

УДК 517.9

ПРО ЧИСЛОВЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯННЯ ФОККЕРА – ПЛАНКА – КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ВИПАДКОВИМИ ВІДХИЛЕННЯМИ АРГУМЕНТУ

О. В. Коломієць

*Ин-т математики НАН України,
Україна, 252601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3*

Using the Crank – Nicolson numerical method, solved is the Focker – Planck – Kolmogorov equation for a second order quasilinear difference-differential equation with random argument deviations.

За допомогою числового методу Кранка – Ніколсона розв'язано рівняння Фоккера – Планка – Колмогорова для квазілінійного диференціально-різницевого рівняння другого порядку з випадковими відхиленнями аргументу.

Вступ. Вивчення систем з випадковими відхиленнями аргументу є надзвичайно важливим, оскільки воно активно стимулюється численними запитоми як теоретичної математики, так і прикладних дисциплін. Результати досліджень систем з випадковими відхиленнями аргументу застосовуються в багатьох галузях техніки, електроніки, в системах автоматичного керування. Особливого значення набуває можливість наближеного числового аналізу випадкових коливань, що виникають у таких системах, та їхніх характеристик, таких як імовірнісні середні значення, дисперсії амплітуд та фаз коливань, та інші.

Поряд з безпосереднім аналізом рівнянь для амплітуди та фази випадкових коливань ефективним є метод рівнянь Фоккера – Планка – Колмогорова, що дозволяє досліджувати щільність розподілу амплітуди та фази, а також знаходити найбільш імовірні їхні значення. Важливою є також придатність відповідних методів для ефективного реалізації на ЕОМ.

У даній роботі до квазілінійної системи, що описується диференціально-різницевою рівнянням другого порядку з випадковими відхиленнями аргументу, застосовано асимптотичні методи Крилова – Боголюбова – Митропольського, а до отриманих у першому наближенні рівнянь для амплітуди та фази випадкових коливань — метод рівнянь Фоккера – Планка – Колмогорова. Рівняння з частинними похідними Фоккера – Планка – Колмогорова для щільності розподілу ймовірностей амплітуди розв'язано на ЕОМ за допомогою методу різницевої схем Кранка – Ніколсона. Результати наведені у графічному вигляді.

Постановка задачі. Розглянемо квазілінійне диференціальне рівняння другого порядку з випадковими відхиленнями аргументу

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k_1 \frac{dx}{dt} + k_2 \frac{dx(t - \Delta_1(t))}{dt} + k_3 x(t) + k_4 x(t - \Delta_1(t)) =$$

$$= \varepsilon f \left(x(t), x(t - \Delta_2(t)), \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dx(t - \Delta_2(t))}{dt} \right), \quad (1)$$

де k_1, k_2, k_3, k_4 — деякі сталі коефіцієнти, ε — малий параметр, $f(x, y, u, v)$ — нелінійна функція, що має достатню кількість похідних за всіма змінними, $\Delta_1(t)$ і $\Delta_2(t)$ — відхилення аргументів, що мають вигляд

$$\begin{aligned} \Delta_1(t) &= \Delta_{10} + \sqrt{\varepsilon} \rho_1 \xi(t, \mu), \\ \Delta_2(t) &= \Delta_{20} + \sqrt{\varepsilon} \rho_2 \xi(t, \mu), \end{aligned} \quad (2)$$

тобто є малими флуктуаціями відхилення навколо додатних сталих величин $\Delta_{i0} \equiv M\Delta_i$, $i = 1, 2$ (символ M позначає математичне сподівання). У формулах (2) ρ_1, ρ_2 — додатні сталі, $\xi(t, \mu)$ — стаціонарний випадковий процес, що перетворюється в границі при $\mu \rightarrow 0$ в стандартний білий шум.

