УДК 517.9

ПРО НЕПЕРЕРВНІ ПРИ $t \in \Re$ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Т. О. Єрьоміна

Нац. техн. ун-т України „КПІ"
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна

For a broad class of systems of nonlinear functional equations, we find conditions for existence and uniqueness of a continuous solution. A method for constructing such solutions and studying their properties for $\varepsilon \to 0$ is also proposed.

Получены условия существования и единственности непрерывного решения широкого класса систем нелинейных функциональных уравнений, разработан метод построения таких решений и исследованы их свойства при $\varepsilon \to 0$.

Розглянемо систему нелінійних функціональних рівнянь вигляду

$$x\,(qt) = F\,(t, x\,(t)\,, x\,(t + f_1\,(t, x\,(t)))\,, \ldots, x\,(t + f_k\,(t, x\,(t)))\,, \varepsilon)\,, \tag{1}$$

де $t \in \Re$, $q = \mathrm{const} \neq 0, 1$, $\varepsilon << 1$, окремі класи яких вивчалися багатьма математиками. На сьогодні ряд важливих проблем їх теорії досить детально досліджено (див. [1 – 5] і наведену в них бібліографію). Це, зокрема, стосується вивчення питань існування та єдиності різного роду розв'язків, які досліджуються і в даній роботі. Метою даної роботи є вивчення питань існування та єдиності неперервних розв'язків системи нелінійних функціональних рівнянь (1) у випадку, коли виконуються такі умови:

1) вектор-функція $F\left(t, x^0, x^1, \ldots, x^k, \varepsilon\right)$ і функції $f_i\,(t, x)\,, i = 1, 2, \ldots, k$, є неперервними при всіх $t \in \Re$, $x^i \in \Re^n$, $i = 0, 1, \ldots, k$, $x \in \Re^n$, і має місце співвідношення

$$\sup_{t \in \Re} |F\,(t, 0, \ldots, 0, \varepsilon)| = M < +\infty;$$

2) вектор-функція $F\left(t, x^0, x^1, \ldots, x^k, \varepsilon\right)$ і функції $f_i(t, x)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, задовольняють умови

$$\left|F\left(\bar{t}, \bar{x}^0, \bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^k, \varepsilon\right) - F\left(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}^0, \bar{\bar{x}}^1, \ldots, \bar{\bar{x}}^k, \varepsilon\right)\right| \le L_0 \left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| + L \sum_{i=1}^{k} \left|\bar{x}^i - \bar{\bar{x}}^i\right|, \tag{2}$$

$$\left|f_i\,(\bar{t}, \bar{x}) - f_i\left(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}\right)\right| \le l_i' \left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| + l_i'' \left|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\right|, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{3}$$

де $L_0, L, l_i', l_i'', i = 1, 2, \ldots, k,$ — деякі додатні сталі, $\left(\bar{t}, \bar{x}^0, \bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^k, \varepsilon\right), \left(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}^0, \bar{\bar{x}}^1, \ldots, \bar{\bar{x}}^k, \varepsilon\right) \in \Re \times \Re^{kn}$;

3) при достатньо малих L_0, L, l_i', l_i'', $i = 1, 2, \ldots, k$, виконуються співвідношення

$$\frac{L_0}{ql} + \frac{L}{q}\left(k + 1 + [l^* + l^* l]k\right) \leq 1,$$

$$L\left[k + 1 + ll^* k\right] = \theta < 1,$$

де $l^* = \max\left\{l_i', l_i''\right\}, l > 0$.

Поклавши в (1) $\varepsilon = 0$, отримаємо систему рівнянь

$$x\left(qt\right) = F\left(t, x\left(t\right), x\left(t + f_1\left(t, x\left(t\right)\right)\right), \ldots, x\left(t + f_k\left(t, x\left(t\right)\right)\right), 0\right), \tag{4}$$

для якої доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1 – 3. Тоді система рівнянь (4) має єдиний неперервний розв'язок, що задовольняє умову*

$$\left|x(\bar{t}) - x(\bar{\bar{t}})\right| \leq l\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right|, \tag{5}$$

де $\bar{t}, \bar{\bar{t}} \in \Re$, l — деяка додатна стала.

Доведення. Розглянемо послідовність функцій

$$x_0(t) = 0, \tag{6_0}$$

$$x_m\left(t\right) = F\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right), x_{m-1}\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right), \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, x_{m-1}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right), 0\right), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{6_m}$$

За допомогою методу математичної індукції можна показати, що функції $x_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, є неперервними при $t \in \Re$. Більш того, доведемо, що при $t \in \Re$ і всіх $m \geq 0$ виконуються нерівності

$$|x_m(t)| \leq M', \tag{7}$$

$$\left|x_m(\bar{t}) - x_m(\bar{\bar{t}})\right| \leq l\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right|, \tag{8}$$

де $M' > M$ та l — деяка додатна стала.

Дійсно, оскільки $x_0(t) = 0$, маємо

$$\left|x_0(\bar{t}) - x_0(\bar{\bar{t}})\right| = 0.$$

Згідно з (6_1) отримуємо

$$|x_1(t)| = \left|F\left(q^{-1}t, x_0(q^{-1}t), x_0\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, x_0(q^{-1}t)\right)\right), \ldots\right.\right.$$
$$\left.\left.\ldots, x_0\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, x_0\left(q^{-1}t\right)\right)\right), 0\right)\right| \leq \left|F\left(q^{-1}t, 0, \ldots, 0, 0\right)\right| \leq M < M',$$

