УДК 517.9

СЛАБКОНЕЛІНІЙНІ ІМПУЛЬСНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ

Є. С. Войтушенко

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
просп. Глушкова, 4, Київ, 03680, Україна
e-mail: I_Voitushenko@ukr.net

We study the structure of solutions to degenerate weakly nonlinear differential-algebraic systems with an impulsive effect occuring at fixed times. We find necessary and sufficient conditions for existence of solutions to such problems, and establish a connection between the found conditions. An iteration procedure is proposed for finding solutions of the problem.

Исследуется структура решений вырожденных слабонелинейных дифференциально-алгебраических систем з импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. Получены необходимое и достаточное условия существования решений таких задач и установлена связь между условиями. Предложена сходящаяся итерационная процедура нахождения решений.

Статтю присвячено дослідженню слабконелінійних систем вироджених диференціальних рівнянь з імпульсним впливом у випадку, коли відповідні породжуючі задачі розв'язні. Основною метою є встановлення необхідних та достатніх умов існування розв'язків таких задач та побудова алгоритму знаходження цих розв'язків.

Буде показано, що для дослідження систем вироджених диференціальних рівнянь з імпульсним впливом можна застосувати розроблені раніше методи дослідження крайових задач для систем вироджених диференціальних рівнянь.

Систематичне вивчення математичних проблем теорії диференціальних систем з імпульсним впливом розпочато у працях А. Д. Мишкіса, А. М. Самойленка, М. О. Перестюка [1]. У подальшому ідеї, закладені у цих працях, отримали свій розвиток та узагальнення у численних публікаціях А. Халаная, Д. Векслера та інших [2, 3]. У цій статті запропоновано розглядати імпульсну диференціальну систему як внутрішню крайову задачу [4].

Використавши псевдообернені за Муром – Пенроузом матриці та припустивши, що породжуюча вироджена диференціальна система зводиться до центральної канонічної форми [5 – 7], ми отримаємо умови існування та алгоритм знаходження розв'язків слабконелінійних вироджених диференціальних задач з імпульсним впливом, лінійна частина яких є нетеровим оператором [8, 9].

Постановка задачі та допоміжні результати. Необхідна умова існування розв'язку. Розглянемо імпульсну слабконелінійну систему вироджених диференціальних рівнянь із малим параметром ε:

$$B(t)\,\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) + \varepsilon Z(x,t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$\Delta E_i\, x|_{t=\tau_i} = S_i x(\tau_i - 0) + b_i + \varepsilon J_i(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \quad t,\tau_i \in [a,b], \quad i = 1,\dots,p, \tag{2}$$

де $A(t), B(t) \in C^{3q-2}[a,b]$ — $(n \times n)$-вимірні матриці та $f(t) \in C^{q-1}[a,b]$ — n-вимірна вектор-функція; $\det B(t) = 0 \ \forall t \in [a,b]$; $x = x(t) = \operatorname{col}(x_1(t), \ldots, x_n(t))$; S_i, $i = 1, \ldots, p$, — $(m_i \times n)$-вимірні сталі матриці; E_i — такі $(m_i \times n)$-вимірні сталі матриці, що $\operatorname{rank}(E_i + S_i) = m_i < n$, тобто розв'язок системи визначається однозначним продовженням через точку розриву:

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} := E_i(x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0));$$

b_i – m_i-вимірний вектор-стовпчик констант, $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$; $-\infty < a < \tau_1 < \ldots < \tau_i < \ldots \ldots < \tau_p < b < \infty$, $i = 1, \ldots, p$; $Z(x,t,\varepsilon)$ — нелінійна по x n-вимірна вектор-функція, неперервно диференційовна по x в околі породжуючого розв'язку і неперервна по t, ε : $Z(\cdot, t, \varepsilon) \in C^1[\|x - x_0\| \leq \beta]$; $Z(x, \cdot, \varepsilon) \in C^{q-1}[a,b]$; $Z(x,t,\cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$; $J_i(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - m_i$-вимірний нелінійний обмежений вектор-функціонал, неперервно диференційовний по x у розумінні Фреше і неперервний по ε в околі породжуючого розв'язку. Знайдемо умови існування та алгоритм для побудови розв'язку $x = x(t,\varepsilon)$:

$$x(\cdot,\varepsilon) \in C^1([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I), \quad i = 1, 2, \ldots, p, \quad x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],$$