В роботі [1] до рівняння (1) застосовано асимптотичні методи Крилова – Боголюбова – Митропольського [2]. Показано, що для наявності коливних розв'язків необхідно, щоб виконувалась одна з наступних умов:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & k_3^2 - k_4^2 < 0, \\ \text{б)} \quad & k_2^2 - k_1^2 + 2k_3 > 0 \quad \text{і} \quad (k_2^2 - k_1^2 + 2k_3)^2 \geq 4(k_3^2 - k_4^2). \end{aligned} \quad (3)$$

При цьому частота коливань

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 + 2k_3 + \sqrt{(k_2^2 - k_1^2 + 2k_3)^2 - 4(k_3^2 - k_4^2)}}. \quad (4)$$

Асимптотичне перше наближення. Згідно з асимптотичним методом Крилова – Боголюбова – Митропольського, розв'язок рівняння (1) шукаємо у першому наближенні

$$x(t) = a(t) \cos(\omega t + \theta(t)); \quad (5)$$

$$\frac{da(t)}{dt} = \varepsilon A_1(a(t), \xi(t, \mu), \varepsilon), \quad (6)$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \varepsilon B_1(a(t), \xi(t, \mu), \varepsilon).$$

Виконуючи стандартні для асимптотичного методу перетворення, зводимо систему рівнянь (6) до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_{11}(a) + \sqrt{\varepsilon} A_{12}(a) \xi(t, \mu), \\ \frac{d\theta(t)}{dt} &= \varepsilon B_{11}(a) + \sqrt{\varepsilon} B_{12}(a) \xi(t, \mu). \end{aligned} \quad (7)$$

Коефіцієнти A_{11} , A_{12} , B_{11} , B_{12} визначаються за формулами

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \frac{H_2'(\omega)r_1(a) + H_1'(\omega)q_1(a)}{H_1'^2(\omega) + H_2'^2(\omega)}, \\
 A_{12} &= \left[\frac{H_2'(\omega)(k_4 \sin \omega \Delta_{10} - k_2 \omega \cos \omega \Delta_{10})}{H_1'^2(\omega) + H_2'^2(\omega)} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{H_1'(\omega)(k_4 \cos \omega \Delta_{10} + k_2 \omega \sin \omega \Delta_{10})}{H_1'^2(\omega) + H_2'^2(\omega)} \right] a \omega \rho_1, \\
 B_{11} &= \frac{H_1'(\omega)r_1(a) - H_2'(\omega)q_1(a)}{a(H_1'^2(\omega) + H_2'^2(\omega))}, \\
 B_{12} &= \left[\frac{H_2'(\omega)(k_2 \omega \sin \omega \Delta_{10} + k_4 \cos \omega \Delta_{10})}{a(H_1'^2(\omega) + H_2'^2(\omega))} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{H_1'(\omega)(k_2 \omega \cos \omega \Delta_{10} - k_4 \sin \omega \Delta_{10})}{a(H_1'^2(\omega) + H_2'^2(\omega))} \right] \omega \rho_1;
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 H_1(\omega) &= -\omega^2 + k_2 \omega \sin \omega \Delta_{10} + k_3 + k_4 \cos \omega \Delta_{10}, \\
 H_2(\omega) &= k_1 \omega + k_2 \omega \cos \omega \Delta_{10} - k_4 \sin \omega \Delta_{10},
 \end{aligned} \tag{9}$$

де $r_1(a)$ і $q_1(a)$ — коефіцієнти розкладу функції

$$\begin{aligned}
 f[a \cos \psi, a \cos(\psi - \omega \Delta_{20}), -a \omega \sin \psi, -a \omega \sin(\psi - \omega \Delta_{20})], \\
 \psi = \omega t + \theta,
 \end{aligned}$$

в ряд Фур'є.

Враховуючи умову, накладену на випадковий процес $\xi(t, \mu)$, в границі при $\mu \rightarrow 0$ замість рівнянь (7) можна розглядати відповідні їм звичайні стохастичні диференціальні рівняння

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_{11}(a) + \sqrt{\varepsilon} A_{12}(a) \dot{w}, \\
 \frac{d\theta(t)}{dt} &= \varepsilon B_{11}(a) + \sqrt{\varepsilon} B_{12}(a) \dot{w},
 \end{aligned} \tag{10}$$

де \dot{w} — стандартний білий шум ($M\dot{w}(t) = 0$, $M\dot{w}(t)\dot{w}(t + \tau) = \delta(\tau)$).

