УДК 517 . 944

УЗАГАЛЬНЕНІ ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

С. Г. Хома

Тернопіл. акад. нар. госп-ва,
Україна, 282004, Тернопіль, вул. Львівська, 11

The existence conditions of generalised ($u \in L_\infty$) π-periodical solutions of second-order hyperbolic equation are found.

Знайдено умови існування узагальненого ($u \in L_\infty$) π-періодичного розв'язку гіперболічного рівняння другого порядку.

Встановлено, що класичний розв'язок крайової періодичної задачі [1, 2]

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x,t), \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \tag{1}$$

$$u(x,t+T) = u(x,t), \qquad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

існує для таких трьох періодів і відповідних їм класів функцій: $T_1 = 2\pi p/q$, p — непарне ціле число, q — парне натуральне число, $A_1 = \{g: \ g(x,t) = g(\pi - x, t) = g(x, t+T_1)\}$; $T_2 = 2\pi p/q$, p, q — непарні числа, $A_2 = \{g: \ g(x,t) = g(\pi - x, t + T_2/2) = g(x, t+T_2)\}$; $T_3 = 2\pi p/q$, p — парне ціле число, g — непарне натуральне число, $A_3 = \{g: \ g(x,t) = -g(x, t+T_3/2)\}$.

Якщо розглянути крайову періодичну задачу вигляду

$$v_{tt} - v_{xx} = g_1(x,t), \qquad v(x,t+T) = v(x,t), \tag{3}$$

$$v(0,t) = \nu_1 t, \quad v(\pi,t) = \nu_2(t), \tag{4}$$

$$\nu_i(t+T) = \nu_i(t), \quad i = 1,2, \qquad 0 \le x \le \pi, \ \ t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

то заміною змінних [3]

$$v(x,t) = u(x,t) + z(x,t), \tag{6}$$

$$z(x,t) = \nu_1(t) + \frac{x}{\pi}\left(\nu_2(t) - \nu_1(t)\right), \quad \nu_i(t+T) = \nu_i(t), \tag{7}$$

задача (3) – (5) зводиться до задачі (1), (2), де

$$g(x,t) = g_1(x,t) + z_{xx} - z_{tt} \equiv$$

$$\equiv g_1(x,t) - \nu_1''(t) + \frac{x}{\pi}\left(\nu_2''(t) - \nu_1''(t)\right). \tag{8}$$

Виходячи із зображення (8) функції $g(x,t)$, переконуємося, що $g \notin A_j$, $j = 1, 2$. Доведемо, що якщо виконується умова

$$g_1(x, t+\pi) = g_1(x,t), \qquad \nu_i(t+\pi) = \nu_i(t), \quad i = 1, 2,$$

то крайова періодична задача (3) – (5) має π-періодичний узагальнений $(u \in L_\infty)$ розв'язок.

Для цього знайдемо розв'язок таких двох задач Коші:

$$u^1_{tt} - u^1_{xx} = f(x,t), \tag{9}$$

$$u^1(0,t) = 0, \quad u^1_x(0,t) = 0, \qquad 0 \le x \le \pi, \;\; x \le t \le 2\pi - x; \tag{10}$$

$$u^2_{tt} - u^2_{xx} = f(x,t), \tag{11}$$

$$u^2(\pi,t) = 0, \;\; u^2_x(\pi,t) = 0, \qquad 0 \le x \le \pi, \;\; \pi - x \le t \le \pi + x. \tag{12}$$

Легко довести наступне твердження.

Лема. *Якщо* $f \in C^{0,1}(\Delta_1)$, *то функція*

$$u^1(x,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} f(\xi,\tau)\, d\tau \tag{13}$$

є єдиним розв'язком задачі Коші (9), (10) в характеристичному трикутнику $\Delta_1 = \{(x,t):\ 0 \le x \le \pi, x \le t \le 2\pi - x\}$, *а при* $f \in C^{0,1}(\Delta_2)$ *функція*

$$u^2(x,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_x^\pi d\xi \int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} f(\xi,\tau)\, d\tau \tag{14}$$

є єдиним розв'язком задачі Коші (11), (12) в характеристичному трикутнику $\Delta_2 = \{(x,t):\ 0 \le x \le \pi, \pi - x \le t \le \pi + x\}$.