імпульсної задачі (1), (2), який перетворюється при $\varepsilon = 0$ в один із розв'язків $x_0(t, c_r) = x(t, 0)$ імпульсної задачі

$$B(t)\,\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \tag{3}$$

$$\Delta E_i\, x|_{t=\tau_i} = S_i x(\tau_i - 0) + b_i, \quad t, \tau_i \in [a,b], \quad i = 1, \ldots, p. \tag{4}$$

Задачу (3), (4) отримуємо із задачі (1), (2) при $\varepsilon = 0$ і називаємо породжуючою імпульсною задачею для (1), (2). Відповідно, розв'язок породжуючої імпульсної задачі $x_0(t, c_r) = x(t, 0)$ у подальшому будемо називати породжуючим розв'язком задачі (1), (2). Задаючи імпульс у вигляді (2), ми припускаємо, що невідома вектор-функція $x(t)$ може мати імпульси не по всіх компонентах вектора x, а тільки по частинах. Таким чином, можна розглядати випадок, коли перший імпульс задається лише по першій компоненті вектор-функції $x(t)$, другий — лише по другій компоненті, k-й — лише по k-й компоненті. Або, наприклад, у точках $\tau_j \in (a,b)$ вектор-функція $x(t)$ може взагалі не мати імпульсу, а у точках $\tau_i \in (a,b)$, $i \neq j$, може мати імпульси по k-х компонентах вектора $x(t) = \operatorname{col}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t), \ldots, x_n(t))$. У загальному методі дослідження поставленої задачі використовуються ідеї, запропоновані О. А. Бойчуком [10], із використанням псевдообернених (за Муром – Пенроузом) матриць [11, 12].

Покажемо, що досліджувати задачу з імпульсним впливом (3), (4) можна, розглядаючи задачу (3), (4) як внутрішню крайову задачу [13]. Введемо $\ell x(\cdot)$ — m-вимірний лінійний обмежений векторний функціонал

$$\ell := \operatorname{col}(\ell_1, \ldots, \ell_p) : C^1([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I) \to R^m, \quad m := m_1 + m_2 + \ldots + m_p,$$

таким чином:

$$\begin{aligned} \ell_1 x &:= E_1 x(\tau_1+) - (E_1 + S_1)x(\tau_1-), \\ \ell_2 x &:= E_2 x(\tau_2+) - (E_2 + S_2)x(\tau_2-), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ell_p x &:= E_p x(\tau_p+) - (E_p + S_p)x(\tau_p-) \end{aligned} \tag{5}$$

та запишемо імпульсну дію (4) як крайову умову:

$$\ell x(\cdot) = b \in R^m, \tag{6}$$

де $b = \operatorname{col}(b_1, b_2, \ldots, b_p) \in R^m$, $b_i \in R^{m_i}$.

Розглянемо випадок, коли відповідна однорідна породжуюча імпульсна задача має нетривіальні розв'язки. Нагадаємо, що згідно з теоремою [13] породжуюча імпульсна задача (3), (4) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли неоднорідності $f(t) \in C^{q-1}[a,b]$ виродженої диференціальної системи та $b \in \mathbb{R}^m$ в імпульсній умові (6) задовольняють d лінійно незалежних умов

$$P_{Q_d^*}\{b - l\widetilde{x}(\cdot)\} = 0, \quad d = m - n_1, \tag{7}$$

та при цьому має r-параметричну $(r = n - s - n_1)$ сім'ю лінійно незалежних розв'язків вигляду

$$x_0(t, c_r) = X_{n-s}(t) P_{Q_r} c_r + X_{n-s}(t) Q^+\{b - l\widetilde{x}(\cdot)\} + \widetilde{x}(t) \quad \forall c_r \in \mathbb{R}^r, \tag{8}$$

де c_r — r-вимірний вектор констант.

