УДК 517.9

ПРО ІСНУВАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

І. В. Бецко

Нац. техн. ун-т України „КПІ”
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: betskoiv@mail.ru

We find conditions for existence of continuous bounded solutions to a sistem of difference equations with linearly transformed argument, and develop a method to construct such solutions.

Установлены условия существования непрерывных ограниченных решений систем разностных уравнений с линейно преобразованным аргументом и разработан метод их построения.

У сучасній теорії функціональних рівнянь є ряд детально досліджених питань, до яких, зокрема, відносяться питання існування різного роду розв'язків [1 – 10]. Незважаючи на це і на широкі застосування таких рівнянь в опису нелінійних явищ, що відбуваються в різноманітних реальних системах, при їх подальшому дослідженні виникла низка проблем, які потребують всебічного вивчення.

Дану роботу присвячено дослідженню структури розв'язків системи різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)x(qt) + F(t), \tag{1}$$

де $t \in R$, $A(t)$, $B(t)$ — дійсні $(n \times n)$-матриці, $F(t)$ — дійсний вектор розмірності n, q — деяка дійсна стала. При різних припущеннях щодо матриць $A(t)$, $B(t)$ і вектора $F(t)$ окремі класи таких систем рівнянь були основним об'єктом дослідження багатьох математиків і на сьогодні деякі питання їх теорії досить детально вивчено. Особливо це стосується існування різного роду (аналітичних, неперервних та ін.) розв'язків і дослідження їх властивостей.

Метою даної роботи є вивчення питань існування неперервних обмежених при $t \in R$ розв'язків, дослідження структури їх множини, а також розробка методу їх побудови.

Спочатку розглянемо систему рівнянь вигляду

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)x(qt), \tag{2}$$

де A, B — дійсні сталі $(n \times n)$-матриці, q — дійсна стала, і покажемо, що при деяких умовах вона має неперервні розв'язки. При цьому відносно матриці A будемо припускати, що її власні значення λ_i, $i = 1, \ldots, n$, задовольняють умови

$$|\lambda_i| \neq 0, 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тоді існує заміна змінних

$$x(t) = Cy(t),$$

де C — деяка неособлива $(n \times n)$-матриця, яка зводить систему рівнянь (2) до вигляду

$$y(t+1) = Jy(t) + \tilde{B}y(qt). \tag{3}$$

Тут $\tilde{B} = C^{-1}BC$, $J = \operatorname{diag}(J_1(\lambda_1), \ldots, J_m(\lambda_m))$,

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & \epsilon & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \epsilon & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_i & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad m \le n.$$

В залежності від умов, які задовольняють числа λ_i, $i = 1, \ldots, m$, матриця $\tilde{B}$ і стала q, далі розглянемо ряд випадків, коли вдається не лише дати відповідь на питання про існування неперервних розв'язків системи рівнянь (3), а й побудувати їх у вигляді деяких функціональних рядів.

1. Дослідимо систему рівнянь (3) у випадку, коли $t \in R^+$ і виконуються такі умови:

1) $0 < \lambda_i < 1, i = 1, \ldots, m, q > 1$;

2) $\lambda_* > \tilde{\lambda}^q$, $\lambda^* < \tilde{\lambda} < 1$, $\Delta = \dfrac{\tilde{b}(\lambda_*^{-1} + \delta_1)}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_1)\tilde{\lambda}^q} < 1$, де $\tilde{b} = |\tilde{B}| = \max_i \sum_j |b_{ij}|$, $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, m\}$, $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, m\}$.

Справджується така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1, 2. Тоді система рівнянь (3) має сім'ю неперервних обмежених при $t \in R^+$ розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції $\omega(t)$.*

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (3) має розв'язки у вигляді функціональних рядів

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{4}$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні вектор-функції.