$$\begin{aligned}\left|x_1(\bar t)-x_1(\bar{\bar t})\right| \le |F&\left(q^{-1}\bar t, x_0\left(q^{-1}\bar t\right), x_0\left(q^{-1}\bar t+f_1\left(q^{-1}\bar t, x_0\left(q^{-1}\bar t\right)\right)\right),\ldots\right.\\
&\ldots, x_0\left(q^{-1}\bar t+f_k\left(q^{-1}\bar t, x_0\left(q^{-1}\bar t\right)\right)\right),0\big)-\\
&-F\left(q^{-1}\bar{\bar t}, x_0\left(q^{-1}\bar{\bar t}\right), x_0\left(q^{-1}\bar{\bar t}+f_1\left(q^{-1}\bar{\bar t}, x_0\left(q^{-1}\bar{\bar t}\right)\right)\right),\ldots\right.\\
&\ldots, x_0\left(q^{-1}\bar{\bar t}+f_k\left(q^{-1}\bar{\bar t}, x_0\left(q^{-1}\bar{\bar t}\right)\right)\right),0\big)\big| \le\\
&\le \left|F\left(q^{-1}\bar t,0,0,\ldots,0,0\right)-F\left(q^{-1}\bar{\bar t},0,0,\ldots,0,0\right)\right| \le\\
&\le L_0\left|q^{-1}\bar t-q^{-1}\bar{\bar t}\right| \le \frac{L_0}{q}\left|\bar t-\bar{\bar t}\right| \le l\,\frac{L_0}{ql}\left|\bar t-\bar{\bar t}\right| \le l\left|\bar t-\bar{\bar t}\right|.\end{aligned}$$

Припустимо, що функції $x_n(t)$, $n = 0, 1, \ldots, m-1$, які визначені співвідношеннями (6_m), задовольняють нерівності (7), (8). Тоді згідно з (6_m), (7) та умовами теореми одержимо

$$\begin{aligned}|x_m(t)| \le &\left|F\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right), x_{m-1}\left(q^{-1}t+f_1\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right),\ldots\right.\right.\\
&\ldots, x_{m-1}\left(q^{-1}t+f_k\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right),0\big)-F\left(q^{-1}t,0,\ldots,0,0\right)\big|+\\
&+\left|F\left(q^{-1}t,0,\ldots,0,0\right)\right| \le\\
&\le L\left(\left|x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right|+\left|x_{m-1}\left(q^{-1}t+f_1\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right)\right|+\ldots\right.\\
&\ldots+\left.\left|x_{m-1}\left(q^{-1}t+f_k\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right)\right|\right)+M \le\\
&\le LM'(k+1)+M \le M'\left(L(k+1)+\frac{M}{M'}\right) \le M',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|x_m(\bar t)-x_m(\bar{\bar t})\right| \le |F&\left(q^{-1}\bar t, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar t\right), x_{m-1}\left(q^{-1}\bar t+f_1\left(q^{-1}\bar t, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar t\right)\right)\right),\ldots\right.\\
&\ldots, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar t+f_k\left(q^{-1}\bar t, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar t\right)\right)\right),0\big)-\\
&-F\left(q^{-1}\bar{\bar t}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar t}\right), x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar t}+f_1\left(q^{-1}\bar{\bar t}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar t}\right)\right)\right),\ldots\right.\\
&\ldots, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar t}+f_k\left(q^{-1}\bar{\bar t}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar t}\right)\right)\right),0\big)\big| \le\\
&\le L_0\left|q^{-1}\bar t-q^{-1}\bar{\bar t}\right|+L\left(\left|x_{m-1}\left(q^{-1}\bar t\right)-x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar t}\right)\right|+\right.\\
&+\left|x_{m-1}\left(q^{-1}\bar t+f_1\left(q^{-1}\bar t, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar t\right)\right)\right)-\right.\\
&-\left.x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar t}+f_1\left(q^{-1}\bar{\bar t}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar t}\right)\right)\right)\right|+\ldots\\
&\ldots+\left|x_{m-1}(q^{-1}\bar t+f_k(q^{-1}\bar t, x_{m-1}(q^{-1}\bar t)))-\right.\\
&-\left.\left.x_{m-1}(q^{-1}\bar{\bar t}+f_k(q^{-1}\bar{\bar t}, x_{m-1}(q^{-1}\bar{\bar t})))\right|\right) \le\\
&\le L_0\left|q^{-1}\bar t-q^{-1}\bar{\bar t}\right|+L\left(l\left|q^{-1}\bar t-q^{-1}\bar{\bar t}\right|+\right.\end{aligned}$$

$$+ l\left|q^{-1}\bar{t} + f_1\left(q^{-1}\bar{t}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t}\right)\right) - q^{-1}\bar{\bar{t}} - f_1\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right)\right)\right| + \ldots$$

$$\ldots + l\left|q^{-1}\bar{t} + f_k\left(q^{-1}\bar{t}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t}\right)\right) - q^{-1}\bar{\bar{t}} - f_k\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right)\right)\right|\Big) \le$$

$$\le L_0\left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right| + Ll\left(\left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right| + \left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right| +\right.$$

$$+ \left|f_1\left(q^{-1}\bar{t}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t}\right)\right) - f_1\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right)\right)\right| + \ldots$$

$$\ldots + \left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right| + \left|f_k\left(q^{-1}\bar{t}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t}\right)\right) - f_k\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right)\right)\right|\Big) \le$$

$$\le L_0\left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right| + Ll\left(\left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|(k+1) +\right.$$

$$+ \left|f_1\left(q^{-1}\bar{t}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t}\right)\right) - f_1\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right)\right)\right| + \ldots$$

$$\ldots + \left|f_k\left(q^{-1}\bar{t}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t}\right)\right) - f_k\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right)\right)\right|\Big) \le$$

$$\le L_0\left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right| + Ll\Bigg(\left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|(k+1) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k}\left|f_i\left(q^{-1}\bar{t}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t}\right)\right) - f_i\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right)\right)\right|\Bigg) \le$$

$$\le L_0\left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right| + Ll\Bigg(\left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|(k+1) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k}\left[l_i'\left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right| + l_i''\left|x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t}\right) - x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right)\right|\right]\Bigg) \le$$

$$\le \frac{L_0}{q}\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| + Ll\left(\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right|\frac{k+1}{q} + \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{l_i'}{q}\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| + \frac{l_i''}{q}l\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right|\right]\right) \le$$

$$\le \frac{L_0}{q}\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| + \frac{L}{q}l\left(\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right|(k+1) + \sum_{i=1}^{k}\left[l_i' + l_i''l\right]\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right|\right) \le$$

$$\le \left[\frac{L_0}{q} + \frac{L}{q}l\left(k + 1 + \sum_{i=1}^{k}\left[l_i' + l_i''l\right]\right)\right]\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| \le$$

$$\le \frac{l}{q}\left[\frac{L_0}{l} + L\left(k + 1 + \sum_{i=1}^{k}\left[l_i' + l_i''l\right]\right)\right]\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| \le$$

$$\le \frac{l}{q}\left[\frac{L_0}{l} + L\left(k + 1 + \left[l^* + l^*l\right]k\right)\right]\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| \le l\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right|.$$

Отже, всі функції $x_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, при $t \in \Re$ задовольняють нерівності (7), (8).