Зазначимо, що складові компоненти даних співвідношень задаються таким чином:

$$Q := lX_{n-s}(\cdot) = \begin{bmatrix} -S_1 X_{n-s}(\tau_1) \\ -S_2 X_{n-s}(\tau_2) \\ \vdots \\ -S_p X_{n-s}(\tau_p) \end{bmatrix}$$

— відома $[m \times (n-s)]$-вимірна стала матриця;

$$l\widetilde{x}(\cdot) = \begin{bmatrix} E_1\widetilde{x}(\tau_1+) - (E_1 + S_1)\widetilde{x}(\tau_1-) \\ E_2\widetilde{x}(\tau_2+) - (E_2 + S_2)\widetilde{x}(\tau_2-) \\ \vdots \\ E_p\widetilde{x}(\tau_p+) - (E_p + S_p)\widetilde{x}(\tau_p-) \end{bmatrix}$$

— $(m \times 1)$-вектор-стовпчик імпульсної умови; P_Q та P_{Q^*} — $((n-s) \times (n-s))$- та $(m \times \times m)$-вимірні матриці-ортопроектори, які проектують простори $\mathbb{R}^{n-s}$ та $\mathbb{R}^m$ на нуль-простори $N(Q)$ та $N(Q^*)$ матриць Q та Q^* відповідно: $P_Q : \mathbb{R}^{n-s} \to N(Q); P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to$

$\to N(Q^*)$; $\operatorname{rank} Q = n_1 \le \min(m, n-s)$. Оскільки $\operatorname{rank} P_{Q^*} = m - n_1 = d$, то матрицю P_{Q^*} можна замінити на $(d \times m)$-вимірну матрицю $P_{Q^*_d}$, складену з повної системи d лінійно незалежних рядків матриці P_{Q^*}. Зважаючи на те, що $\operatorname{rank} P_Q = n - s - n_1 = r$, матрицю P_Q можна замінити на $((n-s) \times r)$-вимірну матрицю P_{Q_r}, складену з повної системи r лінійно незалежних стовпців матриці P_Q. Частинний розв'язок неоднорідної системи має вигляд

$$\widetilde{x}(t) = \int_a^t X_{n-s}(t) Y^*_{n-s}(\tau) f(\tau) d\tau - \Phi(t) \sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} ([\Psi^*(t) L(t) \Phi(t)]^{-1} \Psi^*(t) f(t)). \tag{9}$$

$Y_{n-s}(t)$ — $(n \times (n-s))$-вимірна матриця, складена з $n-s$ лінійно незалежних розв'язків спряженої системи

$$\frac{d}{dt} B^*(t) y = -A^*(t) y, \quad t \in [a, b];$$

$\Phi(t), \Psi(t)$ — $(n \times s)$-матриці, складені з векторів, які утворюють жорданові набори матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$ і матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t)$:

$$\Phi(t) = [\varphi_1^{(1)}(t), \ldots, \varphi_1^{(s_1)}(t); \varphi_2^{(1)}(t), \ldots, \varphi_2^{(s_2)}(t); \ldots; \varphi_r^{(1)}(t), \ldots, \varphi_r^{(s_r)}(t)],$$

$$\Psi(t) = [\psi_1^{(1)}(t), \ldots, \psi_1^{(s_1)}(t); \psi_2^{(1)}(t), \ldots, \psi_2^{(s_2)}(t); \ldots; \psi_r^{(1)}(t), \ldots, \psi_r^{(s_r)}(t)].$$

Фундаментальні матриці $X_{n-s}(t)$ та $Y_{n-s}(t)$ завжди можна визначити [7] так, щоб виконувалась рівність

$$Y^*_{n-s}(t) B(t) X_{n-s}(t) = E_{n-s}.$$

Спочатку встановимо необхідну умову існування розв'язку $x(t, \varepsilon)$ імпульсної задачі (1), (2), яка задовольняє вказані вище умови та при $\varepsilon = 0$ перетворюється у породжуючий розв'язок $x_0(t, c_r)$ (8) імпульсної задачі (3), (4). Справедливим буде наступне твердження.

Теорема 1 *(необхідна умова). Нехай слабконелінійна імпульсна задача (1), (2) має розв'язок* $x = x(t, \varepsilon)$:

$$x(\cdot, \varepsilon) \in C^1([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I), \quad x(t, \cdot) \in C(0, \varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ *перетворюється у породжуючий розв'язок з векторною константою* $c_r = c_r^0$:

$$x(t, 0) = x_0(t, c_r^0) = X_{n-s}(t) P_{Q_r} c_r^0 + X_{n-s}(t) Q^+ \{b - l\widetilde{x}(\cdot)\} + \widetilde{x}(t) \ \ \forall c_r^0 \in \mathbb{R}^r.$$