Дійсно, підставляючи (4) у систему рівнянь (3), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1) = J \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \tilde{B} \sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(t+1) = Jy_0(t), \tag{5_0}$$

$$y_i(t+1) = Jy_i(t) + \tilde{B}y_{i-1}(qt), i = 1, 2, \ldots, \tag{5_i}$$

то ряд (4) буде формальним розв'язком системи рівнянь (3).

Система рівнянь (5_0) має множину неперервних при $t \geq 0$ розв'язків, яка залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції.

Беручи до уваги вигляд загального неперервного розв'язку системи (5_0), а також умови теореми, отримуємо

$$|y_0(t)| \leq M\tilde{\lambda}^t, \tag{6}$$

де $M = \max_i |\omega(t)|$.

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (5_i), $i = 1, 2, \ldots$, можемо показати, що вони мають формальні при $t \geq 0$ розв'язки у вигляді рядів

$$y_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} J^{-(j+1)}\tilde{B}y_{i-1}(q(t+j)), \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{7_i}$$

Для того щоб (7_i) були розв'язками послідовності систем рівнянь (5_i), $i = 1, 2, \ldots$, достатньо показати, що ці ряди рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких справджуються оцінки

$$|y_i(t)| \leq M\Delta^i\tilde{\lambda}^{qt}, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Далі, з огляду на (6), (7_1) та $|J^{-1}| \leq \lambda_*^{-1} + \delta_1$, $\delta_1 = \delta_1(\epsilon) \to 0$ при $\epsilon \to 0$, одержуємо

$$|y_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |J^{-1}|^{j+1}|\tilde{B}|\,|y_0(q(t+j))| \leq \sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_*^{-1} + \delta_1)^{j+1}\tilde{b}M\tilde{\lambda}^{q(t+j)} \leq$$

$$\leq M\tilde{b}(\lambda_*^{-1} + \delta_1)\lambda^{qt}\sum_{j=0}^{\infty}((\lambda_*^{-1} + \delta_1)\tilde{\lambda}^q)^j \leq M\frac{\tilde{b}(\lambda_*^{-1} + \delta_1)}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_1)\tilde{\lambda}^q}\,\tilde{\lambda}^{qt} \leq M\Delta\tilde{\lambda}^{qt}.$$

Таким чином, оцінка (8) має місце при $i = 1$. За індукцією припустимо, що цю оцінку встановлено для деякого k, і покажемо, що вона не зміниться при переході від k до $k+1$. Згідно з (7_{k+1}) і (8) маємо

$$|y_{k+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |J^{-1}|^{j+1}|\tilde{B}|\,|y_k(q(t+j))| \leq \sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_*^{-1} + \delta_1)^{j+1}\tilde{b}M\Delta^k\tilde{\lambda}^{q(q(t+j))} \leq$$

$$\leq M\Delta^k\tilde{b}(\lambda_*^{-1} + \delta_1)\tilde{\lambda}^{q^2t}\sum_{j=0}^{\infty}((\lambda_*^{-1} + \delta_1)\tilde{\lambda}^{q^2})^j \leq$$

$$\leq M\Delta^k\tilde{b}(\lambda_*^{-1} + \delta_1)\tilde{\lambda}^{qt}\sum_{j=0}^{\infty}((\lambda_*^{-1} + \delta_1)\tilde{\lambda}^{q})^j \leq$$

$$\leq M\Delta^k\frac{\tilde{b}(\lambda_*^{-1} + \delta_1)}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_1)\tilde{\lambda}^q}\,\tilde{\lambda}^{qt} \leq M\Delta^{k+1}\tilde{\lambda}^{qt}.$$

Отже, оцінки (8) мають місце при всіх $i \geq 1$. Цим самим ми довели, що ряди (7_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при $t \geq 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, які задовольняють оцінки (8). Звідси безпосередньо випливає, що ряд (4), в якому вектор-функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, визначаються співвідношеннями (7_i), $i = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігається до деякої неперервної вектор-функції $y(t)$, яка задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \frac{M}{1-\Delta} \tilde{\lambda}^{qt}.$$

Теорему 1 доведено.