Розв'язком системи звичайних стохастичних рівнянь (10) є двовимірний марковський процес. Тому для знаходження щільності сумісного розподілу амплітуди і фази скористаємося методом рівнянь Фоккера – Планка – Колмогорова.

Рівняння Фоккера – Планка – Колмогорова. Нехай $W(a, \theta, t)$ — функція щільності розподілу ймовірностей. Рівняння Фоккера – Планка – Колмогорова, що відповідає системі стохастичних рівнянь (10), має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} [K_a W] + \frac{\partial}{\partial \theta} [K_\theta W] = \\ = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial a^2} [D_a W] + 2 \frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta} [D_{a\theta} W] + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [D_\theta W] \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} K_a &= \varepsilon \frac{H'_2(\omega)r_1(a) + H'_1(\omega)q_1(a)}{H_1'^2(\omega) + H_2'^2(\omega)}, \\ K_\theta &= \varepsilon \frac{H'_1(\omega)r_1(a) - H'_2(\omega)q_1(a)}{a [H_1'^2(\omega) + H_2'^2(\omega)]}, \\ D_a &= \varepsilon (H_1'^2(\omega) + H_2'^2(\omega))^{-1} \left\{ \left[H'_2(\omega) (k_4 \sin \omega \Delta_{10} - k_2 \omega \cos \omega \Delta_{10}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - H'_1(\omega) (k_4 \cos \omega \Delta_{10} + k_2 \omega \sin \omega \Delta_{10}) \right] a \omega \rho_1 \right\}^2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} D_{a\theta} &= \varepsilon (H_1'^2(\omega) + H_2'^2(\omega))^{-1} \left[H'_2(\omega) (k_4 \sin \omega \Delta_{10} - k_2 \omega \cos \omega \Delta_{10}) - \right. \\ &\quad \left. - H'_1(\omega) (k_4 \cos \omega \Delta_{10} + k_2 \omega \sin \omega \Delta_{10}) \right] \times \\ &\quad \times \left[H'_2(\omega) (k_2 \omega \sin \omega \Delta_{10} + k_4 \cos \omega \Delta_{10}) - \right. \\ &\quad \left. - H'_1(\omega) (k_2 \omega \cos \omega \Delta_{10} - k_4 \sin \omega \Delta_{10}) \right] a \omega^2 \rho_1^2, \\ D_\theta &= \varepsilon (H_1'^2(\omega) + H_2'^2(\omega))^{-1} \left\{ \left[H'_2(\omega) (k_2 \omega \sin \omega \Delta_{10} + k_4 \cos \omega \Delta_{10}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - H'_1(\omega) (k_2 \omega \cos \omega \Delta_{10} - k_4 \sin \omega \Delta_{10}) \right] \omega \rho_1 \right\}^2. \end{aligned}$$

Виходячи з властивостей щільності розподілу ймовірностей, для рівняння (11) формулюємо початкові, граничні та інші умови:

$$\begin{aligned} W(a, \theta, t) > 0, \quad W(a, \theta, 0) = \delta(a - a_0) \delta(\theta - \theta_0), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} W(a, \theta, t) da d\theta = 1, \end{aligned} \quad (13)$$

$$W(-\infty, \theta, t) = W(+\infty, \theta, t) = 0.$$

У випадку стаціонарних коливань $\partial W / \partial t = 0$ і рівняння (11) спрощується:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} [K_a W] + \frac{\partial}{\partial \theta} [K_\theta W] &= \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial a^2} [D_a W] + 2 \frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta} [D_{a\theta} W] + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [D_\theta W] \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Аналітичне розв'язування рівнянь (11) та (14) є досить складним. Проте рівняння (14) можна використати для знаходження найбільш імовірних амплітуди та фази стаціонарних та близьких до них випадкових коливань. Відповідний алгоритм викладений у роботі [1]. У даній роботі для наближеного розв'язування нестационарного рівняння Фоккера – Планка – Колмогорова застосовуються числові різницеві методи математичної фізики.

