НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ т. 2 • № 4 • 1999

УДК 519.21

ДИФУЗІЯ НА ПЛОЩИНІ З НАПІВПРОЗОРИМИ МЕМБРАНАМИ НА ДВОХ ПРЯМИХ

О. В. Арясова

Ін-т математики НАН України,
Україна, 252601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3

Constructed in the paper is a continuous Markov process, that is generalized diffusion with identity diffusion matrix and drift coefficient with δ-functions concentrated on two intersecting straight lines.

Побудовано неперервний процес Маркова на площині, який є узагальненим дифузійним з одиничною матрицею дифузії та вектором переносу з δ-функціями, зосередженими на двох прямих, що перетинаються.

1. Метою цієї роботи є побудова вінерівського процесу на площині з напівпрозорими мембранами на двох прямих, що перетинаються. Точніше кажучи, буде зконструйовано узагальнений дифузійний процес на площині з одиничною матрицею дифузії та вектором переносу $a(x)$, що є функцією вигляду

$$a(x) = \sum_{i=1}^{2} \nu_i q_{3-i}(x) \delta_{S_i}(x), \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^2$; S_1 та S_2 — згадані вище прямі в $\mathbb{R}^2$ (вони перетинаються); ν_i — вектор нормалі до S_i для $i = 1, 2$; $q_i(x)$ — задана на S_{3-i} неперервна функція з дійсними значеннями, така, що $|q_i(x)| \leq 1$ при всіх $x \in S_{3-i}$, $i = 1, 2$; δ_{S_i} — узагальнена функція на S_i, дія якої на пробну функцію φ зводиться до „криволінійного"інтегралу від φ по прямій S_i, $i = 1, 2$. Саме наявність кутової точки (точки перетину прямих S_1 та S_2) робить дану задачу такою, що не вкладається в теорію узагальнених дифузійних процесів (див. [1]).

З іншого боку, як частинний випадок (а саме, при $|q_i(x)| \equiv 1$ для $i = 1, 2$) процесу, побудованого нижче, можна розглядати процес з відбиттям по нормалі на сторонах кута, що його утворюють півосі прямих S_1 та S_2, від точки їх перетину. Тому цю роботу можна розглядати як деяке узагальнення результатів робіт [2, 3], хоча в останніх розглядається і більш загальна задача, коли відбиття на сторонах кута відбувається не обов'язково по нормалі.

План роботи такий: в п. 2 будується шуканий процес у випадку, коли прямі S_1 та S_2 перетинаються під прямим кутом. При цьому буде вимагатись лише щоб одна з функцій q_1 та q_2 задовольняла умову Ліпшіца. В п. 3 розглядається випадок непрямого кута. Шуканий процес буде побудований при умові, що $\operatorname{tg} \xi > \dfrac{|q_1 q_2|}{2}$, де через ξ позначено величину гострого кута між прямими S_1 та S_2, а q_1 та q_2 — сталі. Зауважимо, що результати цієї статті є узагальненнями результату [4], в якому припускалось, що одна з функцій $q_1(x), q_2(x)$ анулюється в точці перетину прямих S_1 та S_2.

2. Нехай прямі S_1 та S_2 перетинаються під прямим кутом. Будемо вважати, що в $\mathbb{R}^2$ фіксовано таку систему координат, що $S_i = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_{3-i} = 0\}$, де через (x_1, x_2) позначаються координати точки $x \in \mathbb{R}^2$ у вибраній системі координат. Вектори ν_1 та ν_2 вибираємо так, що їх координатами є $(0,1)$ та $(1,0)$ відповідно.

Позначимо через $g_0(t,x,y)$ для $t > 0, x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}^2$ густину ймовірності переходу вінерівського процесу в $\mathbb{R}^2$:

$$g_0(t,x,y) = \frac{1}{2\pi t} \exp\left\{-\frac{|y-x|^2}{2t}\right\}$$

і покладемо

$$g(t,x,y) = g_0(t,x,y) + \int\limits_0^t f(\tau,t,x_2,y_2) h(\tau,t,x_1,y_1) d\tau,$$

де

$$f(\tau,t,x_2,y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{x_2^2}{2\tau}\right\} \frac{y_2}{\sqrt{2\pi(t-\tau)^3}} \exp\left\{-\frac{y_2^2}{2(t-\tau)}\right\},$$

$$h(\tau,t,x_1,y_1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{(z_1-x_1)^2}{2\tau}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\tau)}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(y_1-z_1)^2}{2(t-\tau)}\right\} q_2(z_1) dz_1 .$$

Відомо (див., наприклад, [5, с. 76 – 84]), що $g(t,x,y)$ є густиною ймовірності переходу узагальненого дифузійного процесу в $\mathbb{R}^2$, для якого матрицею дифузії є одинична матриця, а вектором переносу є функція $\nu_1 q_2(x) \delta_{S_1}(x)$.

