УДК 517.968.72

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Д. С. Джумабаев, Э. А. Бакирова

Ин-т математики и мат. моделирования МОН Республики Казахстан
ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан
e-mail: dzhumabaev@list.ru
bakirova1974@mail.ru

A linear boundary-value problem for systems of Fredholm integro-differential equations with degenerate kernel is considered. Definition of ν-regular partition of an interval is given. Coefficient necessary and sufficient conditions for unique solvability of the considered problem are found.

Розглядається лінійна крайова задача для систем інтегро-диференціальних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром. Наведено означення ν-регулярного розбиття інтервалу. Встановлено коефіцієнтні необхідні та достатні умови однозначної розв'язності розглядуваної задачі.

1. Введение. Интегро-дифференциальные уравнения находят широкое применение во многих разделах прикладной математики, являясь математической моделью процессов физики, химии, биологии, экономики и др.

Качественные свойства интегро-дифференциальных уравнений, начальных и краевых задач для этих уравнений различными методами исследованы в [1–10].

Построению приближенных методов нахождения решений интегро-дифференциальных уравнений посвящены работы [11–15]. В [3] предложен метод исследования и решения линейной двухточечной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма, основанный на разбиении интервала на части с достаточно малым шагом разбиения и введении дополнительных параметров. Малость шага разбиения обеспечивает однозначную разрешимость промежуточной задачи метода — специальной задачи Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений с параметрами.

В [16] этот метод распространен на случай произвольного разбиения интервала. Введено определение регулярного разбиения Δ_N и показано, что регулярность разбиения эквивалентна однозначной разрешимости специальной задачи Коши. Получен критерий разрешимости линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма. В терминах матрицы $Q_*(\Delta_N)$, составляемой с помощью фундаментальной матрицы дифференциальной части, установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи.

В настоящей работе для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{k=1}^{m} \int_0^T \varphi_k(t)\psi_k(s)x(s)ds + f(t), \quad t \in (0,T), \quad x \in R^n, \tag{1.1}$$

рассматривается задача с линейным двухточечным краевым условием

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n. \tag{1.2}$$

Здесь матрицы $A(t)$, $\varphi_k(t)$, $\psi_k(s)$, $k = \overline{1,m}$, и вектор $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$.

Через $C([0,T], R^n)$ обозначим пространство непрерывных на $[0,T]$ функций $x : [0,T] \to \to R^n$ с нормой $\|x\|_1 = \max_{t\in[0,T]} \|x(t)\| = \max_{t\in[0,T]} \max_{i=\overline{1,n}} |x_i(t)|$.

Решением задачи (1.1), (1.2) является непрерывно дифференцируемая на $(0,T)$ вектор-функция $x(t) \in C([0,T], R^n)$, удовлетворяющая системе интегро-дифференциальных уравнений (1.1) и краевым условиям (1.2).

Целью работы является установление критерия однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.2) в терминах исходных данных без использования фундаментальной матрицы дифференциальной части уравнения (1.1).

Анонс некоторых результатов статьи содержится в [17].

2. ν-Регулярное разбиение и однозначная разрешимость специальной задачи Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений. Возьмем точки $t_0 = 0 < t_1 < \ldots \ldots < t_N = T$ и разбиение интервала $[0,T)$ на N подынтервалов $[0,T) = \bigcup_{r=1}^{N} [t_{r-1}, t_r)$ обозначим через Δ_N.

Сужение функции $x(t)$ на r-й интервал $[t_{r-1}, t_r)$ обозначим через $x_r(t)$, т. е. $x_r(t) = x(t)$ при $t \in [t_{r-1}, t_r)$.

Введем дополнительные параметры $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$ и на каждом r-м интервале выполним замену функции $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$. Тогда задача (1.1), (1.2) перейдет в эквивалентную краевую задачу с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s)(u_j(s) + \lambda_j)ds + f(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \tag{2.1}$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,N}, \tag{2.2}$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_N + C \lim_{t\to T-0} u_N(t) = d, \tag{2.3}$$

$$\lambda_s + \lim_{t\to t_s-0} u_s(t) - \lambda_{s+1} = 0, \quad s = \overline{1, N-1}. \tag{2.4}$$

Здесь (2.4) — условия склеивания решения во внутренних точках разбиения $t = t_s$, $s = = \overline{1, N-1}$.

Через $C([0,T], \Delta_N, R^{nN})$ обозначим пространство систем функций $u[t] = (u_1(t), u_2(t), \ldots \ldots, u_N(t))$, где функции $u_r(t)$ непрерывны на $[t_{r-1}, t_r)$ и имеют конечные левосторонние пределы $\lim_{t\to t_r-0} u_r(t)$ при всех $r = \overline{1,N}$, с нормой $\|u[\cdot]\|_2 = \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|u_r(t)\|$.

Отметим, что если пара $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}[t])$, где $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \ldots, \widetilde{\lambda}_N) \in R^{nN}$, $\widetilde{u}[t] = (\widetilde{u}_1(t), \widetilde{u}_2(t), \ldots \ldots, \widetilde{u}_N(t)) \in C([0,T], \Delta_N, R^{nN})$, — решение задачи (2.1) – (2.4), то функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\widetilde{x}(t) = \widetilde{\lambda}_r + \widetilde{u}_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$, $\widetilde{x}(T) = \widetilde{\lambda}_N + \lim_{t\to T-0} \widetilde{u}_N(t)$, будет решением задачи (1.1), (1.2). И наоборот, если $x^*(t)$ является решением задачи (1.1), (1.2), то пара $(\lambda^*, u^*[t])$ с элементами $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_N^*) \in R^{nN}$, $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), \ldots$

$\ldots, u_N^*(t))$, где $\lambda_r^* = x^*(t_{r-1})$, $u_r^*(t)$ — сужение функции $x^*(t) - x^*(t_{r-1})$ на $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$, будет решением задачи (2.1)–(2.4).

При фиксированных значениях $\lambda \in R^{nN}$ система функций $u[t]$ определяется из (2.1), (2.2) — специальной задачи Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений. Интегрируя обе части (2.1) и используя (2.2), получаем систему интегральных уравнений

$$u_r(t) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau)u_r(\tau)d\tau + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau)\lambda_r d\tau + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(\tau) \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s)u_j(s)dsd\tau +$$

$$+ \int\limits_{t_{r-1}}^{t} \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(\tau) \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s)\lambda_j dsd\tau + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} f(\tau)d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}. \quad (2.5)$$

Пусть $P(t)$ — непрерывная на $[t_{r-1}, t_r)$ квадратная матрица (или вектор размерности n), имеющая конечный левосторонний предел $\lim_{t \to t_r - 0} P(t)$, $r = \overline{1, N}$. Возьмем натуральное число ν и введем обозначение

$$E_{\nu,r}(A(\cdot), P(\cdot), t) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} P(\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1) \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_1} P(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1) \ldots \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} P(\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \ldots d\tau_1, \quad t \in [t_{r-1}, t_r).$$

Очевидно, что матрица (или вектор) $E_{\nu,r}(A(\cdot), P(\cdot), t)$ непрерывна на $[t_{r-1}, t_r)$ и имеет конечный левосторонний предел $\lim_{t \to t_r - 0} E_{\nu,r}(A(\cdot), P(\cdot), t) = E_{\nu,r}(A(\cdot), P(\cdot), t_r)$ для всех $\nu \in \mathbb{N}, r = \overline{1, N}$. Нетрудно убедиться в том, что $E_{*,r}(A(\cdot), P(\cdot), t) = \lim_{\nu \to \infty} E_{\nu r}(A(\cdot), P(\cdot), t)$ является равномерно сходящимся рядом на $[t_{r-1}, t_r)$. При этом $E_{*,r}(A(\cdot), P(\cdot), t)$ непрерывна на $[t_{r-1}, t_r)$ и имеет конечный предел $\lim_{t \to t_r - 0} E_{*r}(A(\cdot), P(\cdot), t) = E_{*,r}(A(\cdot), P(\cdot), t_r)$.