Тепер покажемо, що послідовність вектор-функцій $x_m(t)$, $m = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігається до деякої неперервної вектор-функції $x(t)$. Для цього достатньо, щоб при всіх $t \in \Re$ і $m = 0, 1, \ldots$ мала місце оцінка

$$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \leq \tilde{M}\theta^{m-1}, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{9_m}$$

де $\tilde{M}$ — деяка додатна стала ($\tilde{M} \geq M$).

Дійсно, оскільки $x_0(t) = 0$, маємо

$$\begin{aligned}|x_1(t) - x_0(t)| = \big|F\left(q^{-1}t, x_0\left(q^{-1}t\right), x_0\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, x_0\left(q^{-1}t\right)\right)\right), \ldots\right.\\ \left.\ldots, x_0\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, x_0\left(q^{-1}t\right)\right)\right), 0\right)\big| \leq\\ \leq \big|F\left(q^{-1}t, 0, \ldots, 0, 0\right)\big| \leq M \leq \tilde{M}.\end{aligned}$$

Отже, при $m = 1$ нерівність (9_m) виконується. Припустимо, що оцінку (9_m) встановлено для деякого $m \geq 1$, і покажемо її справедливість для $m + 1$:

$$\begin{aligned}|x_{m+1}(t) - x_m(t)| \leq \big|F\left(q^{-1}t, x_m\left(q^{-1}t\right), x_m\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, x_m\left(q^{-1}t\right)\right)\right), \ldots\right.\\ \left.\ldots, x_m\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, x_m\left(q^{-1}t\right)\right)\right), 0\right) -\\ - F\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right), x_{m-1}\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right), \ldots\right.\\ \left.\ldots,\ x_{m-1}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, x_{m-1}(q^{-1})\right)\right), 0\right)\big| \leq\\ \leq L\left[\left|x_m(q^{-1}t) - x_{m-1}(q^{-1}t)\right| + \big|x_m\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, x_m\left(q^{-1}t\right)\right)\right) -\right.\\ - x_{m-1}\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right)\big| + \ldots\\ \ldots + \big|x_m\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, x_m\left(q^{-1}t\right)\right)\right) -\\ \left.-\ x_{m-1}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right)\big|\right] \leq\\ \leq L\left[\left|x_m\left(q^{-1}t\right) - x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right| + \big|x_m\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, x_m\left(q^{-1}t\right)\right)\right) -\right.\\ - x_m\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right) +\\ + x_m\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right) -\\ - x_{m-1}\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right)\big| + \ldots\\ \ldots + \big|x_m\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, x_m\left(q^{-1}t\right)\right)\right) -\\ - x_m\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right) +\\ + x_m\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right) -\\ \left.-\ x_{m-1}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right)\big|\right] \leq\\ \leq L\Big[\tilde{M}\theta^{m-1} + \big|x_m\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, x_m\left(q^{-1}t\right)\right)\right) -\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& - x_m\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right)\big| + \big|x_m\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right) - \\
& - x_{m-1}\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right)\big| + \ldots + \big|x_m\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, x_m\left(q^{-1}t\right)\right)\right) - \\
& - x_m\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right)\big| + \big|x_m\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right) - \\
& - x_{m-1}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right)\big|\Big] \le L\Big[\tilde{M}\theta^{m-1} + l\,\big|f_1\left(q^{-1}t, x_m\left(q^{-1}t\right)\right) - \\
& - f_1\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\big| + \tilde{M}\theta^{m-1} + \ldots + l\,\big|f_k\left(q^{-1}t, x_m\left(q^{-1}t\right)\right) - \\
& - f_k\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\big| + \tilde{M}\theta^{m-1}\Big] \le L\Bigg[\tilde{M}\theta^{m-1}(k+1) + l\sum_{i=1}^{k}\big|f_i\left(q^{-1}t, x_m\left(q^{-1}t\right)\right) - \\
& - f_i\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\big|\Bigg] \le L\left[\tilde{M}\theta^{m-1}(k+1) + l\sum_{i=1}^{k} l_i''\left|x_m\left(q^{-1}t\right) - x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right|\right] \le \\
& \le L\left[\tilde{M}\theta^{m-1}(k+1) + l\sum_{i=1}^{k}\left(l_i''\tilde{M}\theta^{m-1}\right)\right] \le L\left[k+1+l\sum_{i=1}^{k} l_i''\right]\tilde{M}\theta^{m-1} \le \\
& \le L\left[k+1+ll^*k\right]\tilde{M}\theta^{m-1} \le \tilde{M}\theta^m.
\end{aligned}
$$

Таким чином, оцінка (9_m) виконується при всіх $m \ge 1$. Звідси випливає, що послідовність неперервних вектор-функцій $x_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігається до деякої неперервної вектор-функції $\bar{x}(t) = \lim_{m\to\infty} x_m(t)$, яка є неперервним розв'язком системи рівнянь (4) та задовольняє нерівність

$$|\bar{x}(t)| \le M'$$

(в цьому можна переконатись, якщо в (7), (9_m) перейти до границі при $m \to \infty$).