Півгрупу операторів, що відповідає шуканому процесу, визначимо як розв'язок рівняння

$$u(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} g(t,x,y)\varphi(y)dy + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S_2} g(t,x,y) V(t-\tau,y,\varphi) q_1(y) d\sigma_y, \tag{2}$$

де φ — довільна обмежена вимірна функція на $\mathbb{R}^2$ з дійсними значеннями, $V(t,x,\varphi)$ при $t > 0, x \in S_2^0$ (через S_2^0 позначено множину $S_2 \setminus \{0\}$) задається рівністю

$$V(t,x,\varphi) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u(t,x+,\varphi)}{\partial x_1} + \frac{\partial u(t,x-,\varphi)}{\partial x_1}\right],$$

$$\frac{\partial u(\tau,x\pm,\varphi)}{\partial x_1} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\partial u(\tau, x \pm \varepsilon\nu_2, \varphi)}{\partial x_1}.$$

За допомогою теореми про стрибок похідної потенціалу простої кулі (див. [6], гл.4, $\S 15$) для невідомої функції $V(t,x,\varphi)$ одержуємо інтегральне рівняння

$$V(t,x,\varphi)=\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\partial g(t,x,y)}{\partial x_1}\varphi(y)dy+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{S_2}Q(\tau,x,y)V(t-\tau,y,\varphi)q_1(y)d\sigma_y, \tag{3}$$

де $t>0, x\in S_2^0$,

$$Q(\tau,x,y)=\int\limits_0^\tau f(\theta,\tau,x_2,y_2)H(\theta,\tau)d\theta,$$

де

$$H(\theta,\tau)=\left.\frac{\partial h(\tau,t,x_1,y_1)}{\partial x_1}\right|_{x_1=0,\ y_1=0}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{z_1}{2\pi\sqrt{(t-\tau)\tau^3}}\exp\left\{-\frac{z_1^2 t}{2\tau(t-\tau)}\right\}q_2(z_1)dz_1.$$

Ядро $Q(\tau,x,y)$ при $x\in S_2^0,\ y\in S_2$ допускає оцінку

$$Q(\tau,x,y)\le\frac{K}{\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left\{-\frac{x_2^2+y_2^2}{2\tau}\right\}. \tag{4}$$

Лема 1. *Нехай функція $q_2(x)$ задовольняє умову Ліпшиця $|q_2(x)-q_2(y)|\le L|x-y|$ при всіх $x\in S_1, y\in S_1$ з деякою сталою L. Тоді існує єдиний розв'язок $V(t,x,y)$ рівняння (3), який при довільному скінченному T в кожній області вигляду $t\in(0,T],\quad x\in S_2^0$, задовольняє нерівність*

$$|V(t,x,\varphi)|\le L_T\|\varphi\|t^{-1/2} \tag{5}$$

з деякою сталою L_T, що залежить лише від T. (Тут і надалі $\|\varphi\|=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^2}|\varphi(x)|$.)

Доведення. Зафіксуємо довільну обмежену вимірну функцію $\varphi(x)$, $x\in\mathbb{R}^2$. Рівняння (3) будемо розв'язувати методом послідовних наближень. При $t>0, x\in S_2^0$ покладемо

$$V_0(t,x,\varphi)=\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\partial g(t,x,y)}{\partial x_1}\varphi(y)dy$$

і для $k=1,2,\ldots$

$$V_k(t,x,\varphi)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{S_2}Q(\tau,x,y)V_{k-1}(t-\tau,y,\varphi)q_1(y)d\sigma_y.$$

Для $V_0(t,x,\varphi)$ виконується нерівність

$$|V_0(t,x,\varphi)|\le C_T\|\varphi\|t^{-1/2} \tag{6}$$

в області $t \in (0, T],\ x \in S_2^0$ при довільному скінченному T, де C_T — деяка додатна стала, що залежить від T. За допомогою індукції по k приходимо до оцінок

$$|V_k(t,x,\varphi)| \le \frac{C_T \|\varphi\| K^k \pi^{\frac{k+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} t^{\frac{k-1}{2}}\ , \tag{7}$$

де C_T — стала з нерівності (6), K — стала з нерівності (4). Оцінки справедливі для всіх $k = 0, 1, 2, \dots$ при $t \in (0, T], x \in S_2^0$.

