

**ДВУХТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ,  
УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ УПРАВЛЯЕМОСТИ  
СО СКОБКАМИ ЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

**В. В. Грушковская**

*Ин-т математики НАН Украины  
ул. Терещенковская, 3, Киев, 01601, Украина*

**А. Л. Зуев**

*Ин-т математики НАН Украины  
ул. Терещенковская, 3, Киев, 01601, Украина  
Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems  
Sandtorstr. 1, Magdeburg, 39106, Germany*

*We study a two-point control problem that is control linear. The class of the problems under consideration satisfies a controllability condition with Lie brackets of order up to two inclusive. To solve the problem, we use trigonometric polynomials the coefficients of which are calculated by expanding solutions into Volterra series. The proposed method permits to reduce the two-point control problem to a system of algebraic equations. We prove that such an algebraic system locally has at least one real solution. The proposed method for constructing control functions is illustrated with several examples.*

*Досліджується двоточкова задача керування для лінійних за керуванням систем. Клас систем, що розглядається, задовольняє умову керованості з дужками Лі до другого порядку включно. Для розв'язання поставленої задачі використовуються тригонометричні поліноми, коефіцієнти яких обчислюються за допомогою розвинень розв'язків системи в ряд Вольтерра. Запропоновано зведення двоточної задачі керування до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь. Доведено, що така система локально має принаймні один дійсний розв'язок. Запропонований метод побудови керуючих функцій проілюстровано на кількох прикладах.*

**1. Введение.** Задача планирования движения неголономных механических систем занимает важное место в современной теории управления в связи с нетривиальными геометрическими свойствами траекторий и приложениями в робототехнике. Несмотря на большое число публикаций по управлению движением неголономных систем, остается открытым вопрос о конструктивном синтезе функций управления при достаточно общих предположениях на векторные поля системы. Выделим наиболее важные, с точки зрения авторов, результаты в этой области.

R. W. Brockett решил задачу оптимального управления с квадратичным функционалом качества для системы в канонической форме, удовлетворяющей ранговому условию со скобками Ли первого порядка [2]. R. M. Murray и S. S. Sastry в статье [14] расширили этот результат и представили семейство программных управлений в виде комбинаций синусоид для решения двухточечной задачи с одной и несколькими цепочками интеграторов. Более общий метод предложен в работах H. J. Sussmann и W. Liu для класса линейных по управлению систем. Для таких систем функции управления с большой амплитудой могут быть использованы для решения задачи приближенного отслеживания тра-

ектории [16]. Синусоиды с большими амплитудами также применялись в работе [9] для вычисления периодических по времени решений задачи планирования движения с обходом препятствий. В статье [12] представлен метод решения двухточечной задачи управления с кусочно-постоянными управлениями. Функции такого типа используются как для нильпотентных систем, так и для приближенного управления общими классами систем. В статье [6] двухточечная задача управления решена для нескольких примеров линейных по управлению систем с кусочно-постоянными входами. Синусоидальные и полиномиальные функции управления для систем в форме с двумя цепочками интеграторов и тремя входами построены в статье [3]. Глобально сходящиеся алгоритмы планирования движения описаны в работах [5, 10]. Другой метод, использующий алгебру Ли и обобщенную формулу Кэмпбелла – Бейкера – Хаусдорфа – Дынкина, предложен в статье [7].

В данной работе рассматриваются линейные по управлению системы, векторные поля которых вместе с их скобками Ли первого и второго порядков удовлетворяют ранговому условию. Для решения двухточечной задачи управления используется разложение решений системы с тригонометрическими управлениями, зависящими от времени, в ряд Вольтерра. Такое представление позволяет вычислить коэффициенты функций управления через решение системы алгебраических уравнений. Отметим, что подобный подход рассмотрен в статье [8] для систем, удовлетворяющих условию управляемости со скобками Ли первого порядка.

Опишем кратко строение статьи. В пункте 2 приводится постановка задачи и некоторые факты, связанные с представлением решений в виде рядов Вольтерра. Основной результат, касающийся построения управлений, формулируется в подпункте 3.1 и доказывается в подпункте 3.2. В пункте 4 рассматриваются примеры, иллюстрирующие полученные результаты. Некоторые технические детали приведены в приложении.

**2. Вспомогательные построения. 2.1. Постановка задачи.** Рассмотрим класс линейных по управлению систем вида

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(x), \quad (1)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  – состояние,  $u = (u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$  – управление,  $f_i(x)$  – гладкие отображения из  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^n$ ,  $m < n$ .

Сформулируем двухточечную задачу управления для системы (1) следующим образом: для заданных начального  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  и конечного  $x^1 \in \mathbb{R}^n$  состояний найти допустимое управление  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $t \in [0, \varepsilon]$ , которое переводит систему (1) из  $x^0$  в  $x^1$  за время  $\varepsilon$ .