Для завершення доведення теореми покажемо, що розв'язок $\bar{x}(t)$ є єдиним. Дійсно, припустимо, що існує ще один неперервний розв'язок $\tilde{x}(t)$ системи (4) такий, що $\tilde{x}(t) \ne \bar{x}(t)$. Тоді, використовуючи умови теореми, маємо

$$
\begin{aligned}
|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)| \le \Big| & F\Big(q^{-1}t, \tilde{x}(q^{-1}t), \tilde{x}(q^{-1}t + f_1(q^{-1}t, \tilde{x}(q^{-1}t))), \ldots \\
& \ldots, \tilde{x}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \tilde{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right), 0) - \\
& - F\left(q^{-1}t, \bar{x}(q^{-1}t), \bar{x}\left(q^{-1}t + f_1(q^{-1}t, \bar{x}(q^{-1}t))\right), \ldots\right. \\
& \left.\ldots \bar{x}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right), 0\right)\Big| \le L\Big(\left|\tilde{x}\left(q^{-1}t\right) - \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right| + \\
& + \left|\tilde{x}\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, \tilde{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right) - \bar{x}\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right)\right| + \ldots \\
& \ldots + \left|\tilde{x}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \tilde{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right) - \bar{x}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right)\right|\Big) \le \\
\le L\left(\|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)\| + \right. & \left|\tilde{x}\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, \tilde{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right) - \right.
\end{aligned}
$$

$$- \tilde{x}\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right) + \tilde{x}\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right) -$$

$$- \bar{x}\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right)\big| + \ldots + \big|\tilde{x}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \tilde{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right) -$$

$$- \tilde{x}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right) + \tilde{x}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right) -$$

$$- \bar{x}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right)\big|\big) \leq L\left(\|\tilde{x}\left(t\right) - \bar{x}(t)\| + \right.$$

$$+ l\left|f_1\left(q^{-1}t, \tilde{x}\left(q^{-1}t\right)\right) - f_1\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right| + \|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)\| + \ldots$$

$$\left.\ldots + l\left|f_k\left(q^{-1}t, \tilde{x}\left(q^{-1}t\right)\right) - f_k\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right| + \|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)\|\right) \leq$$

$$\leq L\left(\|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)\|(k+1) + l\sum_{i=1}^{k}\left|f_i\left(q^{-1}t, \tilde{x}\left(q^{-1}t\right)\right) - f_i\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right|\right) \leq$$

$$\leq L\left(\|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)\|(k+1) + l\sum_{i=1}^{k} l_i''\left|\tilde{x}\left(q^{-1}t\right) - \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right|\right) \leq$$

$$\leq L\left(\|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)\|(k+1) + l\sum_{i=1}^{k} l_i''\|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)\|\right) \leq$$

$$\leq L\left(k + 1 + l\sum_{i=1}^{k} l_i''\right)\|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)\| \leq$$

$$\leq L\left(k + 1 + ll^*k\right)\|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)\| \leq \theta\|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)\|,$$

де $\|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)\| = \sup_t|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)|$. Звідси безпосередньо випливає співвідношення

$$\|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)\| \leq \theta\|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)\|,$$

яке виконується лише у випадку, коли $\tilde{x}(t) = \bar{x}(t)$, що суперечить припущенню. Таким чином, система рівнянь (4) має єдиний неперервний розв'язок $\bar{x}(t)$.

Теорему 1 доведено.

Зауважимо, що теорема 1 справджується лише у випадку, коли виконується співвідношення

$$L(k+1) + \frac{M}{M'} \leq 1,$$

яке має місце при достатньо малих L та M.

Виконаємо в системі рівнянь (1) взаємно однозначну заміну змінних $x(t) = y(t) + \gamma(t)$, де $\gamma(t)$ — неперервний розв'язок системи (4). В результаті отримаємо систему рівнянь вигляду

$$y(qt) = \tilde{F}\left(t, y(t), y\left(t + \tilde{f}_1(t, y(t))\right), \ldots, y\left(t + \tilde{f}_k(t, y(t))\right), \varepsilon\right), \tag{10}$$

де

$$\tilde{F}\left(t, y\left(t\right), y\left(t + \tilde{f}_1\left(t, y\left(t\right)\right)\right), \ldots, y\left(t + \tilde{f}_k\left(t, y\left(t\right)\right)\right), \varepsilon\right) =$$

$$= F\left(t, y(t) + \gamma(t), y\left(t + f_1\left(t, y(t) + \gamma(t)\right)\right) + \gamma\left(t + f_1\left(t, y(t) + \gamma(t)\right)\right), \ldots\right.$$
$$\ldots, y\left(t + f_k\left(t, y(t) + \gamma(t)\right)\right) + \gamma\left(t + f_k\left(t, y(t) + \gamma(t)\right)\right), \varepsilon) -$$
$$- F\left(t, \gamma(t), \gamma\left(t + f_1\left(t, \gamma(t)\right)\right), \ldots, \gamma\left(t + f_k\left(t, \gamma(t)\right)\right), 0\right).$$

Очевидно, що вектор-функція

$$\tilde{F}\left(t, y(t), y\left(t + \tilde{f}_1\left(t, y(t)\right)\right), \ldots, y\left(t + \tilde{f}_k\left(t, y(t)\right)\right), \varepsilon\right)$$

задовольняє умови 1, 2 та виконується умова

3$'$) при достатньо малих L_0, L, l_i', l_i'', $i = 1, 2, \ldots, k$, виконуються співвідношення

$$\frac{L_0}{ql} + \frac{L}{q}\left(k + 1 + \left[l^* + l^*\tilde{l}\right]k\right) \le 1, \quad L\left[k + 1 + \tilde{l}l^*k\right] = \theta < 1,$$

де $l^* = \max\{l_i', l_i''\}$, $\tilde{l} > 0$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1, 2 та 3$'$. Тоді система рівнянь (10) має єдиний неперервний розв'язок, що задовольняє умови*

$$\left|y(\bar{t}, \varepsilon) - y(\bar{\bar{t}}, \varepsilon)\right| \le \tilde{l}\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right|,$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(t, \varepsilon) = 0,$$

де $t, \bar{t}, \bar{\bar{t}} \in \Re$, $\tilde{l} = \tilde{l}(\varepsilon)$ *— додатна стала, що залежить від* ε, $\varepsilon << 1$.