Подставив в первое слагаемое правой части (2.5) вместо $u_r(\tau)$, $r = \overline{1, N}$, соответствующую правую часть (2.5) и повторив этот процесс $\nu \in \mathbb{N}$ раз, получим представление $u_r(t)$ вида

$$u_r(t) = E_{\nu,r}\Bigg(A(\cdot), A(\cdot)\lambda_r + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(\cdot) \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s)ds\lambda_j +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(\cdot) \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s)u_j(s)ds + f(\cdot), t\Bigg) +$$

$$+ \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1) \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_1} A(\tau_2) \ldots \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)u_r(\tau_\nu)d\tau_\nu \ldots d\tau_2 d\tau_1, \quad t \in [t_{r-1}, t_r). \quad (2.6)$$

Введя обозначения

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s) u_j(s) ds, \tag{2.7}$$

$$D_{r,r}^{(\nu)}(\Delta_N, t) = E_{\nu,r} \left(A(\cdot), A(\cdot) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(\cdot) \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_k(s) ds, t \right), \quad r = \overline{1, N}, \tag{2.8}$$

$$D_{r,j}^{(\nu)}(\Delta_N, t) = E_{\nu,r} \left(A(\cdot), \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(\cdot) \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s) ds, t \right), \quad r \neq j, \quad j = \overline{1, N}, \tag{2.9}$$

$$F_{\nu,r}(\Delta_N, t) = E_{\nu r} \left(A(\cdot), f(\cdot), t \right), \quad r = \overline{1, N}, \tag{2.10}$$

$$g_\nu^A(\Delta_N, u_r, t) = \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1) \ldots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu) u_r(\tau_\nu) d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \ldots d\tau_1, \tag{2.11}$$

систему (2.6) запишем в виде

$$u_r(t) = \sum_{j=1}^{N} D_{r,j}^{(\nu)}(\Delta_N, t) \lambda_j + \sum_{k=1}^{m} E_{\nu,r} \left(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t \right) \mu_k +$$

$$+ F_{\nu,r}(\Delta_N, t) + g_\nu^A(\Delta_N, u_r, t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}. \tag{2.12}$$

Полагая в (2.12) $t = \tau$, умножая обе части на $\psi_p(\tau)$, интегрируя по τ на $[t_{r-1}, t_r]$ и суммируя левые и правые части по r, имеем

$$\mu_p = \sum_{k=1}^{m} G_{p,k}(\nu, \Delta_N) \cdot \mu_k + \sum_{r=1}^{N} V_{p,r}(\nu, \Delta_N) \lambda_r + F_p(\nu, \Delta_N) + g_p(\nu, \Delta_N, u), \;\; p = \overline{1, m}, \tag{2.13}$$

где

$$G_{p,k}(\nu, \Delta_N) = \sum_{r=1}^{N} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau) E_{\nu,r} \left(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), \tau \right) d\tau,$$

$$V_{p,r}(\nu, \Delta_N) = \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau) \sum_{j=1}^{N} D_{r,j}^{(\nu)}(\Delta_N, \tau) d\tau,$$

$$F_p(\nu, \Delta_N) = \sum_{r=1}^{N} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau) F_{\nu,r}(\Delta_N, \tau) d\tau, \quad g_p(\nu, \Delta_N, u) = \sum_{r=1}^{N} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau) g_\nu^A(\Delta_N, u_r, \tau) d\tau.$$

По $(n \times n)$-матрицам $G_{p,k}(\nu, \Delta_N)$, $p, k = \overline{1, m}$, $V_{p,r}(\nu, \Delta_N)$, $r = \overline{1, N}$, составим $(nm \times nm)$-матрицу $G(\nu, \Delta_N) = (G_{p,k}(\nu, \Delta_N))$ и $(nm \times nN)$-матрицу $V(\nu, \Delta_N) = (V_{p,r}(\nu, \Delta_N))$. Систему (2.13) запишем в виде

$$[I - G(\nu, \Delta_N)]\mu = V(\nu, \Delta_N)\lambda + F(\nu, \Delta_N) + g(\nu, \Delta_N, u), \tag{2.14}$$

где $I-$ единичная матрица размерности nm, векторы $F(\nu, \Delta_N) = (F_1(\nu, \Delta_N), F_2(\nu, \Delta_N), \ldots$ $\ldots, F_m(\nu, \Delta_N)), g(\nu, \Delta_N, u) = (g_1(\nu, \Delta_N, u), g_2(\nu, \Delta_N, u), \ldots, g_m(\nu, \Delta_N, u))$ принадлежат R^{nm}.

Определение 2.1. *Разбиение Δ_N называется ν-регулярным, если матрица $I - G(\nu, \Delta_N)$ имеет обратную.*

Множество ν-регулярных разбиений Δ_N обозначим через $\sigma_\nu([0, T])$.

Лемма 2.1. *Множество $\sigma_\nu([0, T])$ не пусто.*

Доказательство. Через $\widetilde{\Delta}_N$ обозначим разбиение интервала $[0, T]$ на N равных частей с шагом $h > 0 : Nh = T$.

Пусть

$$\alpha = \max_{t\in[0,T]} \|A(t)\|, \quad \widehat{\psi} = \max_{k=\overline{1,m}} \max_{t\in[0,T]} \|\psi_k(t)\|, \quad \widehat{\varphi} = \max_{k=\overline{1,m}} \max_{t\in[0,T]} \|\varphi_k(t)\|$$

и

$$\delta_\nu(h) = T\widehat{\psi}\widehat{\varphi}mh \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!}.$$

Поскольку

$$\|G_{p,k}(\nu, \widetilde{\Delta}_N)\| \le \sum_{r=1}^{N} \int\limits_{(r-1)h}^{rh} \|\psi_p(\tau)\| \|E_{\nu,r}\left(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), \tau\right)\| d\tau,$$

то в силу оценки

$$\|E_{\nu,r}\left(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t\right)\| \le h \left[1 + \alpha h + \frac{(\alpha h)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\alpha h)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\right] \max_{t\in[0,T]} \|\varphi_k(t)\| \tag{2.15}$$

имеем

$$\|G(\nu, \widetilde{\Delta}_N)\| = \max_{p=\overline{1,m}} \sum_{k=1}^{m} \|G_{p,k}(\nu, \widetilde{\Delta}_N)\| \le$$

$$\le \max_{p=\overline{1,m}} \sum_{k=1}^{m} \sum_{r=1}^{N} \int\limits_{(r-1)h}^{rh} d\tau \max_{t\in[0,T]} \|\psi_p(t)\| \max_{t\in[0,T]} \|\varphi_k(t)\| h \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!} \le \delta_\nu(h). \tag{2.16}$$

Из неравенства (2.16) и теоремы о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов [18, с. 142] следует, что для любого $h > 0$, удовлетворяющего неравенству $\delta_\nu(h) < 1$, матрица $I - G(\nu, \widetilde{\Delta}_N)$ будет обратима, т. е. $\widetilde{\Delta}_N \in \sigma_\nu([0, T])$.

