

## ПЕРЕРОЗПОДІЛ ЕНЕРГІЇ МІЖ РЕЗЕРВУАРОМ І РІДИНОЮ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ ПРИ КУТОВИХ РУХАХ СИСТЕМИ

**О. С. Лимарченко, К. О. Семенович**

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка  
просп. Глушкова, 4е, Київ, 01033, Україна  
e-mail: olelim2010@yahoo.com  
kateryna.semenovych@gmail.com

*The dynamics of a cylindrical tank on the pendulum suspension, partially filled with an ideal liquid, is considered. Initially the reservoir is inclined at some angle. The redistribution of kinetic energy in the system was investigated and analyzed component-wise for different modes of motion in the considered system. The attenuation of surface sloshing processes is explained. The obtained results qualitatively coincide with experimental data.*

*Рассматривается задача о движении цилиндрического резервуара с жидкостью на маятниковом подвесе. В начальный момент времени резервуар отклонен от положения равновесия на некоторый угол. Исследовано перераспределение кинетической энергии в системе и объяснено угасание поверхностного волнового движения. Полученные результаты качественно совпадают с экспериментальными данными.*

**1. Вступ.** Розглядається рух системи циліндричний резервуар-рідина з вільною поверхнею при маятниковому підвісі резервуара. В початковий момент часу резервуар відхилено від положення рівноваги на деякий кут, система знаходиться у стані спокою. При дослідженні такої задачі цікавим виявився ефект перерозподілу енергії між різними формами руху системи. Спочатку це явище було виявлено експериментально [4]. На початку руху системи на поверхні рідини були помітні значні поверхневі хвилі, які протягом 5–7 періодів коливань дослідного резервуара згасали, далі рідина в резервуарі рухалась переважно квазітвердим чином. Для аналізу вказаного явища було побудовано математичну модель та проведено серію числових експериментів, які підтвердили наявність такого перерозподілу енергії.

**2. Експеримент.** Було проведено лабораторний дослід по вивченню поведінки резервуара на маятниковому підвісі [4]. Установка являє собою маятниковий підвіс, на якому закріплено циліндричний резервуар радіуса  $R = 0,0775$  м, заповнений водою до рівня  $H = R$ . Експеримент було проведено для різних довжин маятникового підвісу системи. Було вивчено випадок кінематичного збурення руху системи. Спостереження за рухом вільної поверхні рідини проводилися з використанням поплавка. Експериментально було встановлено, що за 5–7 періодів коливань резервуара перехідні процеси на вільній поверхні рідини спадають і відбуваються лише квазітвердий рух резервуара з рідиною і коливання рідини в протифазі з рухом резервуара, тобто тип рухів, який визначається потенціалом Стокса–Жуковського; хвильовий рух практично відсутній. Аналіз отриманих результатів дозволяє припустити, що вказане явище може бути обумовлене перерозподілом енергії між хвильовою та квазітвердою кутовою формами руху в системі резервуар-

рідина. Для підтвердження або спростування даної гіпотези і вивчення характеру енергообміну в системі було побудовано математичну модель системи та проведено низку числових експериментів.

**3. Математичне моделювання системи.** Для дослідження задачі використаємо математичну модель системи [1]. Згідно з введеними припущеннями, розглядається ідеальна однорідна нестислива рідина, а її рух вважається безвихровим. Метод ґрунтується на формулюванні задачі у формі варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського та використанні методу Канторовича з попереднім вилученням кінематичних граничних умов на вільній поверхні рідини для побудови дискретної моделі системи. Для отримання числових результатів було розглянуто апробовану раніше модель [1], в якій береться до уваги 12 форм коливань рідини. В початковий момент часу резервуар відхилений від положення рівноваги на деякий кут, рідина знаходиться у стані спокою. Зазначимо, що початкове відхилення повинно бути таким, щоб максимальні амплітуди коливань вільної поверхні рідини знаходилися в діапазоні  $0, 2R \div 0, 3R$ , де  $R$  — радіус резервуара (що обумовлено межами застосування нелінійної теорії коливань рідини з вільною поверхнею, побудованої на основі ідей методів збурень). Для побудови нелінійної дискретної моделі системи резервуар-рідина з вільною поверхнею було введено наступні узагальнені координати:  $a_i$  — амплітуди збудження форм коливань рідини;  $\alpha_i$  — кути відхилення резервуара;  $\varepsilon_i$  — параметри поступального руху резервуара.