Різницева схема Кранка – Ніколсона. Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння, що описує амплітуду (перше з рівнянь (10)):

$$\frac{da}{dt} = K + \sqrt{D} \dot{w}(t), \quad (15)$$

де $K = K(a)$, $D = D(a)$ — коефіцієнти переносу та дифузії, що визначаються з формул

$$K(a) = \varepsilon A_{11}(a), \quad D(a) = \varepsilon A_{12}^2(a),$$

а вирази для A_{11} і A_{12} наведені в (8).

Рівняння Фоккера – Планка – Колмогорова, що відповідає стохастичному рівнянню (15), має вигляд

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} [KW] = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} [DW]; \quad (16)$$

початкові та граничні умови —

$$W(a, 0) = \delta(a - a_0), \quad W(-\infty, t) = W(+\infty, t) = 0. \quad (17)$$

Позначаючи $W'_a = \frac{\partial W(a, t)}{\partial a}$, $W'_t = \frac{\partial W(a, t)}{\partial t}$, $W''_{aa} = \frac{\partial^2 W(a, t)}{\partial a^2}$, зводимо рівняння (16) до канонічного вигляду

$$W''_{aa} + A(a)W'_a + B(a)W'_t + C(a)W = 0, \quad (18)$$

в якому

$$A(a) = \frac{2D' - 2K}{D}, \quad B(a) = -\frac{2}{D}, \quad C(a) = \frac{D'' - 2K'}{D}. \quad (19)$$

Розіб'ємо площину значень амплітуди та часу сіткою прямих ліній на малі прямокутні області з кроками h та k . Тоді значення функції щільності розподілу ймовірностей у вузлах сітки позначимо так:

$$\begin{aligned} W_{m,n} &:= W(mh, nk), \\ m &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

де h та k — кроки розбиття за амплітудою a та часом t відповідно.

Замінімо похідні функції щільності в рівнянні (18) на різницеві вирази згідно зі схемою Кранка – Ніколсона [3, 4]:

$$\begin{aligned}
 W''_{aa} &\mapsto \frac{1}{2h^2} \left\{ W_{m+1,n} - 2W_{m,n} + W_{m-1,n} + W_{m+1,n+1} - 2W_{m,n+1} + W_{m-1,n+1} \right\}, \\
 W'_a &\mapsto \frac{1}{4h} \left\{ W_{m+1,n} - W_{m-1,n} + W_{m+1,n+1} - W_{m-1,n+1} \right\}, \\
 W'_t &\mapsto \frac{1}{k} \left\{ W_{m,n+1} - W_{m,n} \right\}, \\
 W &\mapsto \frac{1}{2} \left\{ W_{m,n} + W_{m,n+1} \right\}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Коефіцієнти $A(a)$, $B(a)$, $C(a)$ рівняння (18) не залежать від t . У вузлах сітки їхні значення визначаються за формулами

$$A_m := A(mh), \quad B_m := B(mh), \quad C_m := C(mh), \quad m \in \mathbf{Z}. \tag{22}$$

Наведена вище схема Кранка – Ніколсона при застосуванні до рівняння (18) є збіжною та стійкою і тому її можна реалізувати на ЕОМ.

Підставляючи вирази для похідних (21), коефіцієнтів (22) і виконуючи перетворення, одержуємо систему різницевих рівнянь

$$\begin{aligned}
 k_{-1}^m W_{m-1,n} + k_{-1}^m W_{m-1,n+1} + k_0^m W_{m,n} + \tilde{k}_0^m W_{m,n+1} + k_{+1}^m W_{m+1,n} + k_{+1}^m W_{m+1,n+1} = 0, \\
 n = 0, 1, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \dots,
 \end{aligned} \tag{23}$$