Лемма 2.1 доказана.

Определение 2.2. *Специальная задача Коши (2.1), (2.2) называется однозначно разрешимой, если для любой пары* $(\lambda, f(t))$, *где* $\lambda \in R^{nN}$, $f(t) \in C([0,T], R^n)$, *она имеет единственное решение.*

Рассмотрим произвольное разбиение $\Delta_N : t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_N = T$, принадлежащее множеству $\sigma_\nu([0,T])$. Введем обозначения $\beta = \max_{t\in[0,T]} \max_{s\in[0,T]} \| \sum_{k=1}^m \varphi_k(t)\psi_k(s)\|$, $h_r = t_r - t_{r-1}$, $r = \overline{1,N}$, $\Lambda_r(\nu, \Delta_N) = \left(1 + \beta T h_r \sum_{j=0}^{\nu-1} \dfrac{(\alpha h_r)^j}{j!} \|[I - G(\nu, \Delta_N)]^{-1}\|\right)$.

Теорема 2.1. *Пусть для выбранных* $\nu \in \mathbb{N}$ *и* $\Delta_N \in \sigma_\nu([0,T])$ *выполняется неравенство*

$$\xi_\nu(\Delta_N) = \max_{r=\overline{1,N}} \frac{(\alpha h_r)^\nu}{\nu!} \Lambda_r(\nu, \Delta_N) < 1. \tag{2.17}$$

Тогда специальная задача Коши (2.1),(2.2) однозначно разрешима.

Доказательство. Пусть $\nu \in \mathbb{N}$ и $\Delta_N \in \sigma_\nu([0,T])$. Матрицу $[I - G(\nu, \Delta_N)]^{-1}$ представим в виде $(M_{p,k}(\nu, \Delta_N))$, $p, k = \overline{1,m}$, где $M_{p,k}(\nu, \Delta_N)$ — квадратные матрицы размерности n. Тогда блочные элементы вектора $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$ — решения системы (2.14) — имеют вид

$$\mu_p = \sum_{k=1}^m M_{p,k}(\nu, \Delta_N) \left[\sum_{j=1}^N V_{k,j}(\nu, \Delta_N)\lambda_j + F_k(\nu, \Delta_N) + g_k(\nu, \Delta_N, u)\right], \quad p = \overline{1,m}. \tag{2.18}$$

Для доказательства однозначной разрешимости специальной задачи Коши (2.1), (2.2) рассмотрим эквивалентное интегральное уравнение (2.12). Подставляя в (2.12) вместо μ_k правую часть (2.18), получаем следующую систему уравнений относительно $u_r(t)$, $r = \overline{1,N}$:

$$u_r(t) = \sum_{j=1}^N D_{r,j}^{(\nu)}(\Delta_N, t)\lambda_j + F_{\nu,r}(\Delta_N, t) + g_\nu^A(\Delta_N, u_r, t) + \sum_{k=1}^m E_{\nu,r}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t)\times$$
$$\times \sum_{p=1}^m M_{k,p}(\nu, \Delta_N) \left[\sum_{r=1}^N V_{p,r}(\nu, \Delta_N)\lambda_r + F_p(\nu, \Delta_N) + g_p(\nu, \Delta_N, u)\right], \; t \in [t_{r-1}, t_r). \tag{2.19}$$

Решение (2.19) найдем методом последовательных приближений. За начальное приближение возьмем $u_r^{(0)}(t) = 0$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$, и последующие приближения определим равенствами

$$u_r^{(i+1)}(t) = \sum_{j=1}^N D_{r,j}^{(\nu)}(\Delta_N, t)\lambda_j + F_{\nu,r}(\Delta_N, t) + g_\nu^A(\Delta_N, u_r^{(i)}, t) + \sum_{k=1}^m E_{\nu r}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t)\times$$
$$\times \sum_{p=1}^m M_{k,p}(\nu, \Delta_N) \left[\sum_{r=1}^N V_{p,r}(\nu, \Delta_N)\lambda_r + F_p(\nu, \Delta_N) + g_p(\nu, \Delta_N, u^{(i)})\right], \; t \in [t_{r-1}, t_r).$$

Для разности $u_r^{(i+1)}(t) - u_r^{(i)}(t)$ справедлива оценка

$$\|u^{(i+1)}[\cdot] - u^{(i)}[\cdot]\|_2 = \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|u_r^{(i+1)}(t) - u_r^{(i)}(t)\| \le$$

$$\le \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \Bigg[\|g_\nu^A(\Delta_N, u_r^{(i)} - u_r^{(i-1)}, t)\| + \sum_{k=1}^m \|E_{\nu r}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t)\| \times$$

$$\times \sum_{p=1}^m \|M_{k,p}(\nu, \Delta_N)\| \cdot \|g_p(\nu, \Delta_N, u^{(i)} - u^{(i-1)})\|\Bigg]. \tag{2.20}$$

Если $\psi_p(t)$, $k = \overline{1,m}$, $u_r(t)$, $r = \overline{1,N}$, непрерывны и ограничены на $[t_{r-1}, t_r)$, то справедливы оценки

$$\|g_\nu^A(\Delta_N, u_r, t)\| \le \frac{(\alpha h_r)^\nu}{\nu!} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|u_r(t)\|, \tag{2.21}$$

$$\|g_p(\nu, \Delta_N, u)\| \le T \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|\psi_p(t)\| \cdot \|g_\nu^A(\Delta_N, u_r, t)\|. \tag{2.22}$$

В силу (2.15), (2.21), (2.22) из (2.20) следует

$$\|u^{(i+1)}[\cdot] - u^{(i)}[\cdot]\|_2 \le \max_{r=\overline{1,N}} \frac{(\alpha h_r)^\nu}{\nu!} \Lambda_r(\nu, \Delta_N) \|u^{(i)}[\cdot] - u^{(i-1)}[\cdot]\|_2 =$$

$$= \xi_\nu(\Delta_N) \|u^{(i)}[\cdot] - u^{(i-1)}[\cdot]\|_2. \tag{2.23}$$

Учитывая, что по условию теоремы $\xi_\nu(\Delta_N) < 1$, на основе принципа сжимающих отображений получаем существование единственного решения уравнения (2.19).