Тоді вектор констант $c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ *обов'язково повинен бути дійсним коренем системи рівнянь*

$$F(c_r^0) = 0, \tag{10}$$

де

$$F(c_r) = P_{Q_d^*}\Bigg(J(x_0(\cdot, c_r), 0) - l\Bigg(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)Z(x_0(\tau, c_r), \tau, 0)d\tau -$$

$$- \Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k}\left([\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)]^{-1}\Psi^*(t)Z(x_0(t, c_r), t, 0)\right)(\cdot)\Bigg)\Bigg)$$

та $J := \mathrm{col}\,(J_1, \ldots, J_p) : J \in R^m, m := m_1 + m_2 + \ldots + m_p, J_i \in R^{m_i}$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 4.5 [9]. Якщо рівняння (10) має розв'язок $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$, то вектор c_r^0 визначає той породжуючий розв'язок $x_0(t, c_r^0)$ [8], якому може відповідати розв'язок $x(t, \varepsilon)$ імпульсної задачі (1), (2), що перетворюється у $x_0(t, c_r^0)$ при $\varepsilon = 0$.

Якщо ж рівняння (10) не має розв'язків, то й імпульсна задача (1), (2) не має шуканого розв'язку. Мова йде про дійсні корені рівняння для породжуючих констант. Таким чином, необхідна умова існування розв'язків імпульсної задачі (1), (2) задовольняється вибором константи c_r у r-параметричній сім'ї розв'язків (8) та полягає у тому, щоб рівняння (10) мало хоча б один дійсний корень $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$.

По аналогії з відомими результатами, будемо називати рівняння (10) рівнянням для породжуючих констант імпульсної задачі для систем вироджених диференціальних рівнянь (1), (2).

У випадку періодичних задач константа c_r має фізичний зміст і є амплітудою породжуючого розв'язку, тому у класичній задачі про періодичні розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь аналогічне рівняння (10) називають рівнянням для породжуючих амплітуд [14, 15].

Достатня умова існування розв'язку. Побудова ітераційного процесу. Для отримання достатньої умови існування розв'язку виконаємо заміну змінних у імпульсній задачі (1), (2):

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t, c_r^0) + y(t, \varepsilon),$$

де $x_0(t, c_r^0)$ — породжуючий розв'язок (9) і векторна константа $c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ є дійсним коренем рівняння (10). У нових змінних будемо шукати умови існування розв'язку $y(t, \varepsilon)$:

$$y(\cdot, \varepsilon) \in C^1([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I), \quad y(t, \cdot) \in C(0, \varepsilon_0], \quad y(t, 0) = 0,$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у нульовий розв'язок крайової задачі

$$B(t)\frac{dy}{dt} = A(t)y + \varepsilon Z\left(x_0(t, c_r^0) + y(t, \varepsilon), t, \varepsilon\right), \tag{11}$$

$$ly(\cdot) = \varepsilon J(x_0(\cdot, c_r^0) + y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \tag{12}$$

Оскільки ми звели імпульсну систему до крайової задачі, то для крайової задачі (11), (12) мають місце наступні розклади:

$$Z(x_0 + y, t, \varepsilon) = Z(x_0(t, c_r^0), t, 0) + A_1(t)y(t, \varepsilon) + R(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \tag{13}$$

$$J_i\left(x_0(\cdot, c_r^0) + y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\right) = J_i(x_0(\cdot, c_r^0)) + l_1^{(i)}y(\cdot, \varepsilon) + R_1^{(i)}(y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \tag{14}$$

де

$$Z(x_0(t,c_r^0),t,0) \in C[a,b], \quad J_i(x_0(\cdot,c_r^0)) := J_i(x_0(\cdot,c_r^0),0),$$

$$A_1(t) := A_1(t,c_r^0) = \left.\frac{\partial Z(x,t,\varepsilon)}{\partial x}\right|_{x=x_0(t,c_r^0),\varepsilon=0} \in C[a,b],$$