де

$$\begin{aligned}
 k_{-1}^m &= \frac{1}{2h^2} - \frac{A_m}{4h}, \\
 k_0^m &= -\frac{1}{h^2} - \frac{B_m}{k} + \frac{C_m}{2}, \\
 \tilde{k}_0^m &= -\frac{1}{h^2} + \frac{B_m}{k} + \frac{C_m}{2}, \\
 k_{+1}^m &= \frac{1}{2h^2} + \frac{A_m}{4h}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Оскільки система (23) відповідає необмеженій області на площині значень a і t , то для того, щоб цю систему можна було розв'язати, потрібно обмежити область значень певними константами. Нехай $M \gg 0$ і $N \gg 0$ – досить великі числа і

$$|m| \leq M, \quad |n| \leq N. \tag{25}$$

Додамо до системи різницевих рівнянь (23) вирази, що у дискретній формі відповідають граничним та початковим умовам (17) для рівняння (16):

$$\begin{aligned}
 W_{-(M+1),n} = W_{M+1,n} = 0, \quad W_{m,n} \geq 0, \\
 m = 0, \pm 1, \dots, \pm M; \quad n = 0, 1, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Нехай n^* — фіксоване натуральне число таке, що $0 \leq n^* < N$, і всі значення W_{m,n^*} , $m = 0, \pm 1, \dots, \pm M$, відомі. Тоді „переріз” системи (23) по $n = n^*$, з урахуванням умов (26), є підсистемою $2M + 1$ лінійних алгебраїчних рівнянь з $2M + 1$ невідомими W_{m,n^*+1} , $m = 0, \pm 1, \dots, \pm M$:

$$\begin{aligned} F_{n^*}^m (W_{m-1,n^*+1}, W_{m,n^*+1}, \dots, W_{m+1,n^*+1}) &= 0, \\ W_{-M-1,n^*+1} &= W_{M+1,n^*+1} = 0, \\ m &= 0, \pm 1, \dots, \pm M. \end{aligned} \quad (27)$$

Початкові значення при $n = 0$ можна взяти такі:

$$W_{m,0} = \varpi_\eta(mh), \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm M, \quad (28)$$

де

$$\varpi_\eta(a) = \begin{cases} C_\eta e^{-\frac{\eta^2}{\eta^2 - (a-a_0)^2}}, & \text{якщо } |a - a_0| < \eta; \\ 0, & \text{якщо } |a - a_0| \geq \eta; \end{cases} \quad (29)$$

при цьому $\eta > 0$ — малий параметр, а константа C_η вибирається такою, щоб

$$\int_{-\eta+a_0}^{\eta+a_0} \varpi_\eta(a) da = 1.$$

Позначивши $\vec{W}_n := (W_{-M,n}, W_{-M+1,n}, \dots, W_{M,n})^T$, можемо записати систему (27) у векторному вигляді

$$\tilde{P}\vec{W}_{n+1} + P\vec{W}_n = 0, \quad (30)$$

$$\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})_{i,j=-M}^M, \quad P = (p_{ij})_{i,j=-M}^M, \quad (31)$$

причому у матрицях \tilde{P} і P ненульові елементи розміщуються лише на головній діагоналі, першій наддіагоналі та першій піддіагоналі:

$$\begin{aligned} p_{i,i-1} &= \tilde{p}_{i,i-1} = k_{-1}^i, \quad i = -M + 1, \dots, M, \\ p_{i,i} &= k_0^i, \quad \tilde{p}_{i,i} = \tilde{k}_0^i, \quad i = -M, \dots, M, \\ p_{i,i+1} &= \tilde{p}_{i,i+1} = k_{+1}^i, \quad i = -M, \dots, M - 1. \end{aligned} \quad (32)$$

За значення a_0 , що використовується у формулах (29) для обчислення початкових значень щільності розподілу, доцільно взяти найбільш імовірну амплітуду стаціонарних випадкових коливань [1].

Обчислення значень $W_{m,n}$ проводимо послідовно для $n = 0, 1, \dots, N - 1$. На кожному кроці розв’язуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (30). З урахуванням спеціального вигляду матриць (31) розв’язування цієї системи методом Гауса значно спрощується.

Проілюструємо застосування викладеного вище на прикладі конкретного рівняння.
Рівняння типу Ван-дер-Поля. Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку типу Ван-дер-Поля з випадковими відхиленнями аргументу

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + k_1x(t) + k_2x(t - \Delta_{10} - \sqrt{\varepsilon}\rho_1\xi(t, \mu)) = \\ = \varepsilon(1 - x^2(t)) \frac{dx(t - \Delta_{20} - \sqrt{\varepsilon}\rho_2\xi(t, \mu))}{dt}, \end{aligned} \quad (33)$$

всі коефіцієнти якого мають ті ж властивості, що і у рівнянні (1).