Пусть $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), \ldots, u_N^*(t)) \in C([0,T], \Delta_N, R^{nN})$ —решение уравнения (2.19) при $\lambda = \lambda^*$ и $\mu_p^* = \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_p(s) u_j^*(s)ds$. Тогда из (2.19) следует, что

$$\mu_p^* = \sum_{r=1}^N V_{k,r}(\nu, \Delta_N)\lambda_r^* + F_p(\nu, \Delta_N) + g_p(\nu, \Delta_N, u^*) + \sum_{k=1}^m G_{p,k}(\nu, \Delta_N) \times$$

$$\times \sum_{s=1}^m M_{k,s}(\nu, \Delta_N) \left[\sum_{r=1}^N V_{s,r}(\nu, \Delta_N)\lambda_r^* + F_s(\nu, \Delta_N) + g_s(\nu, \Delta_N, u^*)\right], \quad p = \overline{1,m}. \tag{2.24}$$

Вектор $a^* = (a_1^*, a_2^*, \ldots, a_m^*)$, где

$$a_p^* = \sum_{s=1}^m M_{p,s}(\nu, \Delta_N) \left[\sum_{r=1}^N V_{s,r}(\nu, \Delta_N)\lambda_r^* + F_s(\nu, \Delta_N) + g_s(\nu, \Delta_N, u^*)\right],$$

будет единственным решением систем уравнений (2.13), и имеют место равенства

$$a_p^* = \sum_{k=1}^{m} G_{p,k}(\nu,\Delta_N)a_k^* + \sum_{r=1}^{N} V_{p,r}(\nu,\Delta_N)\lambda_r^* + F_p(\nu,\Delta_N) + g_p(\nu,\Delta_N,u^*), \quad p=\overline{1,m}.$$

Отсюда следует соотношение

$$\sum_{r=1}^{N} V_{p,r}(\nu,\Delta_N)\lambda_r^* + F_p(\nu,\Delta_N) + g_p(\nu,\Delta_N,u^*) = a_p^* - \sum_{k=1}^{m} G_{p,k}(\nu,\Delta_N)a_k^*, \quad p=\overline{1,m}. \tag{2.25}$$

Подставив в (2.24) правую часть (2.25), получим

$$\mu_p^* = a_p^* - \sum_{k=1}^{m} G_{p,k}(\nu,\Delta_N)a_k^* + \sum_{k=1}^{m} G_{p,k}(\nu,\Delta_N)a_k^* = a_p^*, \quad p=\overline{1,m}. \tag{2.26}$$

Из (2.19) и (2.26) следует, что

$$u_r^*(t) = \sum_{j=1}^{N} D_{r,j}^{(\nu)}(\Delta_N,t)\lambda_j^* + F_{\nu,r}(\Delta_N,t) + g_\nu^A(\Delta_N,u_r^*,t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} E_{\nu,r}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),t)\mu_k^*, \quad t\in[t_{r-1},t_r), \quad r=\overline{1,N}.$$

Используя обозначения (2.8) – (2.11), записываем функции $u_r^*(t)$ в виде

$$u_r^*(t) = E_{\nu,r}\left(A(\cdot), A(\cdot)\lambda_r^* + \sum_{k=1}^{m}\varphi_k(\cdot)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(s)(\lambda_j^*+u_j^*(s))ds + f(\cdot), t\right) +$$

$$+ \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\ldots\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1})\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)u_r^*(\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_1, \ t\in[t_{r-1},t_r), \ r=\overline{1,N}. \tag{2.27}$$

Очевидно, что $u_r^*(t_{r-1}) = 0$, $r=\overline{1,N}$, т. е. выполняются начальные условия (2.2). Подставляя во второе слагаемое (2.27) вместо $u_r^*(\tau_\nu)$ соответствующую правую часть равенства (2.27) и используя соотношение

$$E_{\nu,r}(A(\cdot),P(\cdot),t) + \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\ldots\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)E_{\nu,r}(A(\cdot),P(\cdot),\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1 = E_{2\nu,r}(A(\cdot),P(\cdot),t),$$

для $u_r^*(t)$ получаем представление

$$u_r^*(t) = E_{2\nu,r}\left(A(\cdot), A(\cdot)\lambda_r^* + \sum_{k=1}^{m}\varphi_k(\cdot)\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(s)(\lambda_j^* + u_j^*(s))ds + f(\cdot), t\right) + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\ldots$$

$$\ldots\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)\ldots\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{2\nu-1}} A(\tau_{2\nu})u_r^*(\tau_{2\nu})d\tau_{2\nu}\ldots d\tau_\nu\ldots d\tau_1, \quad t\in[t_{r-1},t_r), \quad r=\overline{1,N}.$$

Повторяя этот процесс l раз, имеем

$$u_r^*(t) = E_{l\nu,r}\left(A(\cdot), A(\cdot)\lambda_r^* + \sum_{k=1}^{m}\varphi_k(\cdot)\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(s)(\lambda_j^* + u_j^*(s))ds + f(\cdot), t\right) +$$

$$+ g_{l\nu}^A(\Delta_N, u_r^*, t), \quad l = 1, 2, \ldots.$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $l\to\infty$ и учитывая, что $\|g_{l\nu}^A(\Delta_N, u_r^*, t)\| \le$ $\le \dfrac{(\alpha h)^{l\nu}}{(l\nu)!}\|u^*\|$, $r=\overline{1,N}$, получаем

$$u_r^*(t) = E_{*,r}\left(A(\cdot), A(\cdot)\lambda_r^* + \sum_{k=1}^{m}\varphi_k(\cdot)\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(s)(\lambda_j^* + u_j^*(s))ds + f(\cdot), t\right), \quad t\in[t_{r-1},t_r).$$

Принимая во внимание равенства

$$E_{*,r}(A(\cdot),\Psi(\cdot),t) = \int\limits_a^t \Psi(\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_a^t A(\tau_1)\int\limits_a^{\tau_1}\Psi(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 +$$

$$+\int\limits_a^t A(\tau_1)\int\limits_a^{\tau_1}A(\tau_2)\int\limits_a^{\tau_2}\Psi(\tau_3)d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 + \ldots =$$

$$= X(t)\int\limits_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau)\Psi(\tau)d\tau, \quad a,t\in[0,T], \quad r=\overline{1,N}, \tag{2.28}$$

где $X(t)$ — фундаментальная матрица дифференциального уравнения $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x$ на

$[0,T]$, имеем

$$u_r^*(t) = X(t) \int\limits_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau)\Bigg(A(\tau)\lambda_r^* + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(\tau) \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s)(\lambda_j^* +$$

$$+ u_j^*(s))ds + f(\tau)\Bigg)d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,N}. \tag{2.29}$$

Из (2.29) следует, что для всех $r = \overline{1,N}$ функция $u_r^*(t)$ имеет непрерывную производную на $[t_{r-1}, t_r)$ и

$$\frac{du_r^*(t)}{dt} = A(t)(u_r^*(t) + \lambda_r^*) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s)(\lambda_j^* + u_j^*(s))ds + f(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r).$$

Таким образом, система функций $u^*[t]$ является решением специальной задачи Коши (2.1), (2.2) при $\lambda = \lambda^*$.