Математично задачу про рух системи циліндричний резервуар-рідина з вільною поверхнею сформульовано як сукупність вимог кінематичного характеру, рівнянь руху і початкових умов. До кінематичних умов відносяться: вимога нерозривності потоку в області  $\tau$

$$\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\vec{\Omega} = 0, \text{ в } \tau,$$

умова неперетікання на межі контакту резервуар-рідина  $\Sigma$  з одиничною зовнішньою нормаллю  $\vec{n}$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma + S_0$$

і умова неперетікання через вільну поверхню рідини

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_0}{\partial z} + \vec{\nabla}\xi \cdot \left[ \vec{\nabla}\varphi_0 + \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}) - \dot{\vec{\varepsilon}} - \vec{\omega} \times \vec{r} \right] = \\ = \frac{\partial\varphi_0}{\partial z} + \vec{\omega} \cdot \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial z} - \dot{\varepsilon}_z - (\vec{\omega} \times \vec{r})|_z \text{ на } S_\xi. \end{aligned}$$

Функція Лагранжа для системи резервуар-рідина з вільною поверхнею має такий вигляд:

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} \left[ \vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}) \right]^2 d\tau + \frac{1}{2} M_r \left( \dot{\vec{\varepsilon}} \right)^2 + \frac{1}{2} I_{\text{res}}^{ij} \omega_i \omega_j - (M_r + M_l) g \varepsilon_z + \\ + \rho g (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \int_{S_0} r \cos \theta (\xi + H) dS - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \rho g (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) \int_{S_0} r \sin \theta (\xi + H) dS - \\
 & - \frac{1}{2} \rho g \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \int_{S_0} \xi^2 dS - (M_l h_l + M_r h_r) (1 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2) - \\
 & - \sigma \int_{S_0} \sqrt{1 + (\vec{\nabla} \xi)^2} dS - \sigma \cos \theta_1 \int_{L_0} \xi dl + \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{M} \cdot \vec{\chi}.
 \end{aligned}$$

Розв'язок задачі шукатимемо у вигляді

$$\begin{aligned}
 \xi &= \sum_n a_n(t) \psi_n(x, y), \\
 \varphi &= \sum_n b_n(t) \psi_n(x, y) \frac{\operatorname{ch} \varkappa_n(z + H)}{\varkappa_n \operatorname{sh} \varkappa_n H}, \\
 \vec{\Omega} &= \vec{\Omega}_0 + \sum_n \vec{q}_n(t) \psi_n(x, y) \frac{\operatorname{ch} \varkappa_n(z + H)}{\varkappa_n \operatorname{sh} \varkappa_n H},
 \end{aligned}$$

де  $\psi_n(x, y)$  — повна ортогональна система функцій, яка є розв'язком лінійної задачі в розглядуваній області.

Рівняння руху системи в параметрах  $a_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\varepsilon_i$  можна записати у вигляді

$$\sum_{n=1}^N p_{rn} \ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn} \ddot{\varepsilon}_{n-N} + \sum_{n=N+4}^{N+6} p_{rn} \ddot{\alpha}_{n-N-3} = q_r, \quad r = \overline{1, N+6},$$

де  $p_{rn}$  — квадратна матриця, а  $q_r$  — вектор розмірності  $N + 6$ .

Елементи матриці та вектора залежать від форм коливань  $\psi_i$  та векторного потенціалу Стокса – Жуковського, який у випадку циліндричного резервуара визначено у роботі [2]. За рахунок вибору системи координат з центром у точці підвісу в задачі, що вивчається, відсутні поступальні рухи резервуара, тому її розмірність скорочується до  $N + 3$ .

Щоб проаналізувати, чи дійсно відбувається в системі перерозподіл енергії між різними формами руху, було розглянуто зміну в часі складових кінетичної енергії системи, які відповідають різним формам руху. Для випадку кутового руху резервуара, частково заповненого рідиною, кінетичну енергію системи в дискретному вигляді можна записати так:

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Тут  $T_1$  — складова кінетичної енергії системи, яка відповідає хвильовому руху на вільній поверхні рідини і виражається таким чином (далі використано позначення коефіцієнтів рівнянь руху, введені в роботі [1]):

$$T_1 = \frac{1}{2} \rho \sum_i \dot{a}_i^2 \alpha_i^\nu + \frac{1}{2} \rho \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \gamma_{ijk}^\nu + \frac{1}{2} \rho \sum_{i,j,k,l} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k a_l \delta_{ijkl}^\nu,$$