Для наявності коливних розв'язків рівняння (33) необхідно, щоб виконувалась одна з двох груп умов (аналогічних умовам (3) для загального рівняння)

$$\text{а) } k_1 + k_2 > 0, \quad \Delta_{10} = \frac{\pi 2l}{\sqrt{k_1 + k_2}}, \quad l = 0, 1, \dots, \quad (34)$$

$$\text{б) } k_1 - k_2 > 0 \quad \Delta_{10} = \frac{\pi(2l + 1)}{\sqrt{k_1 - k_2}}, \quad l = 0, 1, \dots \quad (35)$$

Вважатимемо далі, що виконуються умови (34) при $l = 1$, тобто $\Delta_{20} = \frac{2\pi}{\sqrt{k_1 + k_2}}$. При цьому частота коливань

$$\omega = \sqrt{k_1 + k_2}. \quad (36)$$

Застосовуючи до рівняння (33) процедуру, описану вище для загального випадку (1), приходимо до наближеного рівняння (15), в якому

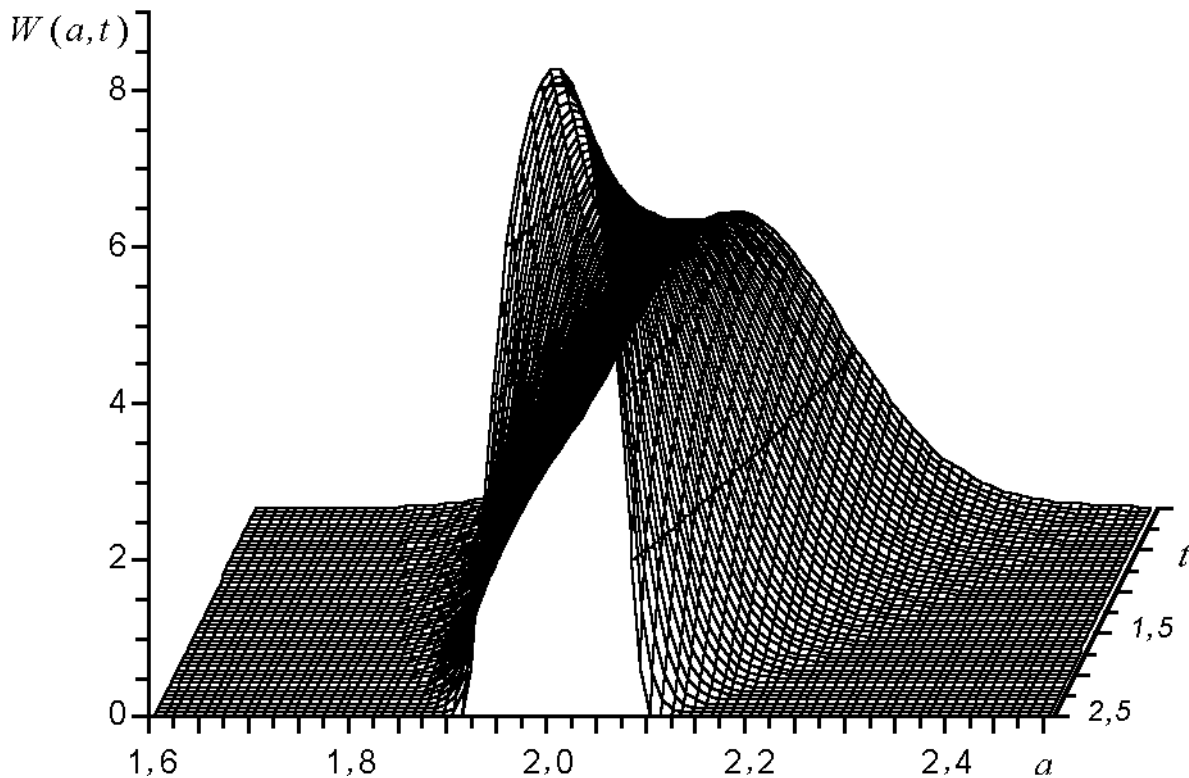
$$\begin{aligned} K(a) &= \varepsilon(\gamma_1 a + \gamma_2 a^3), \\ D(a) &= \varepsilon \gamma_3^2 a^2, \end{aligned} \quad (37)$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{-u + v}{d}, \quad \gamma_2 = \frac{3u - v}{d}, \quad \gamma_3 = \frac{2k_2(k_1 + k_2)\rho_1}{d}; \\ u &= 2k_2(k_1 + k_2)\pi \sin \alpha, \quad v = 2(k_1 + k_2)^2 \cos \alpha; \\ d &= 4(k_1 + k_2)^2 + 4k_2^2\pi^2, \quad \alpha = \sqrt{k_1 + k_2}\Delta_{20}. \end{aligned} \quad (38)$$