Предположим, что система (1) в точке  $x^0$  удовлетворяет условию управляемости со скобками Ли до второго порядка включительно, т. е.

$$\text{span} \{f_i(x^0), [f_{j_1}, f_{j_2}](x^0), [[f_{l_1}, f_{l_2}], f_{l_3}](x^0)\} = \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

где  $i \in \{1, \dots, m\} = S_1$ ,  $(j_1, j_2) \in S_2 \subseteq \{1, \dots, m\}^2$ ,  $(l_1, l_2, l_3) \in S_3 \subseteq \{1, \dots, m\}^3$ ,  $|S_2| + |S_3| = n - m$ ,  $[f_i, f_j] = \frac{\partial f_j}{\partial x} f_i - \frac{\partial f_i}{\partial x} f_j$  – скобки Ли векторных полей  $f_i$  и  $f_j$ . Здесь и далее  $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x}$  обозначает матрицу Якоби. Элементы множеств  $S_2$  и  $S_3$  упорядочены так, что  $j_1 < j_2$  для всех  $(j_1, j_2) \in S_2$  и  $l_1 < l_2$  для  $(l_1, l_2, l_3) \in S_3$ .

**2.2. Представление решений в виде ряда Вольтерра.** Разложим решение  $x(t)$  системы (1) с начальным условием  $x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^n$  в ряд Вольтерра, предположив, что функция  $u(t)$  непрерывна при  $t \in [0, \varepsilon]$  (см. [15]):

$$\begin{aligned}
 x(t) = & x^0 + \sum_{i=1}^m f_i(x^0) \int_0^t u_i(s) ds + \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} f_j(x) \Big|_{x=x^0} \int_0^t \int_0^\tau u_i(\tau) u_j(p) dp d\tau + \\
 & + \sum_{i,j,l=1}^m \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} f_j(x) \right) f_l(x) \Big|_{x=x^0} \int_0^t \int_0^\tau \int_0^s u_i(\tau) u_j(s) u_l(p) dp ds d\tau + R(t), \quad t \in [0, \varepsilon].
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

В представлении (3) функция  $R(t)$  обозначает остаточный член, который равен нулю для класса нильпотентных систем. Для систем общего вида справедлива следующая лемма об оценке остаточного члена.

**Лемма 1.** Пусть  $D \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклая область и функция  $x(t) \in D, 0 \leq t \leq \varepsilon$ , является решением системы (1), соответствующим начальному условию  $x(0)=x^0 \in D$  и управлению  $u \in C[0, \varepsilon]$ . Если векторные поля  $f_1(x), \dots, f_m(x)$  удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(x) \right\| & \leq M_1, \quad \left\| \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial x^2}(x) \right\| \leq M_2, \\
 \left( \sum_{k,p,z=1}^n \left( \frac{\partial^3 f_{ij}(x)}{\partial x_k \partial x_p \partial x_z} \right)^2 \right)^{1/2} & \leq M_3, \quad x \in D, \quad i, j \in S_1,
 \end{aligned}$$

с некоторыми положительными постоянными  $M_1, M_2, M_3$ , то остаточный член в разложении (3) может быть оценен следующим образом:

$$\|R(t)\| \leq \frac{m^4 U^4 M_0}{24} (M_1^3 + M_0(M_0 M_3 + 4M_1 M_2) \sqrt{n}) t^4 + O(t^5), \tag{4}$$

где  $M_0 = \max_{1 \leq i \leq m} \|f_i(x^0)\|, U = \max_{1 \leq i \leq m} \|u_i\|_{L^\infty(0, \varepsilon)}$ .

Доказательство этого результата аналогично доказательству леммы 2.2 в статье [8].

Для дальнейшего исследования представим формулу (3) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 x(t) = & x^0 + \sum_{i=1}^m f_i(x^0) \int_0^t u_i(s) ds + \frac{1}{2} \sum_{i < j} [f_i, f_j](x^0) \int_0^t \int_0^\tau (u_j(\tau) u_i(s) - u_i(\tau) u_j(s)) ds d\tau + \\
 & + \frac{1}{3} \sum_{i \leq j} \sum_{l=1}^m [[f_i, f_j], f_l](x^0) \int_0^t \int_0^\tau \int_0^s (u_l(\tau) (u_j(s) u_i(p) - u_i(s) u_j(p))) dp ds d\tau + \\
 & + G(t) + R(t),
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

где выражение для  $G(t)$  приведено в приложении.