Оцінки (7) дозволяють зробити висновок, що ряд

$$V(t,x,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(t,x,\varphi)$$

збігається рівномірно по $x \in S_2^0$ та виконується нерівність (5). Ці ж оцінки переконують нас в тому, що такий розв'язок єдиний. Лему доведено.

Підставимо знайдений розв'язок рівняння (3) в (2) і визначимо сім'ю операторів T_t, $t > 0$, що діють на обмежену вимірну функцію $\varphi(x), x \in \mathbb{R}^2$, за формулою $T_t\varphi(x) = = u(t,x,\varphi)$, тобто

$$T_t\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} g(t,x,y)\varphi(y)dy + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S_2} g(\tau,x,y)V(t-\tau,y,\varphi)q_1(y)d\sigma_y.$$

Оператор T_t при кожному $t > 0$ є лінійним обмеженим оператором у просторі обмежених вимірних функцій φ на $\mathbb{R}^2$ з нормою $\|\varphi\|$.

Оператори T_t утворюють півгрупу і невід'ємні функції переводять в невід'ємні. Обмеженість оператора T_t є наслідком нерівності (5), з якої маємо

$$\left|\int\limits_{S_2} g(\tau,x,y)V(t-\tau,y,\varphi)q_1(y)d\sigma_y\right| \le L_T\|\varphi\| \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau(t-\tau)}} \exp\left\{-\frac{x_1^2}{2\tau}\right\}.$$

Тому

$$|T_t\varphi(x)| \le \|\varphi\| \left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} L_T\right).$$

Відмітимо також, що $V(t,x,\varphi_0) \equiv 0$ для функції $\varphi_0(y) \equiv 1$. Звідси $T_t\varphi_0(x) \equiv 1$. Отже, існує ймовірність переходу $P(t,x,y)$ в $\mathbb{R}^2$, яка визначає деякий однорідний процес Маркова і задовольняє рівність

$$T_t\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(y)P(t,x,dy).$$

Нескладні підрахунки приводять до нерівності

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} |y-x|^4 P(t,x,dy) \le K_T t^2,$$

що справедлива при $t \in (0,T]$ для довільного $T < \infty$, де K_T — деяка додатна стала. Ця нерівність дає змогу вважати побудований процес неперервним.

Після підрахунків одержуємо наступні співвідношення:

$$\lim_{t\downarrow 0}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\varphi(x)\left[\frac{1}{t}\int\limits_{\mathbb{R}^2}(y-x,\lambda)P(t,x,dy)\right]dx =$$

$$= (\nu_1,\lambda)\int\limits_{S_1}\varphi(x)q_2(x)d\sigma_x + (\nu_2,\lambda)\int\limits_{S_2}\varphi(x)q_1(x)d\sigma_x,$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\varphi(x)\left[\frac{1}{t}\int\limits_{\mathbb{R}^2}(y-x,\lambda)^2P(t,x,dy)\right]dx = |\lambda|^2\int\limits_{\mathbb{R}^2}\varphi(x)dx.$$

Сформулюємо одержаний результат у вигляді теореми.

Теорема 1. *Нехай $S_i = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_{3-i} = 0\}$ і виконуються умови леми 1. Тоді існує неперервний процес Маркова в $\mathbb{R}^2$, який є узагальненим дифузійним з одиничною матрицею дифузії та вектором переносу вигляду (1).*

Зауваження. Подібно до того, як це було зроблено в роботі [5, с. 113 – 123], можна показати, що траєкторії побудованого процесу є розв'язками системи стохастичних диференціальних рівнянь

$$dx_1(t) = \nu_2 q_1(x_2(t))\delta(x_1(t))dt + dw_1(t),$$

$$dx_2(t) = \nu_1 q_2(x_1(t))\delta(x_2(t))dt + dw_2(t),$$

де w_1 та w_2 — незалежні між собою одновимірні вінерівські процеси.

