F_0(\alpha\theta_1 + (1-\alpha)\theta_2, z(t, \alpha v^1 + (1-\alpha)v^2), z(T_*, \alpha v^1 + (1-\alpha)v^2)) dt \leq$$
$$\leq \alpha \int_0^{T_*} F_0(q_1(t), t) dt + (1-\alpha) \int_0^{T_*} F_0(q_2(t), t) dt =$$
$$= \alpha J(\theta_1) + (1-\alpha) J(\theta_2), \quad \theta_1, \theta_2 \in X.$$

Лемма 3 доказана.

Теорема 5. *Пусть производная $F_{0q}(q,t)$ удовлетворяет условию Липшица. Тогда функционал (29) при условиях (30) – (33) дифференцируем по Фреше, градиент*

$$J'(\theta) = \left(J'_{v_1}(\theta), J'_{v_2}(\theta), J'_{x_0}(\theta), J'_d(\theta), J'_p(\theta)\right) \in H$$

в любой точке $\theta \in X$ и вычисляется по формулам

$$\begin{gathered} J'_{v_1}(\theta) = F_{0v_1}(q(t),t) - B_1^*\psi(t) \in L_2(I,R^m), \\ J'_{v_2}(\theta) = F_{0v_2}(q(t),t) - B_2^*\psi(t) \in L_2(I,R^{m_2}), \\ J'_{x_0}(\theta) = \int\limits_0^{T_*} F_{0x_0}(q(t),t)dt \in R^n, \quad J'_d(\theta) = \int\limits_0^{T_*} F_{0d}(q(t),t)dt \in R^{m_1}, \\ J'_p(\theta) = F_{0p}(q(t),t) \in L_2(I,R^s), \end{gathered} \tag{38}$$

где $q(t) = (v_1(t), v_2(t), x_0, d, p(t), z(t,v), z(T_*,v))$, $z(t,v)$, $t \in I$, — решение дифференциального уравнения (30), а функция $\psi(t)$, $t \in I_*$, — решение сопряженной системы

$$\dot\psi = F_{0z}(q(t),t) - A_1^*(t)\psi, \quad \psi(T_*) = -\int\limits_0^{T_*} F_{0z(T_*)}(q(t),t)dt. \tag{39}$$

Кроме того, градиент $J'(\theta) \in H$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)\| \le l_0\|\theta_1 - \theta_2\|, \quad \theta_1,\theta_2 \in X. \tag{40}$$

Доказательство. Функционал (29) не относится к классу известных типов функционалов (функционал Лагранжа, функционал Майера, функционал Больца). Поэтому требуется отдельное доказательство каждого утверждения теоремы.

Дифференциальное уравнение (30) может быть представлено в виде

$$\dot z = A_1 z + Ev(t), \quad z(0) = 0, \quad t \in I_*, \tag{41}$$

где $E = (B_1, B_2)$, $v(t) = (v_1(t), v_2(t)) \in L_2(I_1, R^{m+m_2})$. Пусть $v(t), v(t)+h(t) \in L_2(I, R^{m+m_2})$, $z(t,v)$, $z(t,v+h)$ — решения уравнения (41), соответствующие управлениям $v(t)$, $v(t) + {}$ $+h(t)$. Тогда приращение $\Delta z(t) = z(t,v+h) - z(t,v)$ является решением дифференциального уравнения

$$\Delta\dot z(t) = A_1\Delta z + Eh(t), \quad \Delta z(0) = 0, \quad t \in I_*.$$

Справедлива оценка

$$|\Delta z(t)| \le \int\limits_0^{T_*} \|\Phi(t,\tau)E\||h(\tau)|d\tau \le c_1 \int\limits_0^{T_*} |h(t)|dt \le c_2\|h\|_{L_2},$$

где $c_1 = \sup\|\Phi(t,\tau)E\|$, $0 \le t,\tau \le T_*$, $c_2 = c_1\sqrt{T_*}$, $\|h\|_{L_2} = \left(\int_0^{T_*} |h(t)|^2 dt\right)^{1/2}$.