Доведення. Розглянемо послідовність функцій

$$y_0(t, \varepsilon) = 0, \tag{11_0}$$

$$y_m(t, \varepsilon) = \tilde{F}\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t, \varepsilon\right), y_{m-1}\left(q^{-1}t + \tilde{f}_1\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t, \varepsilon\right)\right), \varepsilon\right), \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, y_{m-1}\left(q^{-1}t + \tilde{f}_k\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t, \varepsilon\right)\right), \varepsilon\right), \varepsilon\right), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{11_m}$$

Як і при доведенні теореми 1, можна показати, що при $t \in \Re$ і всіх $m \ge 0$ функції $y_m(t, \varepsilon)$, $m = 0, 1, \ldots$, є неперервними при $t \in \Re$ і виконуються нерівності

$$|y_m(t, \varepsilon)| \le M'', \tag{12}$$

$$\left|y_m(\bar{t}, \varepsilon) - y_m(\bar{\bar{t}}, \varepsilon)\right| \le \tilde{l}\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right|, \tag{13}$$

де $M'' = M''(\varepsilon) > M$ та $\tilde{l}$ — деякі додатні сталі.

Дійсно, оскільки $y_0(t, \varepsilon) = 0$, при $m = 0$ нерівності (12) та (13) виконуються. Припустимо, що функції $y_n(t, \varepsilon)$, $n = 0, 1, \ldots, m - 1$, які визначені співвідношеннями (11_m), також задовольняють нерівності (12), (13). Тоді згідно з (11_m), (12), (13) та умовами теореми отримуємо

$$
\begin{aligned}
|y_m(t,\varepsilon)| \le{}& \Big|\tilde F\Big(q^{-1}t, y_{m-1}(q^{-1}t,\varepsilon), y_{m-1}\Big(q^{-1}t+\tilde f_1\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big),\ldots\\
&\ldots, y_{m-1}\Big(q^{-1}t+\tilde f_k\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big),\varepsilon\Big)\Big| \le\\
\le{}& L\Bigg(\left|y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right| + \Big|y_{m-1}\Big(q^{-1}t+\tilde f_1\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big)\Big| + \ldots\\
&\ldots + \Big|y_{m-1}\Big(q^{-1}t+\tilde f_k\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big)\Big|\Bigg) + M \le\\
\le{}& LM''(k+1) + M \le M''\left(L(k+1) + \frac{M}{M''}\right) \le M'',
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|y_m(\bar t,\varepsilon) - y_m\left(\bar{\bar t},\varepsilon\right)\right| \le{}& \Big|\tilde F\Big(q^{-1}\bar t, y_{m-1}(q^{-1}\bar t,\varepsilon), y_{m-1}\Big(q^{-1}\bar t+\tilde f_1\left(q^{-1}\bar t, y_{m-1}(q^{-1}\bar t,\varepsilon)\right),\varepsilon\Big),\ldots\\
&\ldots, y_{m-1}\Big(q^{-1}\bar t+\tilde f_k\left(q^{-1}\bar t, y_{m-1}\left(q^{-1}\bar t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big),\varepsilon\Big) -\\
&- \tilde F\Big(q^{-1}\bar{\bar t}, y_{m-1}(q^{-1}\bar{\bar t},\varepsilon), y_{m-1}\Big(q^{-1}\bar{\bar t}+\tilde f_1(q^{-1}\bar{\bar t}, y_{m-1}(q^{-1}\bar{\bar t},\varepsilon)),\varepsilon\Big),\ldots\\
&\ldots, y_{m-1}\Big(q^{-1}\bar{\bar t}+\tilde f_k\left(q^{-1}\bar{\bar t}, y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar t},\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big),\varepsilon\Big)\Big| \le\\
\le{}& L_0\left|q^{-1}\bar t - q^{-1}\bar{\bar t}\right| + L\Bigg(\left|y_{m-1}\left(q^{-1}\bar t,\varepsilon\right) - y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar t},\varepsilon\right)\right| +\\
&+ \Big|y_{m-1}\Big(q^{-1}\bar t+\tilde f_1\left(q^{-1}\bar t, y_{m-1}\left(q^{-1}\bar t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big) -\\
&- y_{m-1}\Big(q^{-1}\bar{\bar t}+\tilde f_1\left(q^{-1}\bar{\bar t}, y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar t},\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big)\Big| + \ldots\\
&\ldots + \Big|y_{m-1}\Big(q^{-1}\bar t+\tilde f_k\left(q^{-1}\bar t, y_{m-1}\left(q^{-1}\bar t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big) -\\
&- y_{m-1}\Big(q^{-1}\bar{\bar t}+\tilde f_k\left(q^{-1}\bar{\bar t}, y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar t},\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big)\Big|\Bigg) \le\\
\le{}& L_0\left|q^{-1}\bar t - q^{-1}\bar{\bar t}\right| + L\Big(\tilde l\left|q^{-1}\bar t - q^{-1}\bar{\bar t}\right| +\\
&+ \tilde l\Big|q^{-1}\bar t + \tilde f_1\left(q^{-1}\bar t, y_{m-1}\left(q^{-1}\bar t,\varepsilon\right)\right) - q^{-1}\bar{\bar t} -\\
&- \tilde f_1\left(q^{-1}\bar{\bar t}, y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar t},\varepsilon\right)\right)\Big| + \ldots + \tilde l\Big|q^{-1}\bar t + \tilde f_k\left(q^{-1}\bar t, y_{m-1}\left(q^{-1}\bar t,\varepsilon\right)\right) -
\end{aligned}
$$

$$- \ q^{-1}\bar{\bar{t}} - \tilde{f}_k\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}, y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},\varepsilon\right)\right)\Big|\Big) \leq L_0\left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right| +$$

$$+ L\tilde{l}\Big(\left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right| + \left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right| +$$

$$+ \left|\tilde{f}_1\left(q^{-1}\bar{t}, y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t},\varepsilon\right)\right) - \tilde{f}_1\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}, y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},\varepsilon\right)\right)\right| + \ldots$$

$$\ldots + \left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right| + \left|\tilde{f}_k\left(q^{-1}\bar{t}, y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t},\varepsilon\right)\right) - \tilde{f}_k\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}, y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},\varepsilon\right)\right)\right|\Big) \leq$$

$$\leq L_0\left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right| + L\tilde{l}\Bigg(\left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|(k+1) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k}\left|\tilde{f}_i\left(q^{-1}\bar{t}, y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t},\varepsilon\right)\right) - \tilde{f}_i\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}, y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},\varepsilon\right)\right)\right|\Bigg) \leq$$