Докажем единственность. Пусть $\widetilde{u}[t] = (\widetilde{u}_1(t), \widetilde{u}_2(t), \ldots, \widetilde{u}_N(t))$ — другое решение специальной задачи Коши (2.1), (2.2) при $\lambda = \lambda^*$. Тогда для систем функций $v[t] = (v_1(t), v_2(t), \ldots, v_N(t))$, где $v_r(t) = u_r^*(t) - \widetilde{u}_r(t)$, аналогично (2.23) устанавливается неравенство

$$\|v[\cdot]\|_2 \le \xi_\nu(\Delta_N)\|v[\cdot]\|_2.$$

Поскольку $\xi_\nu(\Delta_N) < 1$, отсюда следует, что $\|v[\cdot]\|_2 = 0$.

Теорема 2.1 доказана.

В [16, с. 1080] введено определение регулярного разбиения интервала $[0,T]$. Из этого определения и леммы 1 [16, с. 1078] следует эквивалентность регулярности разбиения и однозначной разрешимости специальной задачи Коши при фиксированных значениях параметра. Также в [16, с. 1087] отмечено, что для вырожденных ядер регулярность разбиения эквивалентна обратимости матрицы $I - G(*, \Delta_N)$, где $G(*\Delta_N) = \lim_{\nu\to\infty} G(\nu, \Delta_N)$.

Следующая теорема показывает, что условия теоремы 2.1 не только достаточны, но и необходимы для однозначной разрешимости специальной задачи Коши (2.1), (2.2).

Теорема 2.2. *Если при выбранном разбиении Δ_N специальная задача Коши (2.1), (2.2) однозначно разрешима, то существует такое $\nu \in \mathbb{N}$, что $\Delta_N \in \sigma_\nu([0,T])$ и выполняется неравенство (2.17).*

Доказательство. Пусть при выбранном Δ_N специальная задача Коши (2.1), (2.2) однозначно разрешима. Тогда, как было отмечено выше, матрица $I - G(*, \Delta_N)$ обратима и $\|[I - G(*, \Delta_N)]^{-1}\| \le \chi^*$. Поскольку

$$\|G(*, \Delta_N) - G(\nu, \Delta_N)\| \le \max_{r=\overline{1,N}} \left\{T\beta h_r \left(e^{\alpha h_r} - 1 - \alpha h_r - \ldots - \frac{(\alpha h_r)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\right)\right\}$$

и правая часть неравенства при $\nu \to \infty$ стремится к нулю, то найдется ν_1, при котором

$$\|[I - G(*, \Delta_N)]^{-1}\| \max_{r=\overline{1,N}} \left\{T\beta h_r \left(e^{\alpha h_r} - 1 - \alpha h_r - \ldots - \frac{(\alpha h_r)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\right)\right\} < \frac{1}{2}.$$

Тогда по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов для любого $\nu \geq \nu_1$ матрица $I - G(\nu, \Delta_N)$ обратима и справедлива оценка

$$\|[I - G(\nu, \Delta_N)]^{-1}\| \leq \frac{\chi_*}{1 - \frac{1}{2}} = 2\chi_*.$$

Выбирая $\widetilde{\nu} > \nu_1$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\xi_{\widetilde{\nu}}(\Delta_N) = \max_{r=\overline{1,N}} \frac{(\alpha h_r)^{\widetilde{\nu}}}{\widetilde{\nu}!} \left(1 + \beta T h_r \sum_{j=0}^{\widetilde{\nu}-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} 2\chi_*\right) < 1,$$

получаем утверждение теоремы.

Теорема 2.2 доказана.

3. Однозначная разрешимость линейной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений. Рассмотрим краевую задачу (1.1), (1.2).

Определение 3.1. *Задача (1.1), (1.2) называется однозначно разрешимой, если для любой пары $(f(t), d)$, где $f(t) \in C([0,T], R^n)$, $d \in R^n$, она имеет единственное решение.*

Предположим, что $\Delta_N \in \sigma_\nu([0,T])$. Тогда из (2.19) определив $\lim_{t\to t_r-0} u_r(t)$, $r = \overline{1,N}$, подставив соответствующие выражения в краевое условие (2.3) и условия склеивания (2.4), получим систему линейных уравнений относительно введенных параметров λ_r, $r = \overline{1,N}$:

$$B\lambda_1 + C\lambda_N + C\sum_{j=1}^{N} D_{N,j}^{(\nu)}(\Delta_N, T)\lambda_j + C\sum_{k=1}^{m} E_{\nu,N}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), T)\times$$
$$\times \sum_{p=1}^{m} M_{k,p}(\nu, \Delta_N) \sum_{r=1}^{N} V_{p,r}(\nu, \Delta_N)\lambda_r = d - CF_{\nu,N}(\Delta_N, T) -$$
$$- C\sum_{k=1}^{m} E_{\nu,N}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), T) \sum_{p=1}^{m} M_{k,p}(\nu, \Delta_N) F_p(\nu, \Delta_N) - Cg_\nu^A(\Delta_N, u_N, T) -$$
$$- C\sum_{k=1}^{m} E_{\nu,N}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), T) \sum_{p=1}^{m} M_{k,p}(\nu, \Delta_N) g_p(\nu, \Delta_N, u), \tag{3.1}$$

$$\lambda_s + \sum_{j=1}^{N} D_{s,j}^{(\nu)}(\Delta_N, t_s)\lambda_j + \sum_{k=1}^{m} E_{\nu,s}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_s) \sum_{p=1}^{m} M_{k,p}(\nu, \Delta_N) \sum_{r=1}^{N} V_{p,r}(\nu, \Delta_N)\lambda_r - \lambda_{s+1} =$$
$$= -F_{\nu,s}(\Delta_N, t_s) - \sum_{k=1}^{m} E_{\nu,s}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_s) \sum_{p=1}^{m} M_{k,p}(\nu, \Delta_N) F_p(\nu, \Delta_N) -$$
$$- g_\nu^A(\Delta_N, u_s, t_s) - \sum_{k=1}^{m} E_{\nu,s}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_s)\times$$

$$\times \sum_{p=1}^{m} M_{k,p}(\nu, \Delta_N) g_p(\nu, \Delta_N, u), \quad s = \overline{1, N-1}. \tag{3.2}$$

Соответствующую левой части системы (3.1), (3.2) матрицу размерности $nN \times nN$ обозначим через $Q_\nu(\Delta_N)$ и запишем ее в виде

$$Q_\nu(\Delta_N)\lambda = -F_\nu(\Delta_N) - W_\nu(u, \Delta_N), \quad \lambda \in R^{nN}, \tag{3.3}$$