Пусть $\theta = (v_1, v_2, x_0, d, p) \in X$, $\theta + \Delta\theta = (v + h, x_0 + \Delta x_0, d + \Delta d, p + \Delta p) \in X$. Тогда приращение функционала

$$\Delta J = J(\theta + \Delta\theta) - J(\theta) = \int_0^{T_*} [h_1^*(t) F_{0v_1}(q(t), t) + h_2(t) F_{0v_2}(q(t), t) + \Delta x_0^* F_{0x_0}(q(t), t) +$$

$$+ \Delta d^* F_{0d}(q(t), t) + \Delta p^*(t) F_{0p}(q(t), t) + \Delta z^*(t) F_{0z}(q(t), t) +$$

$$+ \Delta z^*(T_*) F_{0z(T_*)}(q(t), t) \big] \, dt + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7. \tag{42}$$

Из (42) с учетом того, что

$$\Delta z^*(T_*) \int_0^{T_*} F_{0z(T_*)}(q(t), t) dt = - \int_0^{T_*} h_1^*(t) B_1^* \psi(t) dt -$$

$$- \int_0^{T_*} h_2^*(t) B_2^* \psi(t) dt - \int_0^{T_*} \Delta z^*(t) F_{0z}(q(t), t) dt,$$

получаем

$$\Delta J = \int_0^{T_*} \{ h_1^* [F_{0v_1}(q(t), t) - B_1^* \psi(t)] + h_2^*(t) [F_{0v_2} - B_2^* \psi(t)] +$$

$$+ \Delta x_0^* F_{0x_0}(q(t), t) + \Delta d^* F_{0d}(q(t), t) \} \, dt + \sum_{i=1}^{7} R_i. \tag{43}$$

Легко убедиться в том, что

$$\|\Delta q\|^2 \le c_3^2 \|\Delta\theta\|^2, \quad \|\Delta\theta\|^2 = \|h_1\|^2 + \|h_2\|^2 + |\Delta x_0|^2 + |\Delta d|^2 + \|\Delta p\|^2.$$

Тогда $|R| \le \sum_{i=1}^{7} |R_i| \le c_4 \|\Delta\theta\|^2$, $c_3 = \text{const} > 0$, $c_4 = \text{const} > 0$. Из соотношений (43) следует, что $J'(\theta)$ определяется по формуле (38).

Покажем, что градиент $J'(\theta)$ удовлетворяет условию Липшица (40). Обозначим $\theta_1 = (v + h, x_0 + \Delta x_0, d + \Delta d, p + \Delta p)$, $\theta_2 = (v, x_0, d, p)$, $\theta_1 \in X$, $\theta_2 \in X$. Тогда, согласно соотношениям (38), имеем

$$J'(\theta_1) - J'(\theta_2) = \Big(F_{0v_1}(\cdot\,\cdot) - F_{0v_1}(\cdot) - B_1 \Delta\psi(t), F_{0v_2}(\cdot\,\cdot) - F_{0v_2}(\cdot) - B_2 \Delta\psi(t),$$

$$\int_0^{T_*} [F_{0x_0}(\cdot\,\cdot) - F_{0x_0}(\cdot)] dt, \ \int_0^{T_*} [F_{0d}(\cdot\,\cdot) - F_{0d}(\cdot)] dt, \ F_{0p}(\cdot\,\cdot) - F_{0p}(\cdot) \Big),$$

где $(\cdot\ \cdot) = (q(t) + \Delta q(t), t)$, $(\cdot) = (q(t), t)$, $\Delta\psi(t) = \psi(t, v + \Delta v) - \psi(t, v)$. Отсюда следует, что

$$|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)| \le |F_{0v_1}(\cdot\ \cdot) - F_{0v_1}(\cdot)| + \|B_1\|\,|\Delta\psi(t)| + |F_{0v_2}(\cdot\ \cdot) - F_{0v_2}(\cdot)| + \|B_2\|\,|\Delta\psi(t)| +$$

$$+ \int_0^{T_*} |F_{0x_0}(\cdot\ \cdot) - F_{0x_0}(\cdot)|dt + \int_0^{T_*} |F_{0d}(\cdot\ \cdot) - F_{0d}(\cdot)|dt + |F_{0p}(\cdot\ \cdot) - F_{0p}(\cdot)|.$$

Поскольку частные производные удовлетворяют условиям Липшица, то выполняется неравенство

$$\left|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)\right|^2 \le c_5|\Delta q(t)|^2 + c_6|\Delta\psi(t)|^2 + c_7\|\Delta\theta\|^2.$$

Тогда

$$\|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)\|^2 = \int_0^{T_*} |J'(\theta_1) - J'(\theta_2)|^2 dt \le c_8\|\Delta\theta\|^2 + c_9 \int_0^{T_*} |\Delta\psi(t)|^2 dt, \tag{44}$$

где $c_i = \text{const} > 0$, $i = \overline{5, 9}$.