Рівняння Фоккера – Планка – Колмогорова, що відповідає стохастичному рівнянню для амплітуди, має вигляд (18), де

$$\begin{aligned} A(a) &= \frac{4\gamma_3^2 - 2\gamma_1 - 2\gamma_2 a^2}{\gamma_3^2 a}, \\ B(a) &= -\frac{2}{\varepsilon \gamma_3^2 a^2}, \\ C(a) &= \frac{2\gamma_3^2 - 2\gamma_1 - 6\gamma_2 a^2}{\gamma_3^2 a^2}. \end{aligned} \quad (39)$$



У роботі [1] показано, що найбільш імовірна амплітуда стаціонарних коливань обчислюється за формулою

$$a_0 = \sqrt{\frac{\gamma_3^2 - \gamma_1}{\gamma_2}}. \quad (40)$$

Скористаємося цією формулою для обчислення початкової амплітуди a_0 у формулі (29).

Описаний алгоритм числового розв'язування рівняння Фоккера – Планка – Колмогорова для щільності розподілу амплітуди реалізований у вигляді програми для ЕОМ.

Приклад розв'язування рівняння Фоккера – Планка – Колмогорова на ЕОМ. Нехай у рівнянні (33) коефіцієнти

$$k_1 = 2; \quad k_2 = -1; \quad \Delta_{10} = 2\pi; \quad \Delta_{20} = 4,5; \quad \rho_1 = 6; \quad \varepsilon = 0,01. \quad (41)$$

Розіб'ємо площину значень амплітуди і фази сіткою прямих з кроками $h = 0,01$, $k = 0,005$. При цьому область аргументів обмежимо значеннями $M = 10000$ та $N = 500$. Для розрахунку початкових значень використаємо функцію (29), для якої $\eta = 0,1$ (при цьому $C_\eta \approx 22,52$) і $a_0 = 2$. На ЕОМ було розв'язано $N = 500$ систем з $2M + 1 = 20001$ рівняння (всього більше 10 млн. рівнянь). Результати представлені на рисунку у вигляді тривимірного графіка (числові результати не наводимо через їхню громіздкість).

Із рисунка видно, що з плином часу ймовірність випадкових коливань з амплітудою $a_0 = 2$ зростає, що виявляється у збільшенні значень функції щільності $W(a, t)$ при збільшенні t у точках, близьких до значення a_0 , і зменшенні її значень у точках, від-

далених від a_0 . Цей факт підтверджує наявність у системі стійких стаціонарних коливань з амплітудою, близькою до $a_{ст} = a_0$. Тому характеристики випадкових коливань, які виникають у системі, що описується рівнянням (33) (або (1)), можна також отримати з аналізу стаціонарного рівняння Фоккера – Планка – Колмогорова (14). Числові результати, одержані в даній роботі, повністю узгоджуються з теоретичними результатами роботи [1].

1. *Коломієць В.Г., Коломієць О.В.* Про дослідження коливань у нелінійних системах другого порядку з випадковим відхиленням аргументу // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. — Вип. 10. — С. 90–96.
2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 504 с.
3. *Рихтмайер Р. Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 420 с.
4. *Мерклингер К.Дж.* Численный анализ нелинейных систем управления с помощью уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова // Тр. II междунар. конгр. ИФАК, 1963. — М.: Наука, 1965. — С. 324–340.

Одержано 05.08.99