УДК 517.9

ІСНУВАННЯ ІНВАРІАНТНОГО ТОРА ВИРОДЖЕНОГО ЛІНІЙНОГО РОЗШИРЕННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Ю. Ю. Король

Ужгород. нац. ун-т
вул. Університетська, 14, Ужгород, 88000, Україна
e-mail: korol_yura@ukr.net

Under the assumption that a degenerate system that is defined on the product of a torus and a Euclidean space can be reduced to a central canonical form and the corresponding homogeneous nondegenerate system is exponentially dichotomous on the half-axes, we find a necessary and sufficient condition for the degenerate linear system to have a unique invariant torus. We also find conditions for preservation of an asymptotically stable invariant toroidal manifold of a degenerate linear extension of a dynamical system on a torus under small perturbations on a set of nonwandering points.

При предположении, что вырожденная система, определенная на прямом произведении тора и евклидового пространства, сводится к центральной канонической форме, а соответствующая однородная невырожденная система экспоненциально дихотомична на полуосях, получено необходимое и достаточное условие существования единственного инвариантного тора вырожденной линейной системы. Установлены условия сохранения асимптотически устойчивого инвариантного тороидального многообразия вырожденного линейного расширения динамической системы на торе при малых возмущениях на множестве неблуждающих точек.

1. Вступ. Відомо, що різноманітні задачі теорії керування, радіофізики, математичної економіки, лінійного програмування моделюються системами диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідній, наявність якої суттєво ускладнює знаходження розв'язків. Важливу роль в теорії таких систем відіграє поняття центральної канонічної форми, яке вперше було введено у праці С. Кемпбелла та Л. Петцольда [1], а в подальших дослідженнях А. М. Самойленка, М. І. Шкіля, В. П. Яковця [2], В. Ф. Чистякова, А. А. Щеглової [3] було знайдено достатні умови звідності до неї. З огляду на ці результати з'ясуємо умови існування інваріантного тора виродженого лінійного розширення динамічних систем у припущенні, що дану систему зведено до центральної канонічної форми.

2. Постановка задачі. Розглянемо систему диференціальних рівнянь в центральній канонічній формі вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \begin{bmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} M(\varphi) & 0 \\ 0 & E_s \end{bmatrix} x + f(\varphi), \tag{1}$$

де $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \mathcal{T}_m$, $a(\varphi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$, $M(\varphi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$, $f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$, E_{n-s}, E_s — одиничні матриці $(n-s)$- та s-го порядку відповідно, $x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, I — квазідіагональна матриця.

З'ясуємо структуру загального розв'язку системи (1). Позначимо $x = \operatorname{col}(x_1, x_2)$, де $x_1(t, \varphi), x_2(t, \varphi)$ — відповідно $(n-s)$- та s-вимірні вектори. При цьому система (1) розщеплюється на три незалежних рівняння

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi),$$

$$\frac{dx_1}{dt} = M(\varphi)x_1 + f^{(1)}(\varphi), \tag{2}$$

$$I\frac{dx_2}{dt} = x_2 + f^{(2)}(\varphi),$$

де $f^{(1)}(\varphi) - (n-s)$-вимірний вектор, елементами якого є перші $n-s$ елементів вектора $f(\varphi)$; $f^{(2)}(\varphi)$ – s-вимірний вектор, елементами якого є останні s елементів вектора $f(\varphi)$.

Нехай $X(t,\varphi)$ — фундаментальна матриця системи рівнянь

$$\frac{dx_1}{dt} = M(\varphi_t(\varphi))x_1, \tag{3}$$

а $Y(t,\varphi)$ — фундаментальна матриця спряженої з нею системи

$$\frac{dx_1}{dt} = -M^\top(\varphi_t(\varphi))x_1. \tag{4}$$

Загальний розв'язок другого з рівнянь (2) має вигляд

$$x_1(t,\varphi) = X(t,\varphi)\xi + \int\limits_0^t X(t,\varphi)Y^\top(\tau,\varphi)f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau. \tag{5}$$