Можно показать, что $|\Delta\psi(t)| \le c_{10}\|\Delta\theta\|$. Из (44) следует, что $\|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)\|^2 \le c_{11}\|\Delta\theta\|^2$, где $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$. Отсюда следует неравенство (40).

Теорема 5 доказана.

Пусть $\theta_0 = (v_1^0, v_2^0, x_0^0, d_0, p_0) \in X$ — произвольная фиксированная точка. На основе формул (38) – (40) строим следующие последовательности:

$$\begin{gathered} v_1^{n+1} = v_1^n - \alpha_n J'_{v_1}(\theta_n), \quad v_2^{n+1} = v_2^n - \alpha_n J'_{v_2}(\theta_n), \\ x_0^{n+1} = P_S\left[x_0^n - \alpha_n J'_{x_0}(\theta_n)\right], \quad d_{n+1} = d_n - \alpha_n J'_d(\theta_n), \\ p_{n+1} = P_V[p_n - \alpha_n J'_p(\theta_n)], \quad n = 0, 1, \ldots, \\ \varepsilon_0 < \alpha_n \le \frac{2}{l_0 + 2\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon_0 > 0, \end{gathered} \tag{45}$$

где $P_S[\cdot]$, $P_V[\cdot]$ — проекции точек на множества. Поскольку S, V — выпуклые замкнутые множества, то любая точка имеет единственную проекцию на эти множества соответственно.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 5, последовательность* $\{\theta_n\} = \{v_1^n, v_2^n, x_0^n, d_n, p_n\} \subset X$ *определяется по формулам (45). Тогда:*

1) числовая последовательность $\{J(\theta_n)\}$ *строго убывает;*

2) $\|v_1^n - v_1^{n+1}\| \to 0$, $\|v_1^n - v_1^{n+1}\| \to 0$, $|x_0^n - x_0^{n+1}| \to 0$, $|d_n - d_{n+1}| \to 0$, $\|p_n - p_{n+1}\| \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Если, кроме того, выполнено неравенство (36), а множество $M(\theta_0) = \{\theta \in X / J(\theta) \le J(\theta_0)\}$ *ограничено, то:*

3) последовательность $\{\theta_n\} \subset X$ *является минимизирующей*

$$\lim_{n\to\infty} J(\theta_n) = J_* = \inf_{\theta \in X} J(\theta);$$

4) множество $X_* = \{\theta_* \in X / J(\theta_*) = J_* = \inf_{\theta \in X} J(\theta)\}$ *не пусто;*

5) последовательность $\{\theta_n \subset X\}$ *слабо сходится к множеству* X_*, $v_1^n \xrightarrow{\text{сл}} v_1^*$, $v_2^n \xrightarrow{\text{сл}} v_2^*$, $x_0^n \to x_0^*$, $d_n \to d_*$, $p_n \xrightarrow{\text{сл}} p_*$ *при* $n \to \infty$, *где* $\theta_* = (v_1^*, v_2^*, x_0^*, d_*, p_*) \in X_*$;

6) справедлива следующая оценка скорости сходимости:

$$0 \le J(\theta_n) - J_* \le \frac{m_0}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad m_0 = \mathrm{const} > 0;$$

7) система (1) – (5) имеет периодическое решение тогда и только тогда, когда $J(\theta_*) = 0$. *Если* $J(\theta_*) = 0$, *то периодическим решением краевой задачи (1) – (5) является функция*

$$x_*(t) = P_1 \left[z(t, v_1^*, v_2^*) + D_1(t) x_0^* + D_2(t) d_* + r(t) + M_2(t) z(T_*, v_1^*, v_2^*) \right], \quad t \in I_*,$$

