НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ т. 2 • № 4 • 1999

УДК 517.9

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВАХ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Л. А. Али

Ин-т математики НАН Украины,
Украина, 252601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3

We study invariant sets of one system of differences equations with the help of Lyapunov's function.

За допомогою функції Ляпунова досліджено інваріантні множини деякої системи різницевих рівнянь.

Будем рассматривать систему разностных уравнений вида

$$x_{n+1} = f\left(x_n\right), \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{Z}$ — целое, $x \in \mathbb{R}^n$, правая часть которой определена в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$.

В предположении, что отображение f является взаимно однозначным отображением D на D, можно, очевидно, утверждать, что для каждого $x_0 \in D$ существует единственное решение $x_n(x_0)$ системы (1) такое, что $x_0(x_0) = x_0$. Это решение определено и принадлежит области D при $n \in \mathbb{Z}$. Действительно, существование этого решения вправо от нуля очевидно, поскольку, в силу (1), $x_1 = f(x_0) \in D$, $x_2 = f(x_1) \in D$ и т. д. Существование же этого решения влево от нуля следует из того, что f является взаимно однозначным отображением D в D, а поэтому можно определить единственное обратное отображение $f^{-1}(x)$, считая, что f есть элемент области D, который отображается в $x \in D$ при отображении f.

Условия, накладываемые на функцию f, при которых она удовлетворяет указанным выше требованиям, общеизвестны; они следуют из теорем о неявных функциях и связаны с ее гладкостью и отличием от нуля якобиана $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ при $x \in D$. Поэтому впредь будем предполагать, что правые части системы (1) таковы, что решение $x_n(x_0)$ существует и единственно для всех $x_0 \in D$.

Так как система (1) автономна, то по аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями [1] она задает динамическую дискретную систему, поскольку функция $x_n(x_0)$ удовлетворяет условию группы по n:

$$x_{n+p}(x_0) = x_n(x_p(x_0)). \tag{2}$$

Последнее следует из того, что если $x_n(x_0)$ — решение (1), то для $p \in \mathbb{Z}$ $x_{n+p}(x_0)$ также является решением (1).

Следуя общепринятой терминологии в дифференциальных уравнениях, при фиксированном x_0 будем называть решение $x_n(x_0)$ *движением*. Множество $\{x_n(x_0),\ n \in \mathbb{Z}\}$ будем называть *траекторией движения* и обозначать $x_n(x_0, \mathbb{Z})$. Множество $\{x_n(x_0),\ n \in \mathbb{Z}^+\}$ назовем *положительной*, а $\{x_n(x_0),\ n \in \mathbb{Z}^-\}$ — *отрицательной полутраекториями движения* $x_n(x_0)$ и обозначим соответственно $x_n(x_0, \mathbb{Z}^+)$ и $x_n(x_0, \mathbb{Z}^-)$.

Множество $M \subset D$ назовем *инвариантным множеством* системы (1), если оно состоит из траекторий этой системы. Если множество M состоит из положительных полутраекторий системы, то назовем его *положительно инвариантным*. Аналогично определим и отрицательно инвариантное множество.

Изучим односторонние инвариантные множества системы (1) с помощью функций Ляпунова, как это сделано в [2] для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Компактное положительно инвариантное множество M системы (1) назовем *устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $x_n(U_\delta) \subset (U_\varepsilon \cup M)$ при всех $n \in \mathbb{Z}^+$. Здесь U_δ обозначает δ-окрестность множества M.

Функцию $V(x)$, определенную в D, будем называть знакопостоянной в D_0, если для всех $x \in \overline{D}_0$ ненулевые значения $V(x)$ имеют один и тот же знак. Знакопостоянную в D_0 функцию V назовем знакоопределенной в D_0, если множество ее нулей не пусто и компактно в D_0.

Опишем инвариантные множества системы (1) с помощью нулей функции Ляпунова V.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть f взаимно однозначно отображает область D в себя. Если $V = V(x)$ является знакоопределенной в D и выполняется одно из неравенств*

$$V\left(f(x)\right) - V(x) \leq 0 \tag{3}$$

или

$$V\left(f(x)\right) - V(x) \geq 0 \tag{4}$$

для $x \in D$, то множество

$$V\left(x\right) = 0\,, \quad x \in D\,, \tag{5}$$

является односторонне инвариантным множеством системы (1). Точнее, оно отрицательно инвариантно, если знаки V и одного из неравенств совпадают, и положительно инвариантно и устойчиво, если знаки различны.