**3. Решение двухточечной задачи управления. 3.1. Построение функций управления.**  
Для решения двухточечной задачи управления используем следующее семейство тригонометрических полиномов:

$$\begin{aligned}
 u_i(t) = & a_i + \sum_{(q,r) \in S_2} a_{qr} \left( \delta_{iq} \cos \frac{2\pi K_{qr}}{\varepsilon} t + \delta_{ir} \sin \frac{2\pi K_{qr}}{\varepsilon} t \right) + \\
 & + \sum_{(q,r,s) \in S_3} a_{qrs} \left( \delta_{iq} \cos \frac{2\pi K_{1qrs}}{\varepsilon} t + \delta_{ir} \sin \frac{2\pi K_{2qrs}}{\varepsilon} t + \delta_{is} \sin \frac{2\pi K_{3qrs}}{\varepsilon} t \right), \\
 & i \in S_1, \quad t \in [0, \varepsilon],
 \end{aligned} \tag{6}$$

где  $a_i, a_{qr}, a_{qrs}$  являются вещественными параметрами,  $K_{qr}, K_{1qrs}, K_{2qrs}, K_{3qrs}$  — целые числа,  $\varepsilon > 0$ , а  $\delta_{ij}$  обозначает символ Кронекера.

**Предположение 1.** Для каждой  $(q, r) \in S_2, (q_k, r_k, s_k) \in S_3, k = 1, 2, 3$ , из условий

$$c_1 K_{qr} + \sum_{k=1}^3 c_{k+1} K_{q_k r_k s_k} = 0, \quad c_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 < \sum_{k=1}^4 |c_i| \leq 3,$$

следует, что  $(q_1, r_1, s_2) = (q_2, r_2, s_3) = (q_3, r_3, s_3), c_1 = 0, c_2 = c_3 = -c_4 = 1$ .

Используя формулу (5) с управлениями (6), получаем

$$\begin{aligned}
 x(\varepsilon) = & x^0 + \varepsilon \sum_{i=1}^m f_i(x^0) a_i + \frac{\varepsilon^2}{4\pi} \sum_{(i,j) \in S_2} [f_i, f_j](x^0) \frac{a_{ij}^2}{K_{ij}} + \frac{\varepsilon^2}{2} \Omega_1(a, x^0) + \\
 & + \frac{\varepsilon^3}{16\pi^2} \sum_{(i,j,l) \in S_3} \frac{a_{ijl}^3}{K_{2ijl}} \left( \frac{[[f_i, f_j], f_l](x^0)}{K_{3ijl}} - \frac{[f_i, [f_j, f_l]](x^0)}{K_{1ijl}} \right) + \frac{\varepsilon^3}{6} \Omega_2(a, x^0) + R(\varepsilon), \tag{7}
 \end{aligned}$$

где  $\Omega_1, \Omega_2$  зависят от коэффициентов функций (6) и начального значения  $x^0$  (явные формулы приведены в приложении).

Из представления (7) и леммы 1 следует основной результат данной статьи.

**Теорема 1.** Для заданных состояний  $x^0 \in \mathbb{R}^n, x^1 \in \mathbb{R}^n$  и времени  $\varepsilon > 0$  управление  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T$  вида (6) с коэффициентами, удовлетворяющими системе уравнений

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \sum_{i=1}^m f_i(x^0) a_i + \frac{\varepsilon^2}{4\pi} \sum_{(i,j) \in S_2} [f_i, f_j](x^0) \frac{a_{ij}^2}{K_{ij}} + \frac{\varepsilon^2}{2} \Omega_1(a, x^0) + \\
 + \frac{\varepsilon^3}{16\pi^2} \sum_{(i,j,l) \in S_3} \frac{a_{ijl}^3}{K_{2ijl}} \left( \frac{[[f_i, f_j], f_l](x^0)}{K_{3ijl}} - \frac{[f_i, [f_j, f_l]](x^0)}{K_{1ijl}} \right) + \\
 + \frac{\varepsilon^3}{6} \Omega_2(a, x^0) = x^1 - x^0, \tag{8}
 \end{aligned}$$

переводит систему (1) из начального положения  $x(0) = x^0$  в  $R(\varepsilon)$ -окрестность точки  $x^1$ , где  $R(\varepsilon)$  оценивается по формуле (4).