где $x_*(t)$, $t \in I_*$, *удовлетворяет фазовому и интегральному ограничению.*

Доказательство. Необходимое и достаточное условие того, что θ_{n+1} является проекцией точки $\theta_n - \alpha_n J'(\theta_n)$ на множестве X, имеет вид

$$\left\langle \theta_{n+1} - (\theta_n - \alpha_n J'(\theta_n)), \theta - \theta_{n+1} \right\rangle_X \ge 0, \quad \theta \in X. \tag{46}$$

С другой стороны, поскольку функционал $J(\theta) \in C^{1,1}(X)$ (см. теорему 5), то выполняется неравенство

$$J(\theta^1) - J(\theta^2) - \left\langle J'(\theta^2), \theta^1 - \theta^2 \right\rangle \le \frac{1}{2} l_0 \left\| \theta^1 - \theta^2 \right\|^2, \quad \theta^1, \theta^2 \in X.$$

Следовательно,

$$J(\theta^2) - J(\theta^1) \ge \left\langle J'(\theta^2), \theta^2 - \theta^1 \right\rangle - \frac{1}{2} l_0 \left\| \theta^1 - \theta^2 \right\|^2, \quad \theta^1, \theta^2 \in X.$$

Отсюда, в частности, при $\theta^2 = \theta_n$, $\theta^1 = \theta_{n+1}$ имеем

$$J(\theta_n) - J(\theta_{n+1}) \ge \left\langle J'(\theta_n), \theta_n - \theta_{n+1} \right\rangle - \frac{l_0}{2} \left\| \theta_n - \theta_{n+1} \right\|^2.$$

Подставляя оценку для значения $\langle J'(\theta_n), \theta_n - \theta_{n+1} \rangle$, из данного неравенства получаем

$$J(\theta_n) - J(\theta_{n+1}) \ge \varepsilon \Big(\left\| v_1^n - v_1^{n+1} \right\|^2 + \left\| v_2^n - v_2^{n+1} \right\|^2 + \\ + \left| x_0^n - x_0^{n+1} \right|^2 + |d_n - d_{n+1}|^2 + \|p_n - p_{n+1}\|^2 \Big) \tag{47}$$

в силу того, что $\dfrac{1}{\alpha_n} \ge \dfrac{l_0 + 2\varepsilon}{2}$, $\dfrac{1}{\alpha_n} - \dfrac{l_0}{2} \ge \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Из (47) следует, что: 1) числовая последовательность $\{J(\theta_n)\}$ строго убывает; 2) так как значение функционала $J(\theta)$ ограничено снизу, $J(\theta) \ge 0$, $\theta \in X$, то числовая последовательность $\{J(\theta_n)\}$ сходится; 3) выполнено равенство $\lim_{n \to 0} [J(\theta_n) - J(\theta_{n+1})] = 0$; 4) переходя к пределу, из (47) получаем

$\|v_1^n - v_1^{n+1}\| \to 0$, $\|v_2^n - v_2^{n+1}\| \to 0$, $|x_0^n - x_0^{n+1}| \to 0$, $|d_n - d_{n+1}| \to 0$, $\|p_n - p_{n+1}\| \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следуют утверждения 1, 2 теоремы.

Пусть выполнено неравенство (36), множество $M(\theta_0)$ ограничено. Покажем, что последовательность $\{\theta_n\} \subset X$ является минимизирующей. Поскольку значение функционала строго убывает, то $\{\theta_n\} \subset M(\theta_0)$. Из неравенства (36) следует, что функционал $J(\theta) \in C^{1,1}(X)$ является выпуклым. Следовательно, выполняется неравенство

$$J\left(\theta^2\right) - J\left(\theta^1\right) \leq \left\langle J'(\theta^2), \theta^2 - \theta^1 \right\rangle, \quad \theta^1, \theta^2 \in X. \tag{48}$$

Поскольку функционал (29) при условиях (30)– (33) является выпуклым, множество X выпукло, то $M(\theta_0)$ — ограниченное выпуклое замкнутое множество. Тогда множество $M(\theta_0)$ слабо бикомпактно в силу того, что $M(\theta_0)$ — ограниченное выпуклое замкнутое множество в рефлексивном пространстве H. Так как $M(\theta_0) = \{\theta \in X / J(\theta) \leq J(\theta_0)\}$, то нижнюю грань функционала (29) при условиях (30) – (33) следует искать на множестве $M(\theta_0)$. Любой выпуклый функционал является слабо полунепрерывным снизу. Тогда, согласно теореме Вейерштрасса о том, что „слабо полунепрерывный снизу функционал на слабо бикомпактном множестве достигает нижней грани”, функционал $J(\theta)$ достигает нижней грани на множестве $M(\theta_0)$, $X_* \subset M(\theta_0)$, $X_* \neq \varnothing$, где $\varnothing$ — пустое множество.