$l_1^{(i)}y(\cdot,\varepsilon)$ — лінійна частина векторного функціонала $J_i\left(x_0(\cdot,c_r^0)+y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right)$; $J :=$ $:= \mathrm{col}(J_1,\ldots,J_p), \ell_1 := \mathrm{col}\,(\ell_1^{(1)},\ldots,\ell_1^{(p)})$, $R_1 := \mathrm{col}\,(R_1^{(1)},\ldots,R_1^{(p)})$. Лінійний оператор $l_1^{(i)} =$ $= J_i'(x_0)$ є похідною Фреше від векторного функціонала $J_i(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ у точці $x = x_0(t,c_r^0)$, $\varepsilon = 0$. Нелінійна вектор-функція $R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ належить до класу $C^1(\|y\| \le q)$, $C[a,b]$, $C[0,\varepsilon_0]$. При цьому маємо

$$R(0,t,0) = 0, \quad \frac{\partial R(0,t,0)}{\partial y} = 0, \quad R_1^{(i)}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial R_1^{(i)}(0,0)}{\partial y} = 0.$$

Застосовуючи до крайової задачі (11), (12) результати роботи [16], отримуємо таке твердження.

Теорема 2 *(достатня умова). Нехай породжуюча імпульсна задача (3), (4) при виконанні умови (7) має r-параметричну сім'ю розв'язків $x_0(t,c_r^0)$ (8) $(r = n-s-n_1)$. Тоді для кожного дійсного значення вектора констант $c_r^0 \in \mathbb{R}^r$, який задовольняє систему рівнянь (10) для породжуючих констант, при умові $\operatorname{rank} B_0 = d$ слабконелінійна імпульсна задача (1), (2) має хоча б один розв'язок $x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у породжуючий розв'язок $x_0(t,c_r^0)$ (8), де*

$$B_0 = P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1 X_r(\cdot) - l\Bigg(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)A_1(\tau)X_r(\tau)d\tau -$$

$$- \Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k}\left([\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)]^{-1}\Psi^*(t)A_1(t)X_r(t)\right)(\cdot)\Bigg)\Bigg\} \tag{15}$$

— $(d\times r)$-вимірна матриця. Цей розв'язок можна визначити за допомогою збіжного при достатньо малому значенню $\varepsilon \in [0,\varepsilon_*]$ ітераційного процесу

$$y_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_k + \bar{y}_{k+1}(t,\varepsilon), \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

$$y_0(t,\varepsilon) = \bar{y}_0(t,\varepsilon) = 0,$$

$$c_k = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg\{l_1\bar{y}_k(\cdot,\varepsilon) + R_1(y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$- l\Bigg(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)(A_1(\tau)\bar{y}_k(\tau,\varepsilon) + R(y_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon))d\tau -$$

$$- \Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k}\left([\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)]^{-1}\Psi^*(t)(A_1(t)\bar{y}_k(t,\varepsilon) + R(y_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon))\right)(\cdot)\Bigg)\Bigg\}, \tag{16}$$

$$\bar{y}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon X_{n-s}(t)Q^{+}\Bigg\{ J\left(x_0(\cdot,c_r^0)+y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right) -$$

$$-\, l\Bigg(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^{*}(\tau)Z(x_0(\tau,c_r^0)+y_k,\tau,0)d\tau -$$

$$-\,\Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1} I^k\frac{d^k}{dt^k}\left([\Psi^{*}(t)L(t)\Phi(t)]^{-1}\Psi^{*}(t)Z(x_0(t,c_r^0)+y_k,t,0)\right)(\cdot)\Bigg)\Bigg\}+$$

$$+\,\varepsilon\Bigg\{\int\limits_a^{t} X_{n-s}(t)Y_{n-s}^{*}(\tau)Z(x_0(\tau,c_r^0)+y_k,\tau,0)d\tau -$$

$$-\,\Phi(t)\sum_{k=0}^{q-1} I^k\frac{d^k}{dt^k}\left([\Psi^{*}(t)L(t)\Phi(t)]^{-1}\Psi^{*}(t)Z(x_0(t,c_r^0)+y_k,t,0)\right)\Bigg\},$$

$$x_k(t,\varepsilon) = x_0(t,c_r^0)+y_k(t,\varepsilon), \quad k=0,1,2,\ldots .$$

Оцінки області збіжності ітераційного процесу (16), а також оцінки наближених розв'язків проводяться методом мажорант Ляпунова [8]. Як відомо [15, 16], при заданих умовах завжди можна знайти таке $\varepsilon = \varepsilon_*$, що при $\varepsilon \in [0,\varepsilon_*]$ ітераційний процес (16) буде збіжним.