Розв'язок третього з рівнянь (2) можна знайти методом, наведеним у [4], і він буде мати вигляд

$$x_2(t,\varphi) = -\sum_{k=0}^{l-1} I^k\,\frac{d^k f^{(2)}(\varphi_t(\varphi))}{dt^k}. \tag{6}$$

Об'єднавши розв'язки (5) та (6), загальний розв'язок системи (1) запишемо у вигляді

$$x(t,\varphi) = \begin{pmatrix} X(t,\varphi)\xi + \int_0^t X(t,\tau,\varphi)f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau \\ \\ -\sum\limits_{k=0}^{l-1} I^k\,\dfrac{d^k f^{(2)}(\varphi_t(\varphi))}{dt^k} \end{pmatrix},$$

де $X(t,\tau,\varphi) = X(t,\varphi)Y^\top(\tau,\varphi)$, а ξ — $(n-s)$-вимірний сталий вектор.

3. Обмежені на всій осі розв'язки. Знайдемо умови існування розв'язків системи (1), обмежених на всій осі, у припущенні, що лінійна однорідна система (3) експоненціально дихотомічна на півосях R_+ і R_- з проекторами $C_+(\varphi)$ та $C_-(\varphi)(C^2_\pm(\varphi) = C_\pm(\varphi))$ відповідно. Це, в свою чергу, означає, що виконуються нерівності

$$\begin{gathered}
\|X(t,\varphi)C_+(\varphi)Y^\top(\tau,\varphi)\| \le K_1 \exp^{-\alpha_1(t-\tau)}, \quad t \ge \tau, \\
\|X(t,\varphi)(I - C_+(\varphi))Y^\top(\tau,\varphi)\| \le K_1 \exp^{-\alpha_1(\tau-t)}, \quad \tau \ge t, \quad t,\tau \in \mathbb{R}_+, \\
\|X(t,\varphi)C_-(\varphi)Y^\top(\tau,\varphi)\| \le K_2 \exp^{-\alpha_2(t-\tau)}, \quad t \ge \tau, \\
\|X(t,\varphi)(I - C_-(\varphi))Y^\top(\tau,\varphi)\| \le K_2 \exp^{-\alpha_2(\tau-t)}, \quad \tau \ge t, \quad t,\tau \in \mathbb{R}_-.
\end{gathered} \tag{7}$$

Згідно з результатами [5], загальний розв'язок системи (1), обмежений на півосях $\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}_-$, має вигляд

$$x(t,\varphi,\xi) = \begin{cases} \begin{bmatrix} X(t,\varphi)C_+(\varphi)\xi + \\ +\displaystyle\int_0^t X(t,\tau,\varphi)C_+(\varphi_\tau(\varphi))f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau - \\ -\displaystyle\int_t^\infty X(t,\tau,\varphi)(I - C_+(\varphi_\tau(\varphi)))f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau - \\ -r(\varphi_t(\varphi)) \end{bmatrix}, \quad t \ge 0, \\ \begin{bmatrix} X(t,\varphi)(I - C_-(\varphi))\xi + \\ +\displaystyle\int_{-\infty}^t X(t,\tau,\varphi)C_-(\varphi_\tau(\varphi))f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau - \\ -\displaystyle\int_t^0 X(t,\tau,\varphi)(I - C_-(\varphi_\tau(\varphi)))f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau - \\ -r(\varphi_t(\varphi)) \end{bmatrix}, \quad t \le 0, \end{cases} \tag{8}$$

де

$$C_+(\varphi_\tau(\varphi)) = X(\tau,\varphi)C_+(\varphi)Y^\top(\tau,\varphi), \quad C_-(\varphi_\tau(\varphi)) = X(\tau,\varphi)C_-(\varphi)Y^\top(\tau,\varphi). \tag{9}$$

Розв'язок (8) буде обмеженим на всій осі тоді і тільки тоді, коли

$$x(0+,\varphi,\xi) - x(0-,\varphi,\xi) = 0,$$

тобто якщо векторна стала $\xi = \xi(\varphi) \in \mathbb{R}^{n-s}$ задовольняє алгебраїчну систему, отриману з (8) при $t = 0$:

$$D(\varphi)\xi = \int\limits_{-\infty}^{0} C_-(\varphi)Y^\top(\tau,\varphi)f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau + \int\limits_{0}^{\infty} (I - C_+(\varphi))Y^\top(\tau,\varphi)f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau, \tag{10}$$