$T_2$  — складова кінетичної енергії системи, яка відповідає квазітвердому кутовому рухові:

$$T_2 = \frac{1}{2} \rho \sum_{p,s=1}^3 \omega_p \omega_s \left( I_{\text{res}}^{ps} / \rho + E_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right),$$

$T_3$  — складова кінетичної енергії системи, що відображає зв'язок хвильового та квазітвердого кутового рухів системи:

$$T_3 = \frac{1}{2} \rho \sum_{p=1}^3 \omega_p \left( \sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right).$$

Подальший аналіз виконується на основі числового моделювання. Розглянуто поведінку системи резервуар-рідина при початковому куті відхилення резервуара від вертикалі  $\frac{\pi}{15}$ . Виявилось, що застосування лінійної теорії для нев'язкої рідини (що відповідає значенню параметра зміни в'язкості через дотримання критеріїв подібності і розмірності  $k_\nu = 0$ ) не моделює ті ефекти, які спостерігаються під час експерименту: коливання на вільній поверхні впродовж усього часу розгляду не згасають, характер руху системи не змінюється. У зв'язку з цим було розглянуто задачу з використанням підходу [3], в основу якого покладено теорію примежового шару з використанням модельного розв'язку, що дозволяє врахувати узагальнену дисипацію. Для збереження подібності системи в числових розрахунках та фактичної в експерименті коефіцієнт було вибрано, виходячи з аналізу значень чисел Рейнольдса.

На основі методів теорії подібності розглянемо параметри експериментального резервуара та моделі. В обчисленнях вважалось, що  $R = 1$  м, фактичний радіус резервуара в експериментальній установці становить  $R = 0,0775$  м. Таким чином, маємо відношення одиничного радіуса розрахункового резервуара до радіуса експериментального бака  $k_\nu = \left(\frac{100}{8}\right)^{3/2} \approx 46$ . Отже, для збереження подібності між експериментальною установкою та розглядуваною моделлю потрібно врахувати коефіцієнт підсилення в'язкості  $k_\nu = 46$ . Для повного аналізу задачі було отримано дані для різних значень цього коефіцієнта. На рис. 1–3 побудовано графіки зміни в часі складових кінетичної енергії системи для випадків  $k_\nu = 0$  (а) та  $k_\nu = 46$  (б).

Аналогічні графіки зміни в часі повної кінетичної енергії для значень коефіцієнта корекції в'язкості  $k_\nu = 0$  (а) та  $k_\nu = 46$  (б) побудовано на рис. 4.

Для випадку руху системи без введення коефіцієнта корекції в'язкості ( $k_\nu = 0$ ) перерозподіл енергії не спостерігається. Впродовж всього часу характер руху системи практично не змінюється. На рис. 5 наведено графіки зміни в часі кута відхилення резервуара від вертикалі, а на рис. 6 — першої антисиметричної та першої осесиметричної форм коливань рідини для випадку  $k_\nu = 46$ .

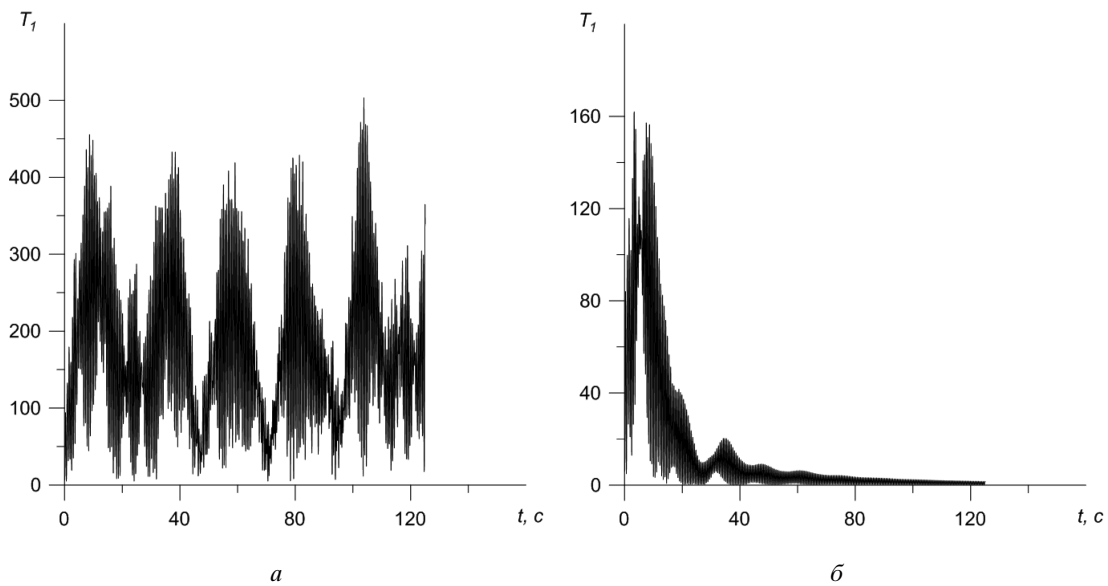


Рис. 1. Зміна в часі складової кінетичної енергії  $T_1$ .