Зв'язок між необхідною та достатньою умовами існування розв'язку. Розглянемо випадок, коли кількість імпульсних умов m збігається з кількістю $n-s$ лінійно незалежних розв'язків однорідної системи, тобто $m=n-s$. Оскільки $d=m-n_1$, $r=n-s-n_1$, $m=n-s$, то $d=r$ і матриця B_0 є квадратною. Якщо $c_r=c_r^0$ є розв'язком рівняння (10), то за аналогією з теоремою Безу для скалярного рівняння маємо розклад для векторного рівняння $F(c_r)=(c_r-c_r^0)F_1(c_r)$, в якому $\det F_1(c_r^0)\neq 0$. В цьому випадку c_r^0 — простий корінь рівняння (10).

Враховуючи, що

$$\left(\frac{\partial Z(x,t,\varepsilon)}{\partial c_r}\right)_{c_r=c_r^0} = \frac{\partial Z(x,t,\varepsilon)}{\partial x}\bigg|_{x=x_0(t,c_r^0),\varepsilon=0}\ \frac{\partial x_0(t,c_r)}{\partial c_r}\bigg|_{c_r=c_r^0} = A_1(t)X_r(t),$$

$$\frac{\partial J(x_0(\cdot,c_r),\varepsilon)}{\partial c_r}\bigg|_{c_r=c_r^0} = \frac{\partial J(x(\cdot,c_r),\varepsilon))}{\partial x}\bigg|_{x=x_0(\tau,c_r^0),\varepsilon=0}\ \frac{\partial x_0(\cdot,c_r)}{\partial c_r}\bigg|_{c_r=c_r^0} = \ell_1 X_r(\cdot),$$

маємо

$$\frac{\partial F(c_r)}{\partial c_r}\bigg|_{c_r=c_r^0} = P_{Q_d^*}\Bigg\{ l_1X_r(\cdot) - l\Bigg(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^{*}(\tau)A_1(\tau)X_r(\tau)d\tau -$$

$$-\,\Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1} I^k\frac{d^k}{dt^k}\left([\Psi^{*}(t)L(t)\Phi(t)]^{-1}\Psi^{*}(t)A_1(t)X_r(t)\right)(\cdot)\Bigg)\Bigg\} = B_0.$$

Отже, якщо $\det B_0 \neq 0$, то корінь $c_r = c_r^0$ рівняння (10) є простим.

Таким чином, у випадку $m = n - s$ маємо таке твердження.

Теорема 3. *Для того щоб слабконелінійна імпульсна задача для систем вироджених диференціальних рівнянь (1), (2) мала розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у породжуючий розв'язок $x_0(t, c_r^0)$ (8) з константою $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$, необхідно, щоб константа c_r^0 була дійсним коренем рівняння для породжуючих констант (10), та достатньо, щоб c_r^0 був простим коренем цього рівняння.*

1. *Самойленко А. М., Перестюк М. О.* Импульсные дифференциальные уравнения. — Киев: Вища. шк., 1987.
2. *Halanay A., Wexler D.* Qualitative theory of impulsive systems. — Moscow: Mir, 1971.
3. *Schwabik S., Tvrdy M., Vejvoda O.* Differential and integral equations // Boundary-Value Problems and Adjoints. — Prague: Academia, 1979.
4. *Zettl A.* Adjoint and self-adjoint BVP's with interface conditions // SIAM J. Appl. Math. — 1968. — **16**, № 4.
5. *Campbell S. L., Petzold L. R.* Canonical forms and solvable singular systems of differential equations // SIAM J. Alg. Discrete Methods. — 1983. — № 4. — P. 517–521.
6. *Rheinboldt W. C.* Differential-algebraic systems as differential equations on manifolds // Math. Comput. — 1984. – **43**, № 168. — P. 473–482.
7. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
8. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1990. — 96 с.
9. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.
10. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 317 p.
11. *Бойчук О. А., Шегда Л. М.* Вироджені нетерові крайові задачі // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**, № 3. — С. 303–312.
12. *Бойчук А. А., Шегда Л. М.* Бифуркация решений вырожденных нетеровых краевых задач // Дифференц. уравнения. — 2011. — **47**, № 4. — С. 459–467.
13. *Boichuk A., Ruzickova M., Langerova M., Voitushenko E.* Systems of singular differential equations with pulse action // Adv. Difference Equat. — 2013. — **2013**.
14. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.
15. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
16. *Бойчук О. А., Шегда Л. М.* Вироджені нелінійні крайові задачі // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 9. — С. 1174–1188.

Одержано 18.08.14