Доказательство. Предположим сначала, что $V(x) \geq 0$ и выполнено неравенство (3). Покажем, что множество N_0 точек из D, для которых $V(x) = 0$, является положительно инвариантным и устойчивым множеством системы (1).

Рассмотрим для этого решение $x_n(x_0)$ системы (1), начинающееся при $t = 0$ в точке $x_0 \in N_0$. В силу предположений очевидно, что это решение существует для любого целого n и $x_n(x_0) \in D$. Тогда для любого n имеем

$$V(f(x_n^{(x_0)})) \leq V(x_n^{(x_0)}),$$

из которого в силу (1) следует неравенство $V(x_{n+1}^{(x_0)}) \leq V(x_n^{(x_0)})$, означающее, что вдоль решения $x_n(x_0)$ функция $V(x)$ является невозрастающей. Поэтому для любого $n \in \mathbb{Z}^+$

$$V(x_n(x_0)) \leq V(x_0(x_0)) = V(x_0) = 0\,. \tag{6}$$

А поскольку $V(x)$ неотрицательна в D, то

$$V(x_n(x_0)) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Последнее и означает положительную инвариантность множества N_0.

Докажем теперь устойчивость множества N_0. Пусть ε — достаточно малое положительное число такое, что $U_\varepsilon(N_0) \subset D$. Согласно предположению о компактности N_0 в D этого всегда можно достичь. Обозначим через V_μ множество точек из $\overline{D}$, для которых $0 < V(x) \leq \mu$. Согласно лемме из [1, с. 60] по данному ε можно выбрать такие $\mu = \mu(\varepsilon) > 0$ и $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, чтобы выполнялись включения

$$U_\varepsilon \supset V_\mu \supset U_\delta\,, \tag{7}$$

где $U_\delta = U_\delta(N_0)$.

С учетом (7) решение $x_n(x_0)$ системы (1), начинающееся при $n = 0$ в точке $x_0 \in U_\delta$, удовлетворяет неравенству $V(x_0(x_0)) \leq \mu$, а поскольку в области D вдоль решения системы (1) V не возрастает, то

$$V(x_n(x_0)) \leq V(x_0) \leq \mu \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+\,.$$

Таким образом, решение, начавшееся при $n = 0$ в точке $x_0 \in U_\delta$, при всех положительных и целых n не выходит из множества V_μ. А это, в силу (7), означает, что оно не выходит из ε-окрестности множества N_0. Последнее означает, в силу определения, устойчивость множества N_0.

Пусть теперь $V(x) \geq 0$ и выполнено неравенство (4). Тогда для решения $x_n(x_0)$ такого, что $x_0(x_0) = x_0 \in N_0$, выполнено неравенство

$$V(f(x_n)) \geq V(x_n)\,, \tag{8}$$

из которого следует неравенство

$$V(x_{n+1}(x_0)) \geq V(x_n(x_0)),$$

означающее, что вдоль решения $x_n(x_0)$ функция $V(x_n(x_0))$ не убывает. Последнее означает, что для отрицательных n выполнено неравенство

$$V(x_n(x_0)) \leq V(x_0(x_0)) = V(x_0) = 0,$$

откуда следует отрицательная определенность множества N_0. Теорема доказана.

Проиллюстрируем доказанную теорему примером. Рассмотрим скалярное разностное уравнение вида

$$x_{n+1} = x_n^3 \tag{9}$$

в области $|x| < 1$. Функция $f = x^3$ и в данной области в силу своей монотонности она взаимно однозначно отображает $(-1; 1)$ в себя. В роли функции V выберем функцию $V(x) = x^2$. В данной области она неотрицательна и ее единственным нулем является точка $x = 0$. Проверим для нее выполнение неравенства (3). Действительно,

$$V(f(x)) = x^6 \leq x^2 = V(x) \quad \text{для} \quad |x| < 1\,.$$

Применяя доказанную выше теорему, можно утверждать, что множество $x = 0$ является инвариантным и устойчивым множеством системы (1).

1. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.; Л.: ОГИЗ, 1947. — 448 с.
2. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. — М.: Наука, 1987. — 302 с.

Получено 14.12.98