де $D(\varphi) = C_+(\varphi) - (I - C_-(\varphi))$ — $((n-s)\times(n-s))$-вимірна матриця. Ця алгебраїчна система розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується умова ортогональності

$$P_{D^\top}(\varphi)\left\{\int\limits_{-\infty}^{0} C_-(\varphi)Y^\top(\tau,\varphi)f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau + \int\limits_{0}^{\infty}(I - C_+(\varphi))Y^\top(\tau,\varphi)f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau\right\} \equiv 0, \tag{11}$$

Тут $P_{D^\top}(\varphi)$ — $((n-s)\times(n-s))$-вимірна матриця, яка є ортопроектором до $D^\top(\varphi)$. Тоді загальний розв'язок системи (1), обмежений на $\mathbb{R}$, має вигляд (8), де стала $\xi = \xi(\varphi) \in \mathbb{R}^{n-s}$ визначається з системи (10) таким чином:

$$\xi = P_D(\varphi)c + D^+(\varphi)\left\{\int\limits_{-\infty}^{0} C_-(\varphi)Y^\top(\tau,\varphi)f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{0}^{\infty}(I - C_+(\varphi))Y^\top(\tau,\varphi)f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau\right\}, \quad c = c(\varphi) \in \mathbb{R}^{n-s}.$$

Тут $D^+(\varphi)$ — псевдообернена по Муру – Пенроузу матриця [6, 7] до матриці $D(\varphi)$.

Підставляючи сталу ξ у (8) отримуємо загальний розв'язок системи (1), обмежений на всій осі, у вигляді

$$x(t,\varphi,\xi) = \begin{cases} \left[\begin{array}{c} X(t,\varphi)C_+(\varphi)P_D(\varphi)c + \\ + \int_0^t X(t,\tau,\varphi)C_+(\varphi_\tau(\varphi))f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau - \\ - \int_t^\infty X(t,\tau,\varphi)(I - C_+(\varphi_\tau(\varphi)))f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau + \\ + X(t,\varphi)C_+(\varphi)D^+(\varphi)\times \\ \times\left\{\int_{-\infty}^0 C_-(\varphi)Y^\top(\tau,\varphi)f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^\infty (I - C_+(\varphi))Y^\top(\tau,\varphi)f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau\right\} - \\ - r(\varphi_t(\varphi)) \end{array}\right], & t \geq 0, \\ \left[\begin{array}{c} X(t,\varphi)(I - C_-(\varphi))P_D(\varphi)c + \\ + \int_{-\infty}^t X(t,\tau,\varphi)C_-(\varphi_\tau(\varphi))f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau - \\ - \int_t^0 X(t,\tau,\varphi)(I - C_-(\varphi_\tau(\varphi)))f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau + \\ + X(t,\varphi)(I - C_-(\varphi))D^+(\varphi)\times \\ \times\left\{\int_{-\infty}^0 C_-(\varphi)Y^\top(\tau,\varphi)f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^\infty (I - C_+(\varphi))Y^\top(\tau,\varphi)f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau\right\} - \\ - r(\varphi_t(\varphi)) \end{array}\right], & t \leq 0. \end{cases} \tag{12}$$

Оскільки $P_{D^\top}(\varphi)D(\varphi) = 0$, то $P_{D^\top}(\varphi)C_-(\varphi) = P_{D^\top}(\varphi)(I - C_+(\varphi))$. Тоді необхідна і достатня умова існування розв'язку системи (1) набирає вигляду

$$P_{D^\top}(\varphi)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} C_-(\varphi)Y^\top(\tau,\varphi)f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau \equiv 0. \tag{13}$$

Враховуючи те, що

$$[C_+(\varphi) - (I - C_-(\varphi))]\, D^+(\varphi) = I - P_{D^\top}(\varphi),$$

отримуємо

$$C_+(\varphi)D^+(\varphi)\,\{\dots\} - I\,\{\dots\} = (I - C_-(\varphi))D^+(\varphi)\,\{\dots\},$$

оскільки має місце умова (11), $\{\dots\}$ — вираз у (11).