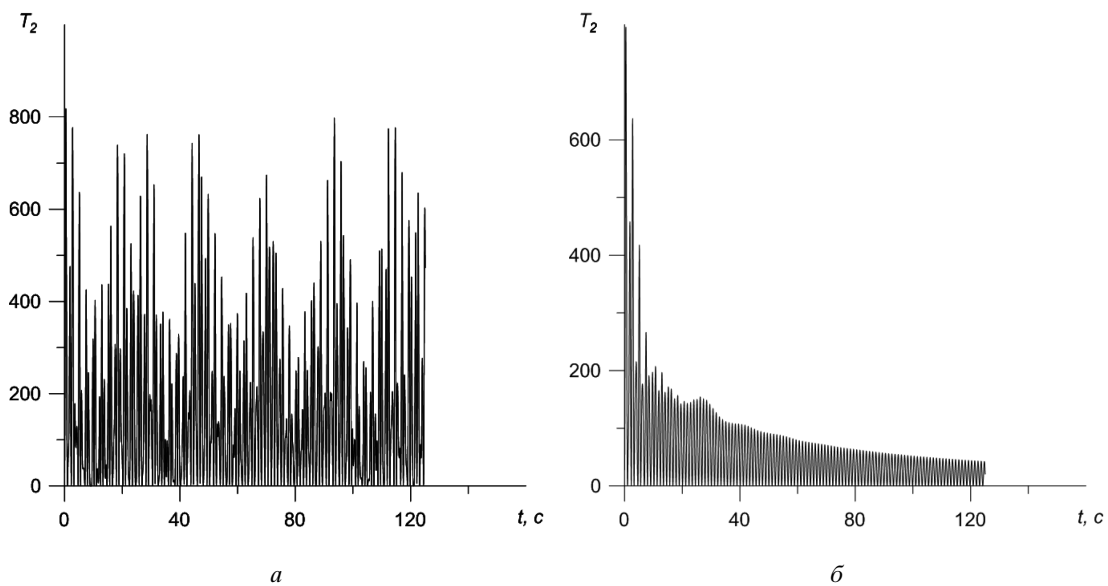
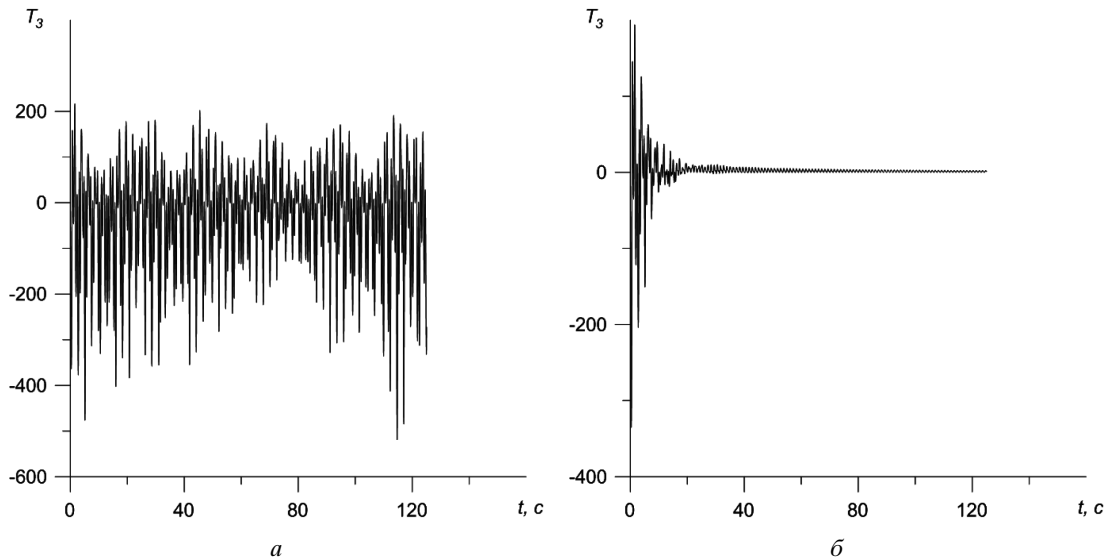
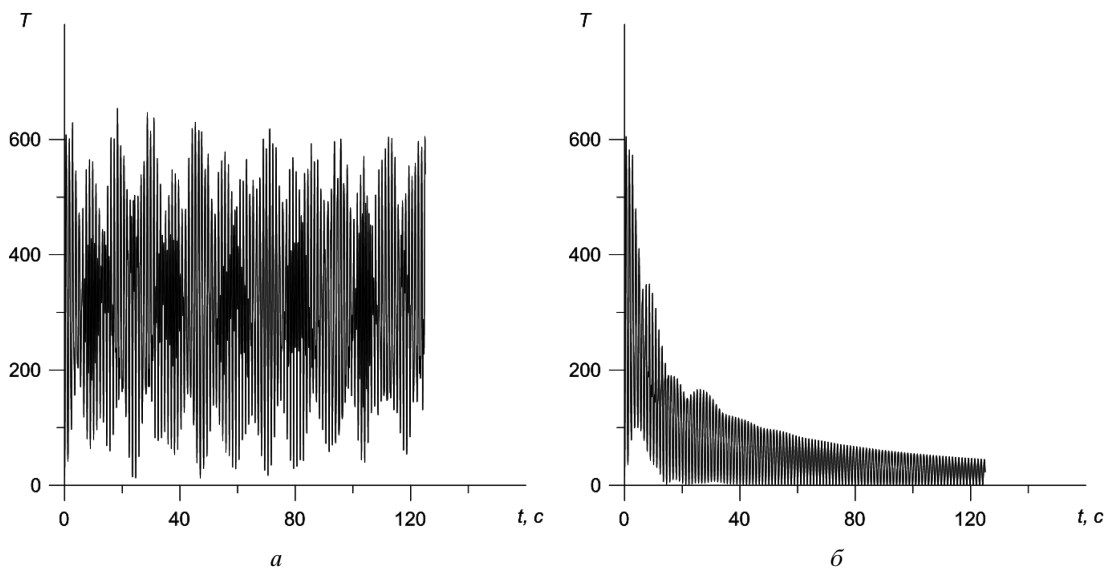