Доведення. Справді, обчислюючи частинні похідні функцій $u^i(x,t),\ i = 1, 2$, знаходимо

$$u^1_t(x,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^x \left(f(\xi, t+x-\xi) - f(\xi, t-x+\xi)\right) d\xi,$$

$$u^1_x(x,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^x \left(f(\xi, t+x-\xi) - f(\xi, t-x+\xi)\right) d\xi,$$

$$u_t^2(x,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_x^{\pi} \left(f(\xi, t-x+\xi) - f(\xi, t+x-\xi)\right)\, d\xi,$$

$$u_x^2(x,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_x^{\pi} \left(-f(\xi, t-x+\xi) - f(\xi, t+x-\xi)\right)\, d\xi,$$

$$(15)$$

$$u_{tt}^1(x,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{x} \left(\frac{\partial f(\xi, t+x-\xi)}{\partial(t+x-\xi)} - \frac{\partial f(\xi, t-x+\xi)}{\partial(t-x+\xi)}\right) d\xi,$$

$$u_{xx}^1(x,t) = -f(x,t) + u_{tt}^1(x,t),$$

$$u_{tt}^2(x,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_x^{\pi} \left(\frac{\partial f(\xi, t-x+\xi)}{\partial(t-x+\xi)} - \frac{\partial f(\xi, t+x-\xi)}{\partial(t+x-\xi)}\right) d\xi,$$

$$u_{xx}^2(x,t) = -f(x,t) + u_{tt}^2(x,t).$$

Тепер, враховуючи (13) – (15), переконуємось у справедливості твердження леми.

Позначимо через $\tilde{C}$ і $\tilde{C}_{\pi t}$ простори функцій, неперервних і обмежених відповідно на $\mathbb{R}$ і $[0,\pi]\times\mathbb{R}$, а через Q_π — клас π-періодичних за змінною t функцій.

У прямокутнику $\Pi = \{0 \le x \le \pi, 0 \le t \le \pi\}$ для $g \in \tilde{C}_{\pi t} \cap Q_\pi$ побудуємо розривну функцію

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} \tilde{u}^1(x,t), & (x,t) \in D_1; \\ \tilde{u}^2(x,t), & (x,t) \in D_2, \end{cases} \tag{16}$$

де $\tilde{u}^{\,1}(x,t)$ і $\tilde{u}^{\,2}(x,t)$ визначаються формулами

$$\tilde{u}^1(x,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{x} d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} \left(g_1(\xi,t) - \nu_1''(\tau) - \frac{\xi}{\pi}\left(\nu_2''(\tau) - \nu_1''(\tau)\right)\right) d\tau,$$

$$(17)$$

$$\tilde{u}^2(x,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_x^{\pi} d\xi \int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} \left(g_1(\xi,t) - \nu_1''(\tau) - \frac{\xi}{\pi}\left(\nu_2''(\tau) - \nu_1''(\tau)\right)\right) d\tau,$$

$$D_1 = \{0 \le x \le \pi, x \le t \le \pi\} \setminus \{(\pi,\pi)\},$$

$$D_2 = \{0 \le x \le \pi, 0 \le t \le x \setminus \{(x,t)\} : \ t = x, 0 \le x < \pi\}.$$

Справедливе таке твердження.

Теорема. *Якщо* $\nu_i(t) \in \tilde{C}\,(\mathbb{R}) \cap Q_\pi$, $i = 1, 2$, $g_1 \in \tilde{C}_{\pi t} \cap Q_\pi$, *то існує узагальнений* ($v \in$ $\in L_\infty \cap Q_\pi$) *розв'язок крайової періодичної задачі (3) – (5), заданий формулою*

$$v(x,t) = \nu_1(t) + \frac{x}{\pi}\,(\nu_2(t) - \nu_1(t)) + \tilde{u}(x,t), \quad 0 \le x \le \pi, \;\; t \in \mathbb{R},$$

де $\tilde{u}(x,t)$ *визначена формулами (16), (17), причому*

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{\tilde{C}_{\pi t}} \le \frac{\pi^2}{2}\,\|\tilde{g}(x,t)\|_{\tilde{C}_{\pi t}}\,.$$

Приклад. Нехай $g_1(x,t) = 0, \; \mu_1(t) \equiv 0, \mu_2 = \sin(2t)$. На основі формул (17) одержуємо

$$\tilde{u}^{\,1}(x,t) = -\frac{x\sin 2t}{\pi} - \frac{\sin 2t}{2\pi}\,\sin 2x,$$

$$\tilde{u}^{\,2}(x,t) = -\frac{x\sin 2t}{\pi} + \sin 2t\,\cos 2x + \frac{\sin 2t \sin 2x}{2\pi},$$

а отже, в цьому випадку розв'язок задачі (3) – (5) має вигляд

$$v(x,t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\sin 2t \sin 2x, \;\; \textbf{якщо} \;\; (x,t) \in D_1; \\ \sin 2t \cos 2x + \dfrac{1}{2\pi}\sin 2t \sin 2x, \;\; \textbf{якщо} \;\; (x,t) \in D_2. \end{cases}$$

1. *Митропольский Ю.А, Хома Г.П., Громяк М.И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. — Киев: Наук. думка, 1991. — 232 с.
2. *Вейвода О., Штедры М.* Существование классических периодических решений волнового уравнения: Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений // Дифференц. уравнения. — 1984. — **20**, № 10. — С. 1733 – 1739.
3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977. — 736 с.

Одержано 02.03.99