Розглянемо тепер систему неоднорідних рівнянь вигляду

$$y(t+1) = Jy(t) + \tilde{B}y(qt) + F(t), \tag{9}$$

де матриці $J = \operatorname{diag}(J_1(\lambda_1), \ldots, J_m(\lambda_m))$, $\tilde{B}$, стала q і вектор-функція $F(t)$ задовольняють такі умови:

1) $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \ldots, m$, $q > 1$;

2) $\dfrac{\tilde{b}}{1 - (\lambda^* + \delta_2)} = \tilde{\theta} < 1$, $\delta_2 = \delta_2(\epsilon) \to 0$ при $\epsilon \to 0$;

3) всі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними й обмеженими при всіх $t \in R$ функціями і $\sup_t |F(t)| = \bar{M} < \infty$.

Для системи (9) має місце така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1–3. Тоді система рівнянь (9) має неперервний обмежений при $t \in R$ розв'язок $y(t)$ у вигляді ряду*

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \tag{10}$$

де $\bar{y}(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні й обмежені при $t \in R$ вектор-функції.

Доведення. Підставляючи (10) в систему рівнянь (3), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t+1) = J \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t) + \tilde{B} \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(qt) + F(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\bar{y}_0(t+1) = J\bar{y}_0(t) + F(t), \tag{11_0}$$

$$\bar{y}_i(t+1) = J\bar{y}_i(t) + \tilde{B}\bar{y}_{i-1}(qt), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{11_i}$$

то ряд (10) є формальним розв'язком системи рівнянь (9).

Взявши до уваги умови теореми, можемо переконатися, що ряд

$$\bar{y}_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J^{j-1} F(t-j) \tag{12_0}$$

рівномірно збігається при всіх $t \in R$, задовольняє систему рівнянь (11_0) і виконується оцінка

$$|\bar{y}_0(t)| = \sum_{j=1}^{\infty} |J|^{j-1} |F(t-j)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^* + \delta_2)^{j-1} \sup_t |F(t)| \leq \frac{\bar{M}}{1 - (\lambda^* + \delta_2)} = \bar{M}'. \qquad (13_0)$$

З огляду на (12_0), (13_0) можна послідовно показати, що ряди

$$\bar{y}_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J^{j-1} \tilde{B} \bar{y}_{i-1}(q(t-j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \qquad (12_i)$$

рівномірно збігаються при $t \in R$, задовольняють відповідні системи рівнянь (11_i), $i = 0, 1, \ldots,$ і виконуються оцінки

$$|\bar{y}_i(t)| \leq \bar{M}' \tilde{\theta}^i, \quad i = 1, 2, \ldots. \qquad (13_i)$$

Таким чином, оскільки вектор-функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ що визначаються за допомогою співвідношень (12_i), $i = 0, 1, \ldots,$ задовольняють умови (13_i), $i = 0, 1, \ldots,$ то ряд (10) рівномірно збігається при $t \in R$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (9) і задовольняє умову

$$|\bar{y}_i(t)| \leq \frac{\bar{M}'}{1 - \tilde{\theta}}.$$

Теорему 2 доведено.

2. Розглянемо тепер систему рівнянь (3) у випадку, коли $t \leq 0$.

Теорема 3. *Нехай виконуються такі умови:*

1) $\lambda_i > 1, i = 1, \ldots, m, q > 1$;

2) $\lambda^* < \bar{\lambda}^q, 1 < \bar{\lambda} < \lambda_*, \Delta = \dfrac{\tilde{b} \bar{\lambda}^{-q}}{1 - (\lambda^* + \delta_3) \bar{\lambda}^{-q}} < 1$, *де* $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, m\}$, $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, m\}$, $\tilde{b} = |\tilde{B}|$.