3. Нехай тепер прямі S_1 та S_2 перетинаються не під прямим кутом. Будемо вважати, що в $\mathbb{R}^2$ фіксовано таку систему координат, що $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$ та $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \sin\xi - x_2\cos\xi = 0\}$, де через ξ позначено величину гострого кута між S_1 та S_2, так що $\xi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ далі фіксовано. Нехай орти нормалей до прямих S_1 та S_2 зорієнтовані так, що $\nu_1 = (0,1)$, а $\nu_2 = (\sin\xi, -\cos\xi)$.

Нехай далі q_1, q_2 — деякі задані дійсні числа такі, що $|q_1| \le 1, |q_2| \le 1$. Знову позначимо через $g_0(t,x,y)$ для $t > 0, x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}^2$ густину ймовірності переходу вінерівського процесу в $\mathbb{R}^2$ і покладемо

$$G(t,x,y) = g_0(t,x,y) + \frac{q_2\,\mathrm{sign}\,y_2}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{(y_1-x_1)^2}{2t}\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{(|x_2|+|y_2|)^2}{2t}\right\}.$$

Відомо (див. [5]), що $G(t,x,y)$ є густиною ймовірності переходу узагальненого дифузійного процесу в $\mathbb{R}^2$ з одиничною матрицею дифузії та вектором переносу $\nu_1 q_2 \delta_{S_1}(x)$. Півгрупа операторів, що відповідає шуканому процесу, буде розшукуватися як розв'язок рівняння

$$u(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} G(t,x,y)\varphi(y)dy + q_1\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{S_2} G(t-\tau,x,y)V(\tau,y,\varphi)d\sigma_y. \tag{8}$$

Тут $t > 0, x \in \mathbb{R}^2$, φ — довільна обмежена вимірна функція на $\mathbb{R}^2$ з дійсними значеннями, $u(t,x,\varphi)$ — шукана функція, а функція $V(t,x,\varphi)$ визначається формулою

$$V(t,x,\varphi) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u(t,x+,\varphi)}{\partial \nu_2} + \frac{\partial u(t,x-,\varphi)}{\partial \nu_2}\right]$$

і є розв'язком рівняння

$$V(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial G(t,x,y)}{\partial \nu_2(x)}\varphi(y)dy + q_1\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S_2} F(t-\tau,x,y)V(\tau,y,\varphi)d\sigma_y, \tag{9}$$

де через $\dfrac{\partial G(t,x,y)}{\partial \nu_2(x)}$ позначено похідну в напрямку ν_2 функції $G(t,x,y)$ як функції аргументу x,

$$F(t,x,y) = \frac{q_2|y_1|\sin\xi}{\pi t^2}\mathbb{I}_{\{x_1y_1>0\}}\exp\left\{-\frac{(y_1-x_1)^2}{2t}\right\}\exp\left\{-\frac{(|x_2|+|y_2|)^2}{2t}\right\}, \tag{10}$$

$\mathbb{I}_{\{x_1y_1>0\}}$ — індикатор множини $\{x_1y_1>0\}$.

$$\left(\text{При } t>0, x\in S_2^0 \text{ покладено } \frac{\partial u(t,x\pm,\varphi)}{\partial \nu_2} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\partial u(t,x\pm\varepsilon\nu_2,\varphi)}{\partial\nu_2}.\right)$$

Позначимо через ξ_0 величину гострого кута такого, що $\operatorname{tg}\xi_0 = \dfrac{|q_1q_2|}{2}$.

Лема 2. *Нехай $\xi > \xi_0$. Тоді рівняння (9) має єдиний розв'язок в області $t>0,\ x\in S_2^0$, який може бути записаний у вигляді ряду*

$$V(t,x,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(t,x,\varphi), \tag{11}$$

члени якого задовольняють нерівності

$$|V_k(t,x,\varphi)| \le \frac{C\|\varphi\|}{\sqrt{t}}\left(\frac{|q_1q_2|}{2\pi\operatorname{tg}\xi}\right)^k\int\limits_0^1 \exp\left\{-\frac{x_1^2\operatorname{tg}^2\xi}{t(1-\theta)}\right\}(1-\theta)^{-1}f_k(\theta)d\theta, \tag{12}$$