Далі, оскільки $D(\varphi)P_D(\varphi) = [C_+(\varphi) - (I - C_-(\varphi))]\, P_D(\varphi) = 0$, то

$$C_+(\varphi)P_D(\varphi) = (I - C_-(\varphi)P_D(\varphi)).$$

Розглянемо випадок, коли однорідна система (3) не має нетривіальних обмежених на всій осі розв'язків, тобто виконується умова

$$C_+(\varphi)P_D(\varphi) = (I - C_-(\varphi))P_D(\varphi) = 0.$$

Тоді розв'язок (12) набере вигляду

$$x(t,\varphi) = \begin{cases} \left[\begin{array}{c} \displaystyle\int_0^t X(t,\tau,\varphi)C_+(\varphi_\tau(\varphi))f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau - \\ \displaystyle -\int_t^\infty X(t,\tau,\varphi)(I - C_+(\varphi_\tau(\varphi)))f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau + \\ +X(t,\varphi)C_+(\varphi)D^+(\varphi)\times \\ \displaystyle \times\left\{\int_{-\infty}^0 C_-(\varphi)Y^\top(\tau,\varphi)f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau + \right. \\ \displaystyle \left. +\int_0^\infty (I - C_+(\varphi))Y^\top(\tau,\varphi)f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau\right\} - \\ -r(\varphi_t(\varphi)) \end{array}\right], & t \geq 0, \\ \left[\begin{array}{c} \displaystyle\int_{-\infty}^t X(t,\tau,\varphi)C_-(\varphi_\tau(\varphi))f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau - \\ \displaystyle -\int_t^0 X(t,\tau,\varphi)(I - C_-(\varphi_\tau(\varphi)))f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau + \\ +X(t,\varphi)(C_+(\varphi)D^+(\varphi) - I)\times \\ \displaystyle \times\left\{\int_{-\infty}^0 C_-(\varphi)Y^\top(\tau,\varphi)f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau + \right. \\ \displaystyle \left. +\int_0^\infty (I - C_+(\varphi))Y^\top(\tau,\varphi)f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau\right\} - \\ -r(\varphi_t(\varphi)) \end{array}\right], & t \leq 0. \end{cases} \tag{14}$$

4. Умови існування інваріантного тора. Покажемо, що вираз

$$x(0,\varphi) = u(\varphi) = \left[\begin{array}{c} \displaystyle\int_{-\infty}^\infty G_0(\tau,\varphi)f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi))d\tau \\ -r(\varphi) \end{array}\right],$$

де

$$G_0(\tau,\varphi)=\begin{cases} C_+(\varphi)D^+(\varphi)\,C_-(\varphi)Y^\top(\tau,\varphi), & \tau<0,\\ (C_+(\varphi)D^+(\varphi)-I)(I-C_+(\varphi))Y^\top(\tau,\varphi), & \tau\geq 0,\end{cases} \tag{15}$$

отриманий із (14) при $t=0$, визначає при будь-якому $\varphi\in\mathcal{T}_m$ інваріантний тор системи (1). Як було показано, при виконанні умови (13) система (1) має обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок вигляду (14) при фіксованому $\varphi\in\mathcal{T}_m$. Покажемо, що умова (13) на розв'язках $\varphi_t(\varphi)$ відповідної задачі Коші визначає інваріантну множину. Для цього виконаємо заміну φ на $\varphi_t(\varphi)$ і покажемо, що умова (13) має місце для будь-яких $t\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathcal{T}_m$. Враховуючи співвідношення (9) і те, що рівності

$$\begin{gathered} X(t,\tau,\varphi_s(\varphi))=X(t+s,\tau+s,\varphi),\quad X(t,\tau,\varphi)X(\tau,s,\varphi)=X(t,s,\varphi),\\ (X(t,\tau,\varphi))^{-1}=X(\tau,t,\varphi),\quad \varphi_t(\varphi_s(\varphi))=\varphi_{t+s}(\varphi)\end{gathered} \tag{16}$$