где

$$F_\nu(\Delta_N) = \Bigg(-d + CF_{\nu,N}(\Delta_N, T) + C\sum_{k=1}^{m} E_{\nu,N}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), T) \sum_{p=1}^{m} M_{k,p}(\nu, \Delta_N) F_p(\nu, \Delta_N),$$

$$F_{\nu 1}(\Delta_N, t_1) + \sum_{k=1}^{m} E_{\nu,1}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_1) \sum_{p=1}^{m} M_{k,p}(\nu, \Delta_N) F_p(\nu, \Delta_N), \ldots$$

$$\ldots, F_{\nu,N-1}(\Delta_N, t_{N-1}) + \sum_{k=1}^{m} E_{\nu,N-1}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_{N-1}) \times$$

$$\times \sum_{p=1}^{m} M_{k,p}(\nu, \Delta_N) F_p(\nu, \Delta_N) \Bigg) \in R^{nN},$$

$$W_\nu(u, \Delta_N) = \Bigg(Cg_\nu^A(\Delta_N, u_N, T) + C\sum_{k=1}^{m} E_{\nu,N}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), T) \sum_{p=1}^{m} M_{k,p}(\nu, \Delta_N) g_p(\nu, \Delta_N, u),$$

$$g_\nu^A(\Delta_N, u_1, t_1) + \sum_{k=1}^{m} E_{\nu,1}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_1) \sum_{p=1}^{m} M_{k,p}(\nu, \Delta_N) g_p(\nu, \Delta_N, u), \ldots$$

$$\ldots, g_\nu^A(\Delta_N, u_{N-1}, t_{N-1}) + \sum_{k=1}^{m} E_{\nu,N-1}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_{N-1}) \times$$

$$\times \sum_{p=1}^{m} M_{k,p}(\nu, \Delta_N) g_p(\nu, \Delta_N, u) \Bigg) \in R^{nN}.$$

Таким образом, если $\Delta_N \in \sigma_\nu([0,T])$, то для нахождения неизвестных параметров λ_r, $r = \overline{1,N}$, получим систему линейных алгебраических уравнений (3.3). Неизвестные функции $u_r(t)$, $r = \overline{1,N}$, определяются из специальной задачи Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений (2.1) с начальными условиями (2.2).

Решение многоточечной краевой задачи с параметрами (2.1) – (2.4) найдем по следующему алгоритму:

Шаг 0: 1. Предполагая, что при выбранных $\nu \in \mathbb{N}$, $\Delta_N \in \sigma_\nu([0,T])$ матрица $Q_\nu(\Delta_N)$: $R^{nN} \to R^{nN}$ обратима, начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_N^{(0)}) \in$

$\in R^{nN}$ найдем из систем линейных уравнений $Q_\nu(\Delta_N)\lambda = -F_\nu(\Delta_N)$, т. е.

$$\lambda^{(0)} = -[Q_\nu(\Delta_N)]^{-1}F_\nu(\Delta_N).$$

2. Решая при найденных значениях параметра $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_N^{(0)})$ специальную задачу Коши для интегро-дифференциальных уравнений (2.1), (2.2), находим систему функций $u^{(0)}[t] = (u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \ldots, u_N^{(0)}(t))$.

Шаг 1: 1. Подставляя найденные $u_r^{(0)}(t)$ в правую часть (3.3), из уравнения $Q_\nu(\Delta_N)\lambda = -F_\nu(\Delta_N) - W_\nu(u^{(0)}, \Delta_N)$ определяем $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots, \lambda_N^{(1)}) \in R^{nN}$.

2. Решая специальную задачу Коши (2.1), (2.2) при $\lambda = \lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots, \lambda_N^{(1)})$, получаем систему функций $u^{(1)}[t] = (u_1^{(1)}(t), u_2^{(1)}(t), \ldots, u_N^{(1)}(t))$. Продолжая этот процесс, на i-м шаге алгоритма находим пару $(\lambda^{(i)}, u^{(i)}[t])$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Достаточные условия сходимости предложенного алгоритма и существования единственного решения краевой задачи (1.1), (1.2) устанавливает следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть при некоторых* $\nu \in \mathbb{N}$, $\Delta_N \in \sigma_\nu([0,T])$ *матрица* $Q_\nu(\Delta_N) : R^{nN} \to R^{nN}$ *обратима и выполняются неравенства*

$$\|[Q_\nu(\Delta_N)]^{-1}\| \le \gamma_\nu(\Delta_N), \tag{3.4}$$

$$\xi_\nu(\Delta_N) = \max_{r=\overline{1,N}} \frac{(\alpha h_r)^\nu}{\nu!} \Lambda_r(\nu, \Delta_N) < 1, \tag{3.5}$$

$$q_\nu(\Delta_N) = \gamma_\nu(\Delta_N) \max(1, \|C\|) \frac{\xi_\nu(\Delta_N)}{1 - \xi_\nu(\Delta_N)} \times$$
$$\times \max_{r=\overline{1,N}} \left(\sum_{j=1}^{\nu} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} + T\beta h_r \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \right) \Lambda_r(\nu, \Delta_N) < 1. \tag{3.6}$$

Тогда алгоритм сходится и краевая задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение.

Доказательство. Из обратимости $Q_\nu(\Delta_N)$ и неравенства (3.4) следует существование $\lambda^{(0)}$ и оценка

$$\|\lambda^{(0)}\| = \max_{r=\overline{1,N}} \|\lambda_r^{(0)}\| \le \|[Q_\nu(\Delta_N)]^{-1}\| \|F_\nu(\Delta_N)\| \le \gamma_\nu(\Delta_N)\|F_\nu(\Delta_N)\|.$$

Неравенство (3.5), согласно теореме 2.1, обеспечивает существование единственного решения специальной задачи Коши $u^{(0)}[t]$. При этом выполняется неравенство

$$\|u^{(0)}[\cdot]\|_2 = \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|u_r^{(0)}(t)\| \le \max_{r=\overline{1,N}} \left\{ \left[\sum_{j=1}^{\nu} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} + T\beta h_r \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \right] \times \right.$$
$$\left. \times \Lambda_r(\nu, \Delta_N)\|\lambda^{(0)}\| + \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \|f\|_1 h_r \Lambda_r(\nu, \Delta_N) + \xi_\nu(\Delta_N)\|u^{(0)}[\cdot]\|_2 \right\}.$$

Отсюда и из неравенства (3.5) следует, что

$$\|u^{(0)}[\cdot]\|_2 \le \frac{1}{1-\xi_\nu(\Delta_N)} \max_{r=\overline{1,N}} \left\{ \left[\sum_{j=1}^{\nu} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} + T\beta h_r \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \right] \Lambda_r(\nu,\Delta_N)\|\lambda^{(0)}\| + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \|f\|_1 h_r \Lambda_r(\nu,\Delta_N) \right\}.$$

По первому шагу алгоритма определим $\lambda^{(1)}$ и оценим $\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|$:

$$\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\| \le \gamma_\nu(\Delta_N)\|g_\nu(u^{(0)},\Delta_N)\| \le \gamma_\nu(\Delta_N)\max(1,\|C\|) \max_{r=\overline{1,N}} \frac{(\alpha h_r)^\nu}{\nu!} \times$$

$$\times \Lambda_r(\nu,\Delta_N) \frac{1}{1-\xi_\nu(\Delta_N)} \max_{r=\overline{1,N}} \left\{ \left[\sum_{j=1}^{\nu} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} + T\beta h_r \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \Lambda_r(\nu,\Delta_N)\|\lambda^{(0)}\| + \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \|f\|_1 h_r \Lambda_r(\nu,\Delta_N) \right\}.$$

Продолжая итерационный процесс, на i-м шаге находим последовательность пар $(\lambda^{(i)}, u^{(i)}[t])$, где $\lambda^{(i)} = (\lambda_1^{(i)},\lambda_2^{(i)},\ldots,\lambda_N^{(i)}) \in R^{nN}$, $u^{(i)}[t] = (u_1^{(i)}(t),u_2^{(i)}(t),\ldots,u_N^{(i)}(t)) \in C([0,T], \Delta_N, R^{nN})$.