Из неравенства (48) при $\theta^2 = \theta_n$, $\theta^1 = \theta_* \in X_*$, $\theta_n \in M(\theta_0) \subset X$, имеем

$$J(\theta_n) - J(\theta_*) \leq \left\langle J'(\theta_n), \theta_n - \theta_* \right\rangle = \left\langle J'(\theta_n), \theta_n - \theta_{n+1} \right\rangle - \left\langle J'(\theta_n, \theta_* - \theta_{n+1}) \right\rangle.$$

Отсюда с учетом неравенства (46) получаем

$$\begin{aligned} J(\theta_n) - J(\theta_*) &\leq \left\langle J'(\theta_n) - \frac{1}{\alpha_n}(\theta_* - \theta_{n+1}, \theta_n - \theta_{n+1}) \right\rangle \leq \\ &\leq \left\| J'(\theta_n) - \frac{1}{\alpha_n}\left(\theta_* - \theta_{n+1}\right) \right\| \|\theta_n - \theta_{n+1}\| \leq \\ &\leq \sup \left\| J'(\theta_n) \right\| + \frac{D}{\varepsilon_0} \|\theta_n - \theta_{n+1}\|, \end{aligned} \tag{49}$$

где $\dfrac{1}{\alpha_n} < \dfrac{1}{\varepsilon_0}$, $\|\theta_* - \theta_{n+1}\| \leq D$, $D = \sup_{\theta^1, \theta^2 \in M(\theta_0)} \|\theta^1 - \theta^2\|$ — диаметр множества $M(\theta_0)$. Так как $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \to 0$ при $n \to \infty$, то из (49) следует, что $\lim_{n\to\infty} J(\theta_n) = J(\theta_*) = \inf_{\theta \in X} J(\theta)$. Это означает, что последовательность $\{\theta_n\} \subset M(\theta_0)$ является минимизирующей, $\theta_* \in X_* \subset M(\theta_0)$. Поскольку $\{\theta_n\} \subset M(\theta_0)$, $M(\theta_0)$ — слабо бикомпактное множество, то $\theta_* \in M(\theta_0)$ является слабо предельной точкой последовательности $\{\theta_n\}$.

Пусть величина $a_n = J(\theta_n) - J(\theta_*)$. Тогда неравенства (49) примут вид $a_n \leq c_1\|\theta_n - \theta_{n+1}\|$. Из оценки (47) имеем $a_n - a_{n+1} \geq \varepsilon\|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2$. Тогда $a_n - a_{n+1} \geq \dfrac{\varepsilon a_n^2}{c_1^2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Далее, применяя лемму о свойстве числовой последовательности $\{a_n\}$ из [23], получаем $a_n < \dfrac{1}{An}$, $A = \dfrac{\varepsilon}{c_1^2}$. Отсюда следует, что $a_n = J(\theta_n) - J(\theta_*) \leq \dfrac{\varepsilon}{c_1^2}\dfrac{1}{n}$,

$n = 1, 2, \ldots$, где $m_0 = \dfrac{\varepsilon}{c_1^2} = \text{const} > 0$. Последнее утверждение теоремы следует из теоремы 4.

Теорема 6 доказана.

6. Построение периодического решения. Пусть последовательность $\{T_k\} \subset R^1$ такова, что $0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_k < \ldots$. Заметим, что матрица (см. (24), (25))

$$W_1(0, T_k) = \int\limits_0^{T_k} \Psi(0,t)EE^*\Psi^*(0,t)dt = \int\limits_0^{T_k} e^{-A_1 t}EE^* e^{-A_1^* t}dt$$

является положительно определенной для любого $T_k > 0$ в силу леммы 1. Поэтому остаются справедливыми теоремы 3–6, леммы 2, 3 для любого $T_k > 0$.