справджуються для всіх $t,\tau,s\in\mathbb{R}$, $\varphi\in\mathcal{T}_m$, для матриці $D(\varphi)$ отримуємо рівність

$$D(\varphi_t(\varphi))=X(t,\varphi)D(\varphi)Y^\top(t,\varphi).$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що для будь-яких $t\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathcal{T}_m$ матриця

$$D^-(\varphi_t(\varphi))=\Big[X(t,\varphi)D(\varphi)Y^\top(t,\varphi)\Big]^-=X(t,\varphi)D^-(\varphi)Y^\top(t,\varphi)$$

є узагальнено-оберненою до матриці $D(\varphi_t(\varphi))$. З властивостей узагальнено-оберненої матриці отримуємо вирази для проекторів $P_D(\varphi_t(\varphi))$ та $P_{D^\top}(\varphi_t(\varphi))$ на ядро та коядро матриці $D(\varphi)$ на розв'язках $\varphi_t(\varphi)$ відповідної задачі Коші для будь-яких $t\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathcal{T}_m$:

$$\begin{gathered} P_D(\varphi_t(\varphi))=X(t,\varphi)P_D(\varphi)Y^\top(t,\varphi)=X(t,\varphi)\left[I-D^-(\varphi)D(\varphi)\right]Y^\top(t,\varphi),\\ P_{D^\top}(\varphi_t(\varphi))=X(t,\varphi)P_{D^\top}(\varphi)Y^\top(t,\varphi)=X(t,\varphi)\left[I-D(\varphi)D^-(\varphi)\right]Y^\top(t,\varphi).\end{gathered} \tag{17}$$

Проектори $P_D(\varphi)$ та $P_{D^\top}(\varphi)$ при фіксованому $\varphi\in\mathcal{T}_m$ вибирались як ортопроектори $P_D(\varphi)=P_D^\top(\varphi)$, але при заміні φ на $\varphi_t(\varphi)$ ці проектори втрачають властивість ортогонального проектування, тобто $P_D(\varphi_t(\varphi))\neq P_D^\top(\varphi_t(\varphi))$. Відповідно матриця $D^-(\varphi)$ в цьому випадку була псевдооберненою по Муру – Пенроузу, але на розв'язках $\varphi_t(\varphi)$ для будь-яких $t\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathcal{T}_m$ вона втрачає характерну властивість $[D(\varphi_t(\varphi))D^-(\varphi_t(\varphi))]^\top=$ $=D(\varphi_t(\varphi))D^-(\varphi_t(\varphi))$ псевдооберненої матриці і є однією з узагальнено-обернених матриць [5].

Таким чином, на підставі властивостей (9), (16), (17) для будь-яких $t\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathcal{T}_m$ маємо

$$P_{D^\top}(\varphi_t(\varphi))\int\limits_{-\infty}^{+\infty}C_-(\varphi_t(\varphi))Y^\top(\tau,\varphi_t(\varphi))f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi_t(\varphi)))d\tau=$$

$$=X(t,\varphi)P_{D^\top}(\varphi)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}C_-(\varphi)Y^\top(\tau+t,\varphi)f^{(1)}(\varphi_{\tau+t}(\varphi))d\tau=0.$$

Внаслідок експоненціальної дихотомії системи (3) на півосях інтеграл збігається. Будемо використовувати обмеженість матриці-проектора $\|P_{D^\top}(\varphi_t(\varphi))\| \leq K_0$ для будь-якого $\varphi \in \mathcal{T}_m$, а також нерівності (7). Дійсно, оскільки $P_{D^\top}(\varphi)C_-(\varphi) = P_{D^\top}(\varphi)(I - C_+(\varphi))$, із нерівностей (7) отримуємо оцінки

$$\left\| P_{D^\top}(\varphi) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C_-(\varphi) Y^\top(\tau,\varphi) f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \|P_{D^\top}(\varphi)\| \left\{ \int\limits_{-\infty}^{0} \left\| C_-(\varphi) Y^\top(\tau,\varphi) f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau \right\| + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{0}^{+\infty} \left\| (I - C_+(\varphi)) Y^\top(\tau,\varphi) f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau \right\| \right\} \leq$$

$$\leq K_0 \left(\frac{K_2}{\alpha_2} + \frac{K_1}{\alpha_1} \right) \|f^{(1)}(\varphi)\| = K \|f^{(1)}(\varphi)\|.$$