Обратимость матрицы $Q_\nu(\Delta_N)$ обеспечивает существование и единственность $\lambda^{(i)}$. Из неравенства (3.5) следует существование единственной системы функций $u^{(i)}[t] = (u_1^{(i)}(t),u_2^{(i)}(t),\ldots,u_N^{(i)}(t))$ — решения специальной задачи Коши (2.1), (2.2) при $\lambda=\lambda^{(i)}$. При этом для элементов этой системы функций имеют место равенства

$$u_r^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^{N} D_{r,j}^{(\nu)}(\Delta_N,t)\lambda_j^{(i)} + F_{\nu,r}(\Delta_N,t) + g_\nu^A(\Delta_N,u_r^{(i)},t) + \sum_{k=1}^{m} E_{\nu r}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),t)\times$$

$$\times \sum_{p=1}^{m} M_{k,p}(\nu,\Delta_N) \left[\sum_{r=1}^{N} V_{p,r}(\nu,\Delta_N)\lambda_r^{(i)} + \right.$$

$$\left. + F_p(\nu,\Delta_N) + g_p(\nu,\Delta_N,u^{(i)}) \right], \quad t\in[t_{r-1},t_r), \quad r=\overline{1,N}.$$

Отсюда, вновь используя (3.5), получаем оценку

$$\|u^{(i)}[\cdot] - u^{(i-1)}[\cdot]\|_2 \le \frac{1}{1-\xi_\nu(\Delta_N)} \max_{r=\overline{1,N}} \left\{ \left(\sum_{j=1}^{\nu} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \; T\beta h_r \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \right) \Lambda_r(\nu, \Delta_N) \right\} \|\lambda^{(i)} - \lambda^{i-1}\|. \tag{3.7}$$

Поскольку $\lambda^{(i+1)}$, $\lambda^{(i)}$ являются решениями уравнения (3.3) при $u = u^{(i)}$, $u = u^{(i-1)}$ соответственно, то для их разности имеет место неравенство

$$\|\lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i)}\| \le \|[Q_\nu(\Delta_N)]^{-1}\| \|W_\nu(u^{(i)}, \Delta_N) - W_\nu(u^{(i-1)}, \Delta_N)\| \le \gamma_\nu(\Delta_N) \max(1, \|C\|) \times$$

$$\times \max_{r=\overline{1,N}} \frac{(\alpha h_r)^\nu}{\nu!} \Lambda_r(\nu, \Delta_N) \|u^{(i)}[\cdot] - u^{(i-1)}[\cdot]\|_2.$$

Подставляя вместо $\|u^{(i)}[\cdot] - u^{(i-1)}[\cdot]\|_2$ правую часть неравенства (3.7), получаем

$$\|\lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i)}\| \le q_\nu(\Delta_N) \|\lambda^{(i)} - \lambda^{(i-1)}\|, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{3.8}$$

В силу условия $q_\nu(\Delta_N) < 1$ и неравенств (3.7), (3.8) последовательность $\lambda^{(i)}$ сходится к $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_N^*)$ при $i \to \infty$, последовательность систем функции $u^{(i)}[t]$ по норме пространства $C([0,T], \Delta_N, R^{nN})$ сходится к $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), \ldots, u_N^*(t))$.

Тогда функция $x^*(t)$, определяемая равенствами $x^*(t) = \lambda_r^* + u_r^*(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$, $x^*(T) = \lambda_N^* + \lim_{t \to T-0} u_N^*(t)$, будет решением задачи (1.1), (1.2). Единственность решения задачи (1.1), (1.2) доказывается методом от противного на основе неравенств (3.7), (3.8).

Теорема 3.1 доказана.

Следующее утверждение показывает, что условия теоремы 3.1 являются также и необходимыми условиями однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.2).

Теорема 3.2. *Краевая задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда существуют $\nu \in \mathbb{N}$ и $\Delta_N \in \sigma_\nu([0,T])$, при которых матрица $Q_\nu(\Delta_N) : R^{nN} \to R^{nN}$ обратима и выполняются неравенства (3.4) – (3.6).*

Доказательство. *Достаточность* условий теоремы для однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.2) следует из теоремы 3.1. Докажем *необходимость*. Пусть задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима и Δ_N — регулярное разбиение интервала $[0,T]$.

Из вида $D_{r,j}^{(\nu)}(\Delta_N, t_j)$, $E_{\nu,j}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_j)$, $M_{k,p}(\nu, \Delta_N)$, $V_{p,r}(\nu, \Delta_N)$, $j = \overline{1,N}$, $r = \overline{1,N}$, следует существование пределов

$$D_{r,j}^*(\Delta_N, t_j) = \lim_{\nu \to \infty} D_{r,j}^{(\nu)}(\Delta_N, t_j), \quad E_{*,j}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_j) = \lim_{\nu \to \infty} E_{\nu,j}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_j),$$

$$M_{k,p}(*, \Delta_N) = \lim_{\nu \to \infty} M_{k,p}(\nu, \Delta_N), \quad V_{p,r}(*, \Delta_N) = \lim_{\nu \to \infty} V_{p,r}(\nu, \Delta_N).$$

Поскольку $Q_\nu(\Delta_N)$ определяется через них, то существует $\lim_{\nu\to\infty} Q_\nu(\Delta_N)$. При этом в силу (2.28) имеет место соотношение $\lim_{\nu\to\infty} Q_\nu(\Delta_N) = Q^*(\Delta_N)$, где $Q^*(\Delta_N)$ является $(nN\times nN)$-матрицей системы (19) из [16, с. 1082].

Тогда согласно теореме 2 из [16, с. 1084] матрица $Q^*(\Delta_N) : R^{nN} \to R^{nN}$ будет обратимой и существует число $\gamma^*(\Delta_N)$, ограничивающее сверху норму обратной матрицы $Q^*(\Delta_N)$.