Рис. 2. Зміна в часі складової кінетичної енергії  $T_2$ .

По характеру зміни амплітудних параметрів чітко видно, що після певного перехідного періоду амплітуди коливань рідини значно спадають і виходять на повільно згасаючий впорядкований режим руху. Цю тенденцію також демонструє графік другої складової кінетичної енергії (кінетичної енергії, пов'язаної із квазітвердим рухом системи) для випадку руху системи з урахуванням коефіцієнта корекції в'язкості.

Рис. 3. Зміна в часі складової кінетичної енергії  $T_3$ .Рис. 4. Зміна в часі повної кінетичної енергії  $T$ .

Розглядалася також поведінка системи для інших значень коефіцієнта зміни в'язкості, зокрема для  $k_\nu = 30$ . При таких параметрах в системі спостерігається подібна поведінка, відбувається перерозподіл енергії та вихід на квазіусталений режим руху системи з практичною відсутністю хвильового руху на вільній поверхні рідини. Відмінність полягає у тривалості перехідного процесу: кількість періодів коливань резервуара для проходження перехідного процесу в експериментальній системі та модельованій з  $k_\nu = 46$  практично збігається, у випадку  $k_\nu = 30$  перехідний процес є довшим, ніж спостережений під час експерименту.

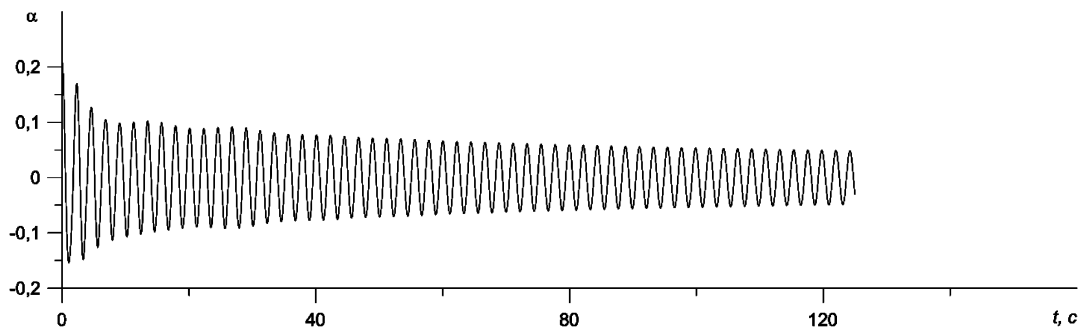


Рис. 5. Зміна в часі кута відхилення резервуара від вертикалі  $\alpha$ .