якщо $\xi\in\left(\xi_0,\dfrac{\pi}{4}\right)$, та

$$|V_k(t,x,\varphi)| \le \frac{C\|\varphi\|}{\sqrt{t}}\left(\frac{|q_1q_2|\sin 2\xi}{2\pi}\right)^k\int\limits_0^1 \exp\left\{-\frac{x_1^2}{2t(1-\theta)\cos^2\xi}\right\}\times$$
$$\times(1-\theta)^{-1}f_k(\theta)d\theta, \tag{13}$$

якщо $\xi\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$, де

$$f_{k+1}(\theta) = \sqrt{\theta}\int\limits_0^1 f_k(\tau)\frac{d\tau}{1-\tau\theta},\ \ k=1,2,\ldots,$$

$$f_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\theta}}.$$

Доведення. Щоб довести існування інтегралів у співвідношеннях (12) та (13) та збіжність ряду (11), доведемо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\beta \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, що

$$f_k(\theta) \le N_\beta \frac{(\pi+\varepsilon)^k}{(1-\theta)^\beta} \tag{14}$$

при всіх $\theta \in (0,1)$, $\;k = 2, 3, \dots$, де N_β — деяка додатна стала, що залежить від β.

Дійсно, неважко показати, що для довільного $\beta \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ виконується нерівність

$$f_2(\theta) \le N_\beta \frac{(\pi+\varepsilon)^2}{(1-\theta)^\beta}, \text{ де } N_\beta = \frac{\ln 4 + \dfrac{1}{\beta e}}{(\pi+\varepsilon)^2}.$$

Далі скористаємося індукцією по k. Нехай нерівність (14) виконується для $k = n$. Тоді для $k = n+1$ маємо

$$f_{n+1}(\theta) \le N_\beta (\pi+\varepsilon)^n \sqrt{\theta} \int\limits_0^1 \frac{d\tau}{(1-\tau)^\beta (1-\tau\theta)}.$$

Після заміни змінних одержуємо

$$f_{n+1}(\theta) \le \frac{N_\beta (\pi+\varepsilon)^n \theta^{\beta-1/2}}{(1-\theta)^\beta} \int\limits_0^{\frac{\theta}{1-\theta}} \frac{d\tau}{(1+\tau)\tau^\beta} \le \frac{N_\beta (\pi+\varepsilon)^n}{(1-\theta)^\beta} \frac{\pi}{\sin \pi\beta}.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ покладемо $\beta = \dfrac{1}{\pi} \arcsin \dfrac{\pi}{\pi+\varepsilon}$. Тоді $\beta \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ і формула (14) виконується.

Перейдемо тепер до доведення співвідношень (12) та (13). З формули (10) маємо

$$|F(t,x,y)| \le \frac{|q_2||y_1| \sin \xi}{\pi t^2} \mathbb{I}_{\{x_1 y_1 > 0\}} \exp\left\{ -\frac{(x_1+y_1)^2 \operatorname{tg}^2 \xi}{t} \right\}, \tag{15}$$

якщо $\xi \in \left(\xi_0, \dfrac{\pi}{4}\right)$,

$$|F(t,x,y)| \le \frac{|q_2||y_1| \sin \xi}{\pi t^2} \mathbb{I}_{\{x_1 y_1 > 0\}} \exp\left\{ -\frac{(x_1+y_1)^2}{2t \cos^2 \xi} \right\}, \tag{16}$$

якщо $\xi \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Покладемо

$$V_0(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial G(t,x,y)}{\partial \nu_2(x)} \varphi(y) dy$$

і для $k = 1, 2, \dots$

$$V_k(t,x,\varphi) = q_1 \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S_2} F(t-\tau,x,y) V_{k-1}(\tau,y,\varphi) d\sigma_y.$$

Для $V_0(t,x,y)$ виконується оцінка

$$|V_0(t,x,y)| \le C\|\varphi\| t^{-1/2} \tag{17}$$

з деякою сталою C.