Далі покажемо, що вираз

$$u(\varphi) = \begin{bmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi) f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau \\ \\ -r(\varphi) \end{bmatrix} \tag{18}$$

визначає при умові (13), і тільки при ній, інваріантний тор системи (1) при будь-яких $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Покажемо, що інтеграли у виразі (18) є збіжними. З огляду на нерівності (7) розглянемо перші $n - s$ рядків виразу (18):

$$\left\| C_+(\varphi) D^+(\varphi) \int\limits_{-\infty}^{0} C_-(\varphi) Y^\top(\tau,\varphi) f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau + \left[C_+(\varphi) D^+(\varphi) - I \right] \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{0}^{\infty} (I - C_+(\varphi)) Y^\top(\tau,\varphi) f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau \right\| \leq \left[\frac{K_5 K_2}{\alpha_2} + \frac{K_6 K_1}{\alpha_1} \right] \left\| f^{(1)} \right\| \leq \bar{K} \left\| f^{(1)} \right\|,$$

де $\|C_+(\varphi)D^+(\varphi)\| = K_5$, $\|C_+(\varphi)D^+(\varphi) - I\| = K_6$. Тому, як і у [8], з умови $f^{(1)}(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ випливає, що $u(\varphi_t(\varphi))$ належить $C(\mathcal{T}_m)$. Належність інших s рядків виразу (18) до простору $C(\mathcal{T}_m)$ випливає з того, що $f^{(2)}(\varphi)$ належить $C^{l-1}(\mathcal{T}_m)$. З властивостей (7), (9), (15) випливає, що

$$u(\varphi_t(\varphi)) = \begin{bmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi) f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau \\ -r(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} G_t(\tau,\varphi) f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau \\ -r(\varphi_t(\varphi)) \end{bmatrix}$$

для будь-яких $t \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Останнє доводить, що $u(\varphi_t(\varphi)) \in C^1(\mathcal{T}_m)$, а множина $u(\varphi)$ визначає інваріантний тор системи (1).

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема 1. *Нехай система (3) експоненціально дихотомічна на півосях R_+ та R_- з проекторами $C_\pm(\varphi)$, які задовольняють на півосях нерівності (7), а на розв'язках $\varphi_t(\varphi)$ — властивості (9). Система (1) має інваріантний тор тоді і тільки тоді, коли $f^{(1)}(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ задовольняє умову (13). Якщо однорідна система (3) не має обмежених на всій осі розв'язків, тобто виконується умова*

$$C^+(\varphi)P_D(\varphi) = (I - C_-(\varphi))P_D(\varphi) \equiv 0,$$

то вираз

$$u(\varphi) = \begin{bmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi) f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau \\ -r(\varphi) \end{bmatrix},$$

отриманий із (14) при $t = 0$, визначає при будь-якому $\varphi \in \mathcal{T}_m$ єдиний інваріантний тор системи (1).

5. Збереження інваріантного тора. Однією з найбільш важливих проблем в якісній теорії багаточастотних коливань є проблема структурної стійкості інваріантного тора і збереження його при малих збуреннях [9]. Розглянемо можливість побудови функції Гріна – Самойленка для систем вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi),$$

$$\frac{dx_1}{dt} = M(\varphi)x_1 + f^{(1)}(\varphi), \quad f^{(1)}(\varphi) \in \mathbb{R}^{n-s}, \tag{19}$$

$$I\frac{dx_2}{dt} = x_2 + f^{(2)}(\varphi), \quad f^{(2)}(\varphi) \in \mathbb{R}^{s}.$$

Означення [10]. *Точку φ назвемо блукаючою, якщо існують її окіл $U(\varphi)$ і додатне число T такі, що*

$$U(\varphi) \cap \varphi_t(U(\varphi)) = 0 \quad \textit{для} \quad t \geq T. \tag{20}$$

Множину блукаючих точок позначимо через W, а множину неблукаючих точок – через $\Omega = \mathcal{T}_m \setminus W$. З компактності тора $\mathcal{T}_m$ випливає, що множина Ω є непорожньою та компактною [10].