$$\leq L_0\left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right| + L\tilde{l}\Bigg(\left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|(k+1) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k}\left(l_i'\left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right| + l_i''\left|y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t},\varepsilon\right) - y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},\varepsilon\right)\right|\right)\Bigg) \leq$$

$$\leq L_0\left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right| + L\tilde{l}\Bigg(\left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|(k+1) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k}\left(l_i'\left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right| + l_i'' l\left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|\right)\Bigg) \leq$$

$$\leq \frac{L_0}{q}\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| + \frac{L}{q}\tilde{l}\left(k+1+\sum_{i=1}^{k}\left(l_i' + l_i''\tilde{l}\right)\right)\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| \leq$$

$$\leq \tilde{l}\left[\frac{L_0}{q\tilde{l}} + \frac{L}{q}\left(k+1+\sum_{i=1}^{k}\left(l_i' + l_i''\tilde{l}\right)\right)\right]\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| \leq$$

$$\leq \tilde{l}\left[\frac{L_0}{q\tilde{l}} + \frac{L}{q}\left(k+1+\left(l^* + l^*\tilde{l}\right)k\right)\right]\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| \leq \tilde{l}\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right|.$$

Отже, всі функції $y_m(t,\varepsilon)$, $m = 0, 1, \ldots,$ при $t \in \Re$ задовольняють нерівності (12) та (13).

Покажемо, що система функціональних рівнянь (10) має неперервний розв'язок $\bar{y}(t,\varepsilon)$, який задовольняє умову $\lim_{\varepsilon\to 0}|\bar{y}(t,\varepsilon)| = 0$. Для цього доведемо, що при всіх $m \geq 0$ має місце співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|y_m(t,\varepsilon)| = 0. \qquad (13_m)$$

Розглядаючи послідовно (11_m), $m = 0, 1, \dots$, знаходимо

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |y_0(t,\varepsilon)| = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} [y_1(t,\varepsilon)] = \lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{F}\Big(q^{-1}t, y_0\left(q^{-1}t,\varepsilon\right), y_0\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_1\left(q^{-1}t, y_0\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big),\dots$$
$$\dots, y_0\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_k\left(q^{-1}t, y_0\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big),\varepsilon\Big) =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[F\left(q^{-1}t, y_0\left(q^{-1}t,\varepsilon\right) + \gamma\left(q^{-1}t\right), y_0\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, y_0\left(q^{-1}t,\varepsilon\right) +\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+\gamma\left(q^{-1}t\right)\right),\varepsilon\right) + \gamma\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, y_0\left(q^{-1}t,\varepsilon\right) + \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right),\dots$$
$$\dots, y_0\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, y_0\left(q^{-1}t,\varepsilon\right) + \gamma\left(q^{-1}t\right)\right),\varepsilon\right) +$$
$$+\gamma\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, y_0\left(q^{-1}t,\varepsilon\right) + \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right),\varepsilon) -$$
$$- F\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right), \gamma\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right),\dots\right.$$
$$\left.\dots, \gamma\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right), 0\right)\Big] =$$
$$= F\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right), \gamma\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right),\dots\right.$$
$$\left.\dots, \gamma\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right), 0\right) -$$
$$- F\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right), \gamma\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right),\dots\right.$$
$$\left.\dots, \gamma\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right), 0\right) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[y_m(t,\varepsilon)] = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\tilde{F}\Big(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right), y_{m-1}\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_1\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big),\dots$$
$$\dots, y_{m-1}\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_k\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big),\varepsilon\Big)\Big] =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[F\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right) + \gamma\left(q^{-1}t\right),\right.$$
$$y_{m-1}\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right) + \gamma\left(q^{-1}t\right)\right),\varepsilon\right) +$$
$$+ \gamma\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right) + \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right),\dots$$
$$\dots, y_{m-1}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right) + \gamma\left(q^{-1}t\right)\right),\varepsilon\right) +$$
$$+\gamma\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right) + \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right),\varepsilon) -$$
$$- F\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right), \gamma\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right),\dots\right.$$

$$\ldots, \gamma\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right), 0)\Big] =$$

$$= F\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right), \gamma\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right), \ldots\right.$$

$$\ldots, \gamma\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right), 0) -$$

$$- F\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right), \gamma\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right), \ldots\right.$$

$$\ldots \gamma\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right), 0) = 0, \quad m \geq 2,$$

що і необхідно було довести.

Тепер покажемо, що при всіх $t \in \Re$ і $m \geq 1$ виконується оцінка

$$|y_m(t,\varepsilon) - y_{m-1}(t,\varepsilon)| \leq \bar{M}\theta^{m-1}, \qquad (14_m)$$

де $\bar{M} = \bar{M}(\varepsilon) > M$. Дійсно, оскільки $y_0(t,\varepsilon) = 0$, маємо

$$|y_1(t,\varepsilon) - y_0(t,\varepsilon)| = \Big|\tilde{F}\Big(q^{-1}t, y_0\left(q^{-1}t,\varepsilon\right), y_0\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_1\left(q^{-1}t, y_0\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right)\Big), \ldots$$

$$\ldots, y_0\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_k\left(q^{-1}t, y_0\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right)\Big), \varepsilon\Big)\Big| \leq$$

$$\leq \left|\tilde{F}\left(q^{-1}t, 0, \ldots, 0, \varepsilon\right)\right| \leq M < \bar{M}.$$