Если для некоторого T_k решение оптимизационной задачи

$$J_k(v_1, v_2, x_0, d, p) = \int\limits_0^{T_k} \left[|w_1(t) - f(P_1 y(t))|^2 + \right.$$
$$\left. + |w_2(t) - f_0(P_1 y(t))|^2 + |p(t) - F(P_1 y(t))|^2\right] dt \to \inf \tag{50}$$

при условиях

$$\dot z = A_1 z + B_1 v_1(t) + B_2 v_2(t), \quad z(0) = 0, \quad t \in I_k = [0, T_k], \tag{51}$$

$$v_1(\cdot) \in L_2(I_k, R^m), \quad v_2(\cdot) \in L_2(I_k, R^m), \tag{52}$$

$$x_0 \in S, \quad d \in \Gamma, \quad p(t) \in V, \quad t \in I_k, \tag{53}$$

таково, что $J_k(\theta_*) = 0$, где $\theta_* = (v_1^*, v_2^*, x_0^*, d_*, p_*) \in X$ — оптимальное управление для задачи (50)–(53), то $T_k = T_*$ — период, а функция $x_*(t)$, $t \in I_k = [0, T_k] = [0, T_*] = I_*$, — периодическое решение краевой задачи (1)–(5). Заметим, что в случае отсутствия фазовых и интегральных ограничений для нахождения периодических решений может быть применен метод наименьших квадратов из [25, 26].

Литература

1. *Poincare A.* Sur les courbes defínces par une equation differentielle. — Paris, 1928. — Vol. 1.
2. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.: Гостехиздат, 1947.
3. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959.
4. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1969.
5. *Крылов Н. Н., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. — Киев, 1937.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.
7. *Попов Е. П., Пальтов И. П.* Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. — М.: Физматгиз, 1960.
8. *Попов Е. П.* Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. — М.: Наука, 1973.
9. *Birhhoff G. D.* Surface transformations and their dynamical applications // Acta Math. — 1920. — **43**.

10. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.
11. *Неймарк Ю. И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний // Изв. вузов. Радиофизика. — 1958. — **1**. — С. 7 – 20.
12. *Нелепин Р. А.* Об исследовании нелинейных автоматических систем высокого порядка точными математическими методами // Докл. АН СССР. — 1965. — **161**, № 4. — С. 111 – 116.
13. *Каменков Г. В.* Исследование нелинейных колебаний с помощью функций Ляпунова // Труды Ун-та дружбы народов им. Патриса Лумумбы. — 1966. — **15**. — С. 3 – 35.
14. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956.
15. *Vejvoda O.* On perturbed nonlinear boundary-value problems // Czech. Math. J. — 1961. — № 11. — P. 323 – 364.
16. *Проскуряков А. П.* Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1977. — 256 с.
17. *Boichuk A., Chuiko S.* Autonomous weakly nonlinear boundary-value problems in critical cases // Different. Equat. — 1992. — № 10. — P. 1353 – 1358.
18. *Chuiko S. M., Boichuk I. A.* An autonomous Noetherian boundary value problem in the critical case // Nonlinear Oscillations. — 2009. — **12**, № 3. — P. 405 – 416.
19. *Айсагалиев С. А., Айсагалиев Т. С.* Конструктивный метод построения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. — 1997. — № 5. — С. 3 – 11.
20. *Айсагалиев С. А., Айсагалиев Т. С.* Методы решения краевых задач. — Алматы: Казах. ун-т, 2002.
21. *Айсагалиев С. А.* Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1991. — **27**, № 9. — С. 1475 – 1486.
22. *Айсагалиев С. А.* Общее решение одного класса интегральных уравнений // Мат. журн. — 2005. — **5**, № 4(18). — С. 17 – 34.
23. *Калман Р. Е.* Об общей теории систем управления // Труды 1-го Междунар. конгр. Междунар. федерации по автоматическому управлению. — 1961. — Т. 2.
24. *Айсагалиев С. А.* Лекции по оптимальному управлению. — Алматы: Казах. ун-т, 2007.
25. *Chuiko S. M.* On approximate solution of boundary value problems by the least square method // Nonlinear Oscillations. — 2008. — **11**, № 4. — P. 585 – 604.
26. *Chuiko S. M., Starkova O. V.* On the approximate solution of autonomous boundary value problems by the least square method // Nonlinear Oscillations. — 2009. — **12**, № 4. — P. 556 – 573.

Получено 08.12.14,
после доработки — 22.09.15