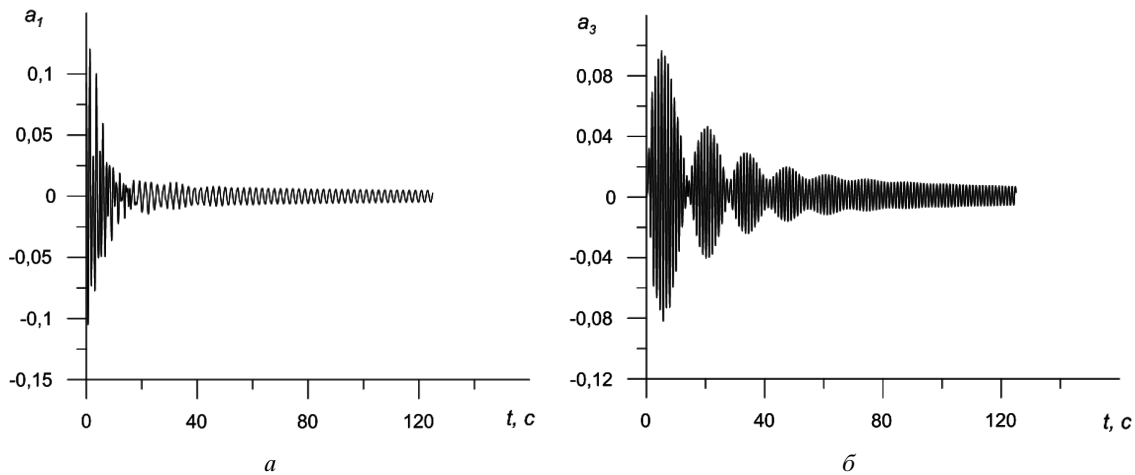


Рис. 6. Зміна в часі першої антисиметричної (а) та першої осесиметричної (б) форм коливань рідини.

**Висновки.** Проведено моделювання руху системи резервуар-рідина на маятниковому підвісі для випадку кінематичного збурення руху системи. Проведено співставлення результатів числового моделювання і даних експерименту на лабораторній установці. Показано, що лише на основі нелінійної моделі з введенням дисипації (в'язкості) вдається досягти узгодження з експериментальними даними. Для значення коефіцієнта корекції в'язкості  $k_\nu = 46$ , визначеного на основі критеріїв подібності і розмірності, дійсно має місце ефект перерозподілу енергії між хвильовим та квазітвердим кутовим рухом. Складова кінетичної енергії системи, яка відповідає хвильовому руху рідини, згасає впродовж декількох періодів коливання резервуара. Водночас згасає і складова кінетичної енергії, яка відображає зв'язок між хвильовою та квазітвердою формами рухів. Натомість складова енергії, що відповідає квазітвердому кутовому рухові системи, помітно зменшується, але прямує до сталого ненульового значення. Отримані результати підтверджують спостережуваний під час експерименту ефект перерозподілу енергії між різними формами руху в системі. Крім того, вони свідчать про ефективність прийнятих методів моделювання задач динаміки сумісного руху резервуара з рідиною з вільною поверхнею при кутових рухах системи.

**Література**

1. *Limarchenko O., Matarazzo G., Yasinsky V.* Rotational motion of structures with tanks, partially filled by liquid. — Kyiv: FADA Ltd, 2003. — 286 p.
2. *Abgaryan K., Rappoport I.* Dynamics of rockets. — Moscow: Mashinostroenie, 1969. — 378 p.
3. *Mikishev G.* Experimental methods in dynamics of spacecraft. — Moscow: Mashinostroenie, 1978. — 248 p.
4. *Limarchenko O., Semenovych K.* Combined motion of the system reservoir-liquid on pendulum suspension under impulse excitation // Bull. Taras Shevchenko Nat. Univ. Kyiv. Ser. Phys. and Math. — 2013. — № 2.

*Одержано 15.06.15*