Отже, при $m = 1$ нерівність (14_m) виконується. Припустимо, що оцінку (14_m) встановлено для деякого $m \geq 1$, і покажемо її справедливість для $m+1$:

$$|y_{m+1}(t,\varepsilon) - y_m(t,\varepsilon)| \leq \Big|\tilde{F}\Big(q^{-1}t, y_m\left(q^{-1}t,\varepsilon\right), y_m\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_1\left(q^{-1}t, y_m\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right), \varepsilon\Big), \ldots$$

$$\ldots, y_m\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_k\left(q^{-1}t, y_m\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right), \varepsilon\Big), \varepsilon\Big) - \tilde{F}\Big(q^{-1}t,$$

$$y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right), y_{m-1}\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_1\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right), \varepsilon\Big), \ldots$$

$$\ldots, y_{m-1}\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_k\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right), \varepsilon\Big), \varepsilon\Big)\Big| \leq$$

$$\leq L\Big[\left|y_m\left(q^{-1}t,\varepsilon\right) - y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right| +$$

$$+ \Big|y_m\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_1\left(q^{-1}t, y_m\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right), \varepsilon\Big) -$$

$$- y_{m-1}\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_1\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right), \varepsilon\Big)\Big| + \ldots$$

$$\ldots + \Big| y_m \left(q^{-1}t + \tilde{f}_k \left(q^{-1}t, y_m \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right), \varepsilon \right) -$$

$$- \; y_{m-1} \left(q^{-1}t + \tilde{f}_k \left(q^{-1}t, y_{m-1} \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right), \varepsilon \right) \Big| \Big] \leq$$

$$\leq L \Big[\left| y_m \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) - y_{m-1} \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right| +$$

$$+ \Big| y_m \left(q^{-1}t + \tilde{f}_1 \left(q^{-1}t, y_m \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right), \varepsilon \right) - y_m \left(q^{-1}t + \tilde{f}_1 \left(q^{-1}t, y_{m-1} \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right), \varepsilon \right) +$$

$$+ \, y_m \left(q^{-1}t + \tilde{f}_1 \left(q^{-1}t, y_{m-1}(q^{-1}t, \varepsilon) \right), \varepsilon \right) - y_{m-1} \left(q^{-1}t + \tilde{f}_1 \left(q^{-1}t, y_{m-1}(q^{-1}t, \varepsilon) \right), \varepsilon \right) \Big| + \ldots$$

$$\ldots + \Big| y_m \left(q^{-1}t + \tilde{f}_k \left(q^{-1}t, y_m \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right), \varepsilon \right) - y_m \left(q^{-1}t + \tilde{f}_k \left(q^{-1}t, y_{m-1} \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right), \varepsilon \right) +$$

$$+ \, y_m \left(q^{-1}t + \tilde{f}_k \left(q^{-1}t, y_{m-1} \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right), \varepsilon \right) - y_{m-1} \left(q^{-1}t + \tilde{f}_k \left(q^{-1}t, y_{m-1}(q^{-1}t, \varepsilon) \right), \varepsilon \right) \Big| \Big] \leq$$

$$\leq L \Big[\left| y_m \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) - y_{m-1} \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right| + \Big| y_m \left(q^{-1}t + \tilde{f}_1 \left(q^{-1}t, y_m \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right) \right) -$$

$$- \, y_m \left(q^{-1}t + \tilde{f}_1 \left(q^{-1}t, y_{m-1} \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right) \right) \Big| + \Big| y_m \left(q^{-1}t + \tilde{f}_1 \left(q^{-1}t, y_{m-1} \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right) \right) -$$

$$- \, y_{m-1} \left(q^{-1}t + f_1 \left(q^{-1}t, y_{m-1} \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right) \right) \Big| + \ldots + \Big| y_m \left(q^{-1}t + \tilde{f}_k \left(q^{-1}t, y_m \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right) \right) -$$

$$- \, y_m \left(q^{-1}t + \tilde{f}_k \left(q^{-1}t, y_{m-1} \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right) \right) \Big| + \Big| y_m \left(q^{-1}t + \tilde{f}_k \left(q^{-1}t, y_{m-1} \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right) \right) -$$

$$- \; y_{m-1} \left(q^{-1}t + \tilde{f}_k \left(q^{-1}t, y_{m-1} \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right) \right) \Big| \Big] \leq$$

$$\leq L \Big[\bar{M}\theta^{m-1} + \tilde{l} \left| \tilde{f}_1 \left(q^{-1}t, y_m \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right) - \tilde{f}_1 \left(q^{-1}t, y_{m-1} \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right) \right| + \bar{M}\theta^{m-1} + \ldots$$

$$\ldots + \tilde{l} \left| \tilde{f}_k \left(q^{-1}t, y_m \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right) - \tilde{f}_k \left(q^{-1}t, y_{m-1} \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right) \right| + \bar{M}\theta^{m-1} \Big] \leq$$

$$\leq L \left[\bar{M}\theta^{m-1}(k+1) + \tilde{l} \sum_{i=1}^{k} \left| \tilde{f}_i \left(q^{-1}t, y_m \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right) - \tilde{f}_i \left(q^{-1}t, y_{m-1} \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right) \right| \right] \leq$$

$$\leq L \left[\bar{M}\theta^{m-1}(k+1) + \tilde{l} \sum_{i=1}^{k} l_i'' \left| y_m \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) - y_{m-1} \left(q^{-1}t, \varepsilon \right) \right| \right] \leq$$

$$\leq L\left[\bar{M}\theta^{m-1}(k+1) + \tilde{l}\sum_{i=1}^{k} l_i''\bar{M}\theta^{m-1}\right] \leq$$

$$\leq L\left[k+1+\tilde{l}l^*k\right]\bar{M}\theta^{m-1} \leq L\left[k+1+\tilde{l}l^*k\right]\bar{M}\theta^{m-1} \leq \bar{M}\theta^{m}, \quad m = 2,3,\ldots.$$

Таким чином, оцінка (14_m) виконується при всіх $m \geq 1$. Звідси випливає, що послідовність неперервних вектор-функцій $y_m(t,\varepsilon)$, $m = 0,1,\ldots$, рівномірно збігається до деякої неперервної вектор-функції $\bar{y}(t,\varepsilon) = \lim_{m\to\infty} y_m(t,\varepsilon)$, яка є неперервним розв'язком системи рівнянь (10), який задовольняє нерівність

$$|\bar{y}(t,\varepsilon)| \leq M''$$

та такий, що $\lim_{\varepsilon\to 0}\bar{y}(t,\varepsilon) = 0$ (в цьому можна переконатись, якщо в (12), (11_m), (13_m) перейти до границі при $m \to \infty$).