Тоді система рівнянь (3) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \leq 0$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (3) має сім'ю розв'язків у вигляді функціонального ряду (4). Для цього, очевидно, достатньо показати, що вектор-функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь (5_i) і задовольняють оцінки

$$|y_i(t)| \leq M \Delta^i \bar{\lambda}^{qt}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (14)$$

де $M = \max_t |\omega(t)|$.

Справді, безпосередньою підстановкою в (5_i), $i = 1, 2, \ldots,$ можна переконатися, що вектор-функції

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J^{j-1} \tilde{B} y_i(q(t-j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \qquad (15_i)$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (5_i), $i = 1, 2, \ldots$.

Покажемо тепер, що ряди (15_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких при всіх $i \geq 1$, $t \leq 0$, виконуються оцінки (14). Дійсно, оскільки $|y_0(t)| \leq M\bar{\lambda}^t$ (випливає із вигляду загального неперервного розв'язку системи (5_0)), то на підставі (15_1) маємо

$$|y_1(t)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |J|^{j-1}|\tilde{B}|\,|y_0(q(t-j))| \leq \tilde{b}\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda^* + \delta_3)^{j-1}M\bar{\lambda}^{q(t-j)} \leq$$

$$\leq M\tilde{b}(\lambda^* + \delta_3)^{-1}\bar{\lambda}^{qt}\sum_{j=1}^{\infty}((\lambda^* + \delta_3)\bar{\lambda}^{-q})^j \leq M\frac{\tilde{b}(\lambda^* + \delta_3)\bar{\lambda}^{-q}}{(\lambda^* + \delta_3)(1 - \tilde{b}(\lambda^* + \delta_3)\bar{\lambda}^{-q})}\,\bar{\lambda}^{qt} \leq$$

$$\leq M\frac{\tilde{b}\bar{\lambda}^{-q}}{1 - (\lambda^* + \delta_3)\bar{\lambda}^{-q}}\,\bar{\lambda}^{qt} \leq M\Delta\bar{\lambda}^{qt}.$$

За індукцією припустимо, що оцінку (14) доведено для деякого $i \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i+1$. Згідно з (14), (15_{i+1}) отримуємо

$$|y_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |J|^{j-1}|\tilde{B}|\,|y_i(q(t-j))| \leq \tilde{b}\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda^* + \delta_3)^{j-1}M\Delta^i\bar{\lambda}^{q(q(t-j))} \leq$$

$$\leq M\Delta^i\tilde{b}(\lambda^* + \delta_3)^{-1}\bar{\lambda}^{q^2 t}\sum_{j=1}^{\infty}((\lambda^* + \delta_3)\bar{\lambda}^{-q^2})^j \leq$$

$$\leq M\Delta^i\tilde{b}(\lambda^* + \delta_3)^{-1}\bar{\lambda}^{qt}\sum_{j=1}^{\infty}((\lambda^* + \delta_3)\bar{\lambda}^{-q})^j \leq$$

$$\leq M\Delta^i\,\frac{\tilde{b}(\lambda^* + \delta_3)\bar{\lambda}^{-q}}{(\lambda^* + \delta_3)(1 - (\lambda^* + \delta_3)\bar{\lambda}^{-q})}\,\bar{\lambda}^{qt} \leq M\Delta^{i+1}\bar{\lambda}^{qt}.$$

Отже, ми довели, що ряди (15_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при $t \leq 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, що задовольняють оцінки (14). Цим самим ми показали, що ряд (4) рівномірно збігається при $t \leq 0$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t)$, яка задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \frac{M}{1 - \Delta}\,\bar{\lambda}^{qt}$$

і є розв'язком системи рівнянь (3).

Теорему 3 доведено.