Теорема 2. *Нехай в системі (19) $M(\varphi) = M_0 + M_1(\varphi)$, причому дійсні частини власних значень матриці M_0 від'ємні, а $\|M_1(\varphi)\| \leq \alpha \ \forall \varphi \in \Omega$, де Ω — множина неблукаючих точок динамічної системи*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi).$$

Тоді для достатньо малих α система має єдиний асимптотично стійкий інваріантний тор.

Доведення. Матрицант $\Omega^t_\tau(\varphi)$ системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{du}{dt} = (M_0 + M_1(\varphi))x_1, \tag{21}$$

залежної від $\varphi \in \mathcal{T}_m$ як від параметра, допускає зображення

$$\Omega^t_0(\varphi) = U^t_0 + \int\limits_0^t U^t_s M_1(\varphi_s(\varphi))\Omega^s_0 ds,$$

де U^t_0 — матрицант однорідної системи з сталими коефіцієнтами $\frac{dx_1}{dt} = M_0 x_1$. Оскільки матрицант $\left\|U^t_0\right\| \leq Ke^{-\gamma t}$, $t \geq 0$, для деяких $K \geq 1$, $\gamma > 0$, то

$$\left\|\Omega^t_0(\varphi)\right\| \leq Ke^{-\gamma t} + \int\limits_0^t Ke^{-\gamma(t-s)} \left\|M_1(\varphi_s(\varphi))\right\| \left\|\Omega^s_0(\varphi)\right\| ds, \quad t \geq 0,$$

$$e^{\gamma t}\left\|\Omega^t_0(\varphi)\right\| \leq K + K\int\limits_0^t \left\|M_1(\varphi_s(\varphi))\right\| e^{\gamma s} \left\|\Omega^s_0(\varphi)\right\| ds, \quad t \geq 0. \tag{22}$$

Позначимо через $U_\varepsilon(\Omega)$ ε-окіл множини Ω і покажемо, що для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ і довільного $\varphi \in \mathcal{T}_m$ існує скінченний момент часу $T > 0$, не залежний від φ, такий, що для моментів часу $t \geq T$ півтраєкторія $\varphi_t(\varphi)$ належить $U_\varepsilon(\Omega)$.

Дійсно, оскільки $\mathcal{T}_m$ — компактна, а $U_\varepsilon(\Omega)$ — відкрита множини, то множина $\mathcal{T}_m \setminus U_\varepsilon(\Omega)$ є компактною і складається з блукаючих точок. Тому для кожної точки $\varphi \in \mathcal{T}_m \setminus U_\varepsilon(\Omega)$ знайдеться окіл $U(\varphi)$, який задовольняє умову (20) для $t \geq T(\varphi)$. Внаслідок компактності фазового простору виберемо з цих околів скінченну кількість $U_1, U_2, \ldots, U_N$ так, щоб $\sum_{k=1}^N U_k = \mathcal{T}_m \setminus U_\varepsilon(\Omega)$, і позначимо відповідні числа $T(\varphi)$ через $T_1, T_2, \ldots, T_N$.

Нехай довільна точка $\varphi \in \mathcal{T}_m - U_\varepsilon(\Omega)$ входить в окіл U_{n_1}. Згідно з (20) за час, що не перевищує T_{n_1}, вона вийде з нього назавжди. Нехай вона потрапить в окіл U_{n_2}. З цього околу вона вийде за час, який не перевищує T_{n_2}, і т. д. Нарешті, за час, що не перевищує $\sum_{k=1}^N T_k$, точка обов'язково потрапить в $U_\varepsilon(\Omega)$, оскільки повернутися в один з околів U_i, $i = 1, ..., N$, вона не може згідно з (20).