Для завершення доведення теореми покажемо, що розв'язок $\bar{y}(t,\varepsilon)$ є єдиним. Дійсно, припустимо, що існує ще один неперервний розв'язок $\tilde{y}(t,\varepsilon)$ системи (10) такий, що $\tilde{y}(t,\varepsilon) \neq \bar{y}(t,\varepsilon)$. Тоді, використовуючи умови теореми, маємо

$$|\tilde{y}(t,\varepsilon) - \bar{y}(t,\varepsilon)| \leq \Big|\tilde{F}\Big(q^{-1}t, \tilde{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right), \tilde{y}\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_1\left(q^{-1}t, \tilde{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big),\ldots$$

$$\ldots, \tilde{y}\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_k\left(q^{-1}t, \tilde{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big),\varepsilon\Big) -$$

$$-\tilde{F}\Big(q^{-1}t, \bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right), \bar{y}\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_1\left(q^{-1}t, \bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big),\ldots$$

$$\ldots, \bar{y}\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_k\left(q^{-1}t, \bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big),\varepsilon\Big)\Big| \leq$$

$$\leq L\Bigg(\left|\tilde{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right) - \bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right| + \Big|\tilde{y}\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_1\left(q^{-1}t, \tilde{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big) -$$

$$-\bar{y}\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_1\left(q^{-1}t, \bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big)\Big| + \ldots$$

$$\ldots + \Big|\tilde{y}\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_k\left(q^{-1}t, \tilde{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big) -$$

$$-\ \bar{y}\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_k\left(q^{-1}t, \bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big)\Big|\Bigg) \leq$$

$$\leq L\Bigg(\|\tilde{y}(t,\varepsilon) - \bar{y}(t,\varepsilon)\| + \Big|\tilde{y}\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_1\left(q^{-1}t, \tilde{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big) -$$

$$-\tilde{y}\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_1\left(q^{-1}t, \bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big) + \tilde{y}\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_1\left(q^{-1}t, \bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big) -$$

$$-\bar{y}\Big(q^{-1}t + \tilde{f}_1\left(q^{-1}t, \bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big)\Big| + \ldots$$

$$\ldots + \Big|\tilde{y}\left(q^{-1}t + \tilde{f}_k\left(q^{-1}t, \tilde{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right) -$$

$$- \tilde{y}\left(q^{-1}t + \tilde{f}_k\left(q^{-1}t, \bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right) + \ldots$$

$$\ldots + \Big|\tilde{y}\left(q^{-1}t + \tilde{f}_k\left(q^{-1}t, \bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right) -$$

$$- \bar{y}\left(q^{-1}t + \tilde{f}_k\left(q^{-1}t, \bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right)\Big|\Bigg) \le$$

$$\le L\Bigg(\|\tilde{y}(t,\varepsilon) - \bar{y}(t,\varepsilon)\| + \tilde{l}\,\Big|\tilde{f}_1\left(q^{-1}t, \tilde{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right) - \tilde{f}_1\left(q^{-1}t, \bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right)\Big| +$$

$$+ \|\tilde{y}\left(t,\varepsilon\right) - \bar{y}(t,\varepsilon)\| + \ldots + \tilde{l}\,\Big|\tilde{f}_k\left(q^{-1}t, \tilde{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right) - \tilde{f}_k\left(q^{-1}t, \bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right)\Big| +$$

$$+ \|\tilde{y}(t,\varepsilon) - \bar{y}(t,\varepsilon)\|\Bigg) \le$$

$$\le L\left(\|\tilde{y}(t,\varepsilon) - \bar{y}(t,\varepsilon)\|\,(k+1) + \tilde{l}\sum_{i=1}^{k} l_i''\left|\tilde{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right) - \bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right|\right) \le$$

$$\le L\left(\|\tilde{y}\left(t,\varepsilon\right) - \bar{y}(t,\varepsilon)\|\,(k+1) + \tilde{l}\sum_{i=1}^{k} l_i''\,\|\tilde{y}\left(t,\varepsilon\right) - \bar{y}(t,\varepsilon)\|\right) \le$$

$$\le L\left(k + 1 + \tilde{l}\sum_{i=1}^{k} l_i''\right)\|\tilde{y}(t,\varepsilon) - \bar{y}(t,\varepsilon)\| \le L\left(k + 1 + \tilde{l}l^{*}k\right)\|\tilde{y}(t,\varepsilon) - \bar{y}(t,\varepsilon)\| \le$$

$$\le \theta\,\|\tilde{y}(t,\varepsilon) - \bar{y}(t,\varepsilon)\|\,,$$

де $\|\tilde{y}(t,\varepsilon) - \bar{y}(t,\varepsilon)\| = \sup_t|\tilde{y}(t,\varepsilon) - \bar{y}(t,\varepsilon)|$. Звідси безпосередньо випливає співвідношення $\|\tilde{y}(t,\varepsilon) - \bar{y}(t,\varepsilon)\| \le \theta\|\tilde{y}(t,\varepsilon) - \bar{y}(t,\varepsilon)\|$, яке можливе лише у випадку, коли $\tilde{y}(t,\varepsilon) = \bar{y}(t,\varepsilon)$, що суперечить припущенню. Таким чином, система рівнянь (10) має єдиний неперервний розв'язок $\bar{y}(t,\varepsilon)$.

Теорему 2 доведено.

Зауважимо, що теорема 2 має місце лише тоді, коли виконується співвідношення

$$L\,(k+1) + \frac{M}{M''} \le 1,$$

яке має місце при достатньо малих L та M.

Література

1. *Agarwal R. P., Romanenko E. Yu.* Stable periodic solutions of difference equations // Appl. Math. Lett. — 1998. — **11**, № 4. — P. 81 – 84.
2. *Kuczma M., Choczewski B., Ger R.* Iterative functional equations. — Cambridge Univ. Press, 1990. — 552 p.

3. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1972. — 248 с.
4. *Пелюх Г. П.* О существовании периодических решений нелинейных разностных уравнений // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 12. — С. 1623 – 1633.
5. *Пелюх Г. П., Сивак О. А.* Періодичні розв'язки систем нелінійних функціональних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 1. — С. 90 – 93.

Одержано 10.03.15