Регулярность разбиения Δ_N обеспечивает однозначную разрешимость специальной задачи Коши (2.1), (2.2). Поэтому согласно теореме 2.2 найдется $\nu_1 \in \mathbb{N}$ такое, что $\Delta_N \in \sigma_{\nu_1}([0,T])$ и выполняется неравенство $\xi_{\nu_1}(\Delta_N) < 1$. Оценим

$$\|Q^*(\Delta_N) - Q_\nu(\Delta_N)\| \le \max(1,\|C\|)\times$$
$$\times \max_{r=\overline{1,N}} \left\{ \left[e^{\alpha h_r} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} + T\beta h_r \left(e^{\alpha h_r} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \right) \right] \times \right.$$
$$\left. \times \left[1 + T\beta h_r \left(e^{\alpha h_r} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \right) \|(I - G(\nu,\Delta_N))^{-1}\| \right] \right\}.$$

Поскольку правая часть неравенства при $\nu \to \infty$ стремится к нулю, то найдется ν_2, при котором

$$\gamma_*(\Delta_N)\max(1,\|C\|) \max_{r=\overline{1,N}} \left\{ \left[e^{\alpha h_r} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} + T\beta h_r \left(e^{\alpha h_r} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \right) \right] \times \right.$$
$$\left. \times \left[1 + T\beta h_r \left(e^{\alpha h_r} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \right) \|(I - G(\nu,\Delta_N))^{-1}\| \right] \right\} < \frac{1}{2}.$$

Тогда по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов матрица $Q_\nu(\Delta_N)$ будет обратимой для всех $\nu \ge \nu_2$ и

$$\|[Q_\nu(\Delta_N)]^{-1}\| \le \frac{\gamma_*(\Delta_N)}{1 - \gamma_*(\Delta_N)\|Q^*(\Delta_N) - Q_\nu(\Delta_N)\|} \le \frac{\gamma_*(\Delta_N)}{1 - 1/2} = 2\gamma_*(\Delta_N).$$

Выбрав $\widetilde{\nu} > \nu_2$ удовлетворяющим неравенству $q_{\widetilde{\nu}}(\Delta_N) < 1$, получим утверждение теоремы.

Теорема 3.2 доказана.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример. На отрезке $[0,1]$ рассмотрим краевую задачу для интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t^2 & 0 \end{pmatrix} x + \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & s \\ s^3 & 0 \end{pmatrix} x(s)ds + f(t), \quad t \in (0;1), \tag{3.9}$$

$$x(0) = x(1). \tag{3.10}$$

Здесь $f(t) \in C([0,T], R^2)$. Для этой задачи $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $T = 1$. При $h = 1/4$ краевая задача с параметрами имеет вид

$$\frac{du_r}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t^2 & 0 \end{pmatrix}(u_r + \lambda_r) + \sum_{i=1}^{4} \int\limits_{(i-1)/4}^{i/4} \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & t^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & s \\ s^3 & 0 \end{pmatrix}(u_i(s) + \lambda_i)ds + f(t),$$

$$u_r[(r-1)/4] = 0, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,4},$$

$$\lambda_1 = \lambda_4 + \lim_{t \to 1-0} u_4(t),$$

$$\lambda_1 + \lim_{t \to 0{,}25-0} u_1(t) = \lambda_2,$$

$$\lambda_2 + \lim_{t \to 0{,}5-0} u_2(t) = \lambda_3,$$

$$\lambda_3 + \lim_{t \to 0{,}75-0} u_3(t) = \lambda_4.$$

Проверим условия теоремы 3.1 при $\nu = 2$. Матрица $I - G(2, \Delta_4) = \begin{pmatrix} 0,9985 & -0,0218 \\ -0,0208 & 0,9989 \end{pmatrix}$ обратима, т. е. $\Delta_4 \in \sigma_2([0,1])$.

Матрица

$$Q_2(\Delta_4) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,9999 & -0,0061 & -0,0006 & -0,0182 & -0,0027 & -0,0304 & -1,0276 & -0,262 \\ -0,0002 & 0,9993 & -0,0025 & -0,0022 & -0,01106 & -0,0044 & -0,223 & -1,0304 \\ 1,00007 & 0,0314 & -0,999 & 0,0005 & 0,000045 & 0,00082 & 0,00013 & 0,0012 \\ 0,0052 & 1,00009 & 0,000014 & -0,999 & 0,00006 & 0,000012 & 0,00017 & 0,00003 \\ 0,000004 & 0,00114 & 1,0016 & 0,097 & -0,999 & 0,0057 & 0,00096 & 0,0081 \\ 0,000014 & 0,00003 & 0,037 & 1,0019 & 0,0009 & -0,999 & 0,00254 & 0,0005 \\ 0,000012 & 0,0032 & 0,00025 & 0,0093 & 1,0084 & 0,172 & -0,997 & 0,022 \\ 0,00006 & 0,00019 & 0,0009 & 0,00064 & 0,0103 & 1,0095 & 0,01106 & -0,997 \end{pmatrix},$$

также обратима и $\|[Q_2(\Delta_4)]^{-1}\| \leq 2,4$.

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\xi_2(\Delta_4) = 0,04106 < 1,$$

$$q_2(\Delta_4) = 0,07406 < 1.$$

Тогда согласно теореме 3.1 задача (3.9), (3.10) однозначно разрешима.

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004.

2. *Быков Я. В.* О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. — Фрунзе: Киргиз. гос. ун-т, 1957. — 328 с.

3. *Dzhumabaev D. S.* A method for solving the linear boundary-value problem for an integro-differential equation // Comput. Math. and Math. Phys. — 2010. — **50**, № 7. — P. 1150 – 1161.

4. *Dzhumabaev D. S.* An algorithm for solving a linear two-point boundary-value problem for an integro-differential equation // Comput. Math. and Math. Phys. — 2013. — **53**, № 6. — P. 736 – 758.

5. *Dzhumabaev D. S., Bakirova E. A.* Criteria for the unique solvability of a linear two-point boundary-value problem for systems of integro-differential equations // Different. Equat. — 2013. — **49**, № 9. — P. 914 – 937.

6. *Иманалиев М. И.* Асимптотические методы в теорий сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем. — Фрунзе: Илим, 1972. — 356 с.

7. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973. — 272 с.

8. *Lakshmikantham V., Rao M. R. M.* Theory of integro-differential equations. — London: Gordon Breach, 1995.

9. *Некрасов А. И.* Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений // Тр. ЦАГИ. — 1934. — Вып. 190. — С. 1 – 25.

10. *Prüss J.* Evolutionary integral equations and applications. — Basel etc.: Birkhäuser-Verlag, 1993.

11. *Кривошеин Л. Е.* Приближенные методы решения обыкновенных линейных интегро-дифференциальных уравнений. — Фрунзе: АН КиргССР, 1962.

12. *Maleknejad K., Attary M.* An effecient numerical approximation for the linear Fredholm integro-differential equations based on Cattani's method // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. — 2011. — **16**. — P. 2672 – 2679.

13. *Parts I., Pedas A., Tamme E.* Piecewise polynomial collocation for Fredholm integro-differential equations with weakly singular kernels // SIAM J. Numer. Anal. — 2005. — **43**. — P. 1897 – 1911.

14. *Turkyilmazoglu M.* An effective approach for numerical solutions of high-order Fredholm integro-differential equations // Appl. Math. and Comput. — 2014. — **227**. — P. 384 – 398.

15. *Wazwaz A. M.* Linear and nonlinear integral equations: methods and applications. — Beijing: Higher Equac. press and Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.

16. *Dzhumabaev D. S.* Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundary value problems for the Fredholm integro-differential equations // Ukr. Math. J. — 2015. — **66**, № 8. — C. 1200 – 1209.

17. *Bakirova E. A.* Unique solvability of linear boundary-value problem for Fredholm integro-differential equations with degenerate kernel // Int. Math. Conf. "Bogolyubov readings DIF-2013. Differential Equations, Theory of Functions and their Applications"on the occasion of the 75th anniversary of academician A. M. Samoilenko (Sevastopol, June 23-30, 2013). — P. 31 – 32.

18. *Треногин В. В.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.

Получено 18.11.14