Розглянемо тепер неоднорідну систему рівнянь вигляду

$$y(t+1) = Jy(t) + \tilde{B}y(qt) + \hat{F}(t) \tag{16}$$

у випадку, коли виконуються такі умови:

1) $\lambda_i > 1, i = 1, \ldots, m, q > 1$;

2) $\dfrac{(\lambda_*^{-1} + \delta_4)\tilde{b}}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_4)} = \theta < 1$;

3) всі елементи вектор-функції $\hat{F}(t)$ є неперервними й обмеженими при всіх $t \in R$ функціями і $\sup_t |\hat{F}(t)\| = \hat{M} < \infty$.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови 1 – 3. Тоді система рівнянь (16) має неперервний обмежений при $t \in R$ розв'язок*

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{y}_i(t), \tag{17}$$

де $\hat{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні й обмежені при $t \in R$ вектор-функції.

Доведення. Підставляючи (17) в (16), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \hat{y}_i(t+1) = J \sum_{i=0}^{\infty} \hat{y}_i(t) + \tilde{B} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{y}_i(qt) + \hat{F}(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $\hat{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\hat{y}_0(t+1) = J\hat{y}_0(t) + \hat{F}(t), \tag{18_0}$$

$$\hat{y}_i(t+1) = J\hat{y}_i(t) + \tilde{B}\hat{y}_{i-1}(qt), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{18_i}$$

то ряд (17) є формальним розв'язком системи рівнянь (16).

Згідно з умовами теореми ряд

$$\hat{y}_0(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} J^{-(j+1)} \hat{F}(t+j)$$

рівномірно збігається при всіх $t \in R$, задовольняє систему рівнянь (18_0) (в цьому можна переконатися безпосередньою підстановкою в (18_0)) і виконується оцінка

$$|\hat{y}_0(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |J^{-1}|^{j+1} |\hat{F}(t+j)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1} + \delta_4)^{j+1} \hat{M} \leq \frac{(\lambda_*^{-1} + \delta_4)\hat{M}}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_4)} = \hat{M}_*.$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (18_i), $i = 1, 2, \ldots,$ можна за індукцією довести, що ряди

$$\hat{y}_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} J^{-(j+1)} \tilde{B}\hat{y}_{i-1}(q(t+j)), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

рівномірно збігаються при всіх $t \in R$, задовольняють відповідні системи рівнянь (18_i), $i = 1, 2, \ldots,$ і виконуються оцінки

$$|\hat{y}_i(t)| \leq \hat{M}_* \theta^i, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Звідси безпосередньо випливає, що ряд (17) рівномірно збігається при $t \in R$ до деякої неперервної вектор-функції $\hat{y}(t)$, яка задовольняє умову

$$|\hat{y}(t)| \leq \frac{\hat{M}_*}{1-\theta}$$

і є розв'язком системи рівнянь (16).

Література

1. *Birkhoff G. D.* General theory of linear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1911. — **12**. — P. 243 – 284.
2. *Birkhoff G. D.* Formal theory of irregular linear difference equations // Acta Math. — 1930. — **54**. — P. 205 – 246.
3. *Carmichael R. D.* Linear difference equations and their analytic solutions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1911. — **12**. — P. 99 – 134.
4. *Adams C. R.* On the irregular cases of linear ordinary difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1928. — **30**, № 3. — P. 507 – 541.
5. *Tzjitzinsky W. J.* Analytic theory of linear q-difference equations // Acta Math. — 1933. — **61.** — P. 1 – 38.
6. *Миролюбов А. А., Солдатов М. А.* Линейные неоднородные разностные уравнения. — М.: Наука, 1986. — 128 с.
7. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л, Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1986. — 280 с.
8. *Пелюх Г. П.* К теории систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // Докл. АН. — 2006. — **5**, № 5. — С. 600 – 603.
9. *Пелюх Г. П.* О периодических решениях систем линейных разностных уравнений в критическом случае // Дифференц. уравнения. — 2008. — № 3. — С. 421 – 423.
10. *Пелюх Г. П., Сівак О. А.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 3. — С. 307 – 335.

Одержано 07.10.14