Доведемо співвідношення (12) за індукцією. Оцінимо $V_1(t,x,\varphi)$, використавши нерівність (15):

$$|V_1(t,x,\varphi)| \le \frac{|q_1 q_2|}{2\pi \operatorname{tg}\xi} \int\limits_0^t (t-\theta)^{-1}\theta^{-1/2} \exp\left\{-\frac{x_1^2 \operatorname{tg}^2\xi}{(t-\theta)}\right\} d\theta =$$

$$= \frac{|q_1 q_2|}{2\pi \operatorname{tg}\xi \sqrt{t}} \int\limits_0^1 (1-\theta)^{-1}\theta^{-1/2} \exp\left\{-\frac{x_1^2 \operatorname{tg}^2\xi}{t(1-\theta)}\right\} d\theta.$$

Отже, для $k=1$ співвідношення (12) виконується. Припустимо, що воно виконується для $k=n$. Тоді для $V_{n+1}(t,x,\varphi)$ маємо

$$|V_{n+1}(t,x,\varphi)| \le C\|\varphi\| \left(\frac{|q_1 q_2|}{2\pi \operatorname{tg}\xi}\right)^{n+1} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int\limits_0^\infty dy_1 \frac{y_1 \sin\xi}{\pi(t-\tau)^2\cos\xi} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(x_1^2+y_1^2)\operatorname{tg}^2\xi}{t-\tau}\right\} \int\limits_0^1 \exp\left\{-\frac{y_1^2 \operatorname{tg}^2\xi}{\tau(1-\theta)}\right\} (1-\theta)^{-1} f_n(\theta) d\theta =$$

$$= \frac{C\|\varphi\|}{\sqrt{t}} \left(\frac{|q_1 q_2|}{2\pi \operatorname{tg}\xi}\right)^{n+1} \int\limits_0^1 \exp\left\{-\frac{x_1^2 \operatorname{tg}^2\xi}{t(1-\theta)}\right\} (1-\theta)^{-1} f_{n+1}(\theta) d\theta.$$

Оцінку (12) доведено. Як випливає з оцінок (14), ряд (11) при $\xi \in \left(\xi_0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ збігається, якщо $\dfrac{|q_1 q_2|(\pi+\varepsilon)}{2\pi \operatorname{tg}\xi} < 1$. Нехай $\operatorname{tg}\xi = \dfrac{|q_1 q_2|}{2} + \alpha,\ \alpha > 0$. Тоді ряд (11) збігається при $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{2\pi\alpha}{|q_1 q_2|}\right)$. З цих же оцінок випливає єдиність розв'язку рівняння (9) при $\xi \in \left(\xi_0, \dfrac{\pi}{4}\right)$. Цілком аналогічно за допомогою нерівності (16) доводиться оцінка (13). В цьому випадку ряд (11) збігається для всіх $\xi \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Лему доведено.

Знайдений розв'язок рівняння (9) підставимо в рівняння (8) і визначимо тим самим шукану функцію $u(t,x,\varphi)$.

Аналогічно міркуванням, викладеним у п. 2, доводиться існування ймовірності переходу $P(t,x,y)$ в $\mathbb{R}^2$, яка визначає деякий однорідний процес Маркова і задовольняє рівність

$$u(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(y) P(t,x,dy).$$

Можна довести неперервність цього процесу, а також підрахувати його дифузійні характеристики.

Ці міркування завершують доведення такого твердження.

Теорема 2. *Нехай* $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$, $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \sin \xi - x_2 \cos \xi = 0\}$ *і виконується умова* $\operatorname{tg} \xi > \dfrac{|q_1 q_2|}{2}$. *Тоді існує неперервний процес Маркова, який є узагальненим дифузійним з одиничною матрицею дифузії та вектором переносу* $\nu_1 q_2 \delta_{S_1}(x) + \nu_2 q_1 \delta_{S_2}(x)$.

1. *Портенко Н.И.* Обобщенные диффузионные процессы. — Киев: Наук. думка, 1982. — 208 с.
2. *Varadhan S.R.S., Williams R.J.* Brownian motion in a wedge with oblique reflection // Communs Pure and Appl. Math. — 1985. — **38**. — P. 405 – 443.
3. *Harrison J.M., Rieman M.I.* Reflected Brownian motion on an Orthant // Ann. Probab. — 1981. — **9**. — P. 302 – 308.
4. *Панамарчук О.В.* Дифузійний процес на площині з мембранами на двох прямих, що перетинаються // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 9. — С. 1210 – 1216.
5. *Портенко М.І.* Процеси дифузії в середовищах з мембранами. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. — 200 с.
6. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. — 736 с.

Одержано 30.08.99