Отже, час перебування точки φ в $\mathcal{T}_m \setminus U_\varepsilon(\Omega)$ не може перевищувати $T = \sum_{k=1}^N T_k$. Оскільки матриця $M_1(\varphi)$ належить $C(\mathcal{T}_m)$, то для довільного фіксованого $\eta > 0$ існує скінченний момент часу $T > 0$, не залежний від φ і такий, що $\left\|M_1(\varphi_t(\varphi))\right\| \leq \delta + \eta$ для будь-якого $t \geq T$.

Застосувавши до (22) нерівність Гронуолла – Беллмана, отримаємо

$$e^{\gamma t}\left\|\Omega^t_0(\varphi)\right\| \leq Ke^{K\int\limits_0^t \|M_1(\varphi_s(\varphi))\|ds} \leq Ke^{K\int\limits_0^T \|M_1(\varphi_s(\varphi))\|ds} e^{K\int\limits_T^t \|M_1(\varphi_s(\varphi))\|ds}, \quad t \geq T.$$

Позначивши $K_1 = Ke^{K\int\limits_0^T \|M_1(\varphi_s(\varphi))\|ds}$, одержимо

$$e^{\gamma t}\left\|\Omega^t_0(\varphi)\right\| \leq K_1 e^{K\int\limits_T^t \|M_1(\varphi_s(\varphi))\|ds} \leq K_1 e^{K(\delta+\eta)\int\limits_T^t ds} \leq K_1 e^{K(\delta+\eta)t}, \quad t \geq 0.$$

Остаточно будемо мати $\left\|\Omega_0^t(\varphi)\right\| \leq K_0 e^{-(\gamma - K\delta - k\eta)t}, \quad t \geq 0$. Покладемо $\delta < \dfrac{\gamma}{K}$ і виберемо η так, щоб $\gamma_0 = \gamma - K\delta - K\eta > 0$.

Отже, ми довели, що існують такі сталі $K_0 \geq 1$ і $\gamma_0 > 0$, що матрицант системи (21) задовольняє нерівності

$$\left\|\Omega_0^t(\varphi)\right\| \leq K_0 e^{-\gamma_0 t}, \quad t \geq 0. \tag{23}$$

З (23) випливає, що функція

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi), & \tau \leq 0, \\ 0, & \tau > 0, \end{cases}$$

задовольняє оцінку $\|G_0(\tau, \varphi)\| \leq K_0 e^{-\gamma_0 |\tau|}$, $\tau \in \mathbb{R}$, і є функцією Гріна – Самойленка задачі про інваріантні тори.

Отже, система (19) має асимптотично стійкий інваріантний тороїдальний многовид, який визначається співвідношенням

$$x = u(\varphi) = \begin{bmatrix} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} G_0(\tau, \varphi) f^{(1)}(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau \\ -r(\varphi) \end{bmatrix}, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m.$$

Теорему 2 доведено.

Література

1. *Campbell S., Petzold L.* Canonical forms and solvable singular systems of differential equations // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. — 1983. — **4**. — P. 517 – 521.
2. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
3. *Чистяков В. Ф., Щеглова А. А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. — Новосибирск: Наука, 2003. — 320 с.
4. *Бояринцев Ю. Е., Данилов В. А., Логинов А. А., Чистяков В. Ф.* Численные методы решения сингулярных систем. — Новосибирск: Наука, 1989. — 223 с.
5. *Бойчук А. А.* Критерий существования единственного инвариантного тора линейного расширения динамических систем // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 1. — С. 3 – 13.
6. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 317 p.
7. *Boichuk A., Langerová M., Růžičková M., Voitushenko E.* System of differential equations with pulse actions // Adv. Difference Equat. — 2013.
8. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
9. *Перестюк М. О., Фекета П. В.* Про збереження інваріантного тора багаточастотних систем // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 11. — С. 1498 – 1505.
10. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.: ОГИЗ, 1947. — 448 с.

Одержано 27.10.15