**3.2. Разрешимость алгебраической системы.** Отметим, что хотя система (8) имеет довольно громоздкий вид, ее можно записать более компактно с использованием свойств символа Кронекера в формулах для  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . В этом пункте мы докажем, что существует по крайней мере одно вещественное решение системы (8):

$$a = (a_1, \dots, a_m, a_{j_1 l_1}, \dots, a_{j_\alpha l_\alpha}, a_{q_1 r_1 s_2}, \dots, a_{q_\beta r_\beta s_\beta})^T \in \mathbb{R}^n,$$

где  $\alpha = |S_2|$ ,  $\beta = |S_3|$ . Следуя подходу статьи [8], определим новые переменные по формулам

$$\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m, \tilde{a}_{j_1 l_1}, \dots, \tilde{a}_{j_\alpha l_\alpha}, \tilde{a}_{q_1 r_1 s_2}, \dots, \tilde{a}_{q_\beta r_\beta s_\beta})^T \in \mathbb{R}^n,$$

где  $\tilde{a}_i = \varepsilon a_i$  для  $i \in S_1$ ,  $\tilde{a}_{jl} = \frac{\varepsilon^2 a_{jl}^2}{4\pi K_{jl}}$  для  $(j, l) \in S_2$  и  $\tilde{a}_{qrs} = \frac{\varepsilon^3 a_{qrs}^3}{16\pi^2 K_{2qrs}}$  для  $(q, r, s) \in S_3$ .

Предполагается, что  $\text{sign}(K_{jl}) = \text{sign}(\tilde{a}_{jl})$  для ненулевых  $\tilde{a}_{jl}$  и  $\text{sign}(K_{jl}) = 1$  для  $\tilde{a}_{jl} = 0$ , что обеспечивает корректность определения  $\tilde{a}_{jl}$ .

Запишем систему (8) в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \tilde{a}_i f_i(x^0) + \sum_{(i,j) \in S_2} \tilde{a}_{ij} [f_i, f_j](x^0) + \sum_{(i,j,l) \in S_3} \tilde{a}_{ijl} \left( \frac{[[f_i, f_j], f_l](x^0)}{K_{3ijl}} - \frac{[f_i, [f_j, f_l](x^0)]}{K_{1ijl}} \right) + \\ + \tilde{\Omega}(\tilde{a}, x^0) = x^1 - x^0, \end{aligned} \tag{9}$$

где  $\tilde{\Omega}(\tilde{a}, x^0) = \Omega_1(\tilde{a}, x^0) + \frac{1}{3} \Omega_2(\tilde{a}, x^0)$ . Можно показать, что выражение  $\tilde{\Omega}(\tilde{a}, x^0)$  не зависит от знаков  $K_{qr}$  и не содержит членов порядка малости ниже, чем  $4/3$ , по отношению к  $\tilde{a}$  при  $\tilde{a} \rightarrow 0$ . Для каждого мультииндекса  $(q, r, s) \in S_3$  подберем целое число  $K_{1qrs}$  так, чтобы следующая матрица  $\mathcal{F}(x^0)$  была невырожденной:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x^0) = \left( f_1(x), \dots, f_m(x^0), [f_{j_1}, f_{l_1}](x^0), \dots, [f_{j_\alpha}, f_{l_\alpha}](x^0), \right. \\ \left. \frac{[[f_{q_1}, f_{r_1}], f_{s_2}](x^0)}{K_{3q_1 r_1 s_2}} - \frac{[f_{q_1}, [f_{r_1}, f_{s_2}]](x^0)}{K_{1q_1 r_1 s_2}}, \dots \right. \\ \left. \dots, \frac{[[f_{q_\beta}, f_{r_\beta}], f_{s_\beta}](x^0)}{K_{3q_\beta r_\beta s_\beta}} - \frac{[f_{q_\beta}, [f_{r_\beta}, f_{s_\beta}]](x^0)}{K_{1q_\beta r_\beta s_\beta}} \right), \end{aligned} \tag{10}$$

где  $\alpha = |S_2|$ ,  $\beta = |S_3|$ . Отметим, что такой выбор параметров  $K_{1qrs}$  всегда возможен благодаря ранговому условию (2). Затем выберем целые значения  $|K_{qr}|$ ,  $K_{1qrs}$ ,  $K_{3qrs}$  в соответствии с предположением 1. Таким образом, для решения  $\tilde{a}$  системы (9) с заданным  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  компоненты решения системы (8) определяются так:

$$a_i = \varepsilon^{-1} \tilde{a}_i \quad \text{для } i \in S_1, \quad a_{jl} = 2\varepsilon^{-1} \text{sign}(\tilde{a}_{jl}) \sqrt{\pi |K_{jl}| |\tilde{a}_{jl}|} \quad \text{для } (j, l) \in S_2,$$

$$a_{qrs} = 2\sqrt[3]{2} \varepsilon^{-1} \sqrt[3]{\pi^2 K_{2qrs} \tilde{a}_{qrs}} \quad \text{для } (q, r, s) \in S_3,$$

где  $K_{jl}$  положительны при  $a_{jl} \geq 0$  и отрицательны — в противном случае.

С помощью этих преобразований вопрос о разрешимости системы (8) сводится к исследованию системы (9).

**Теорема 2.** *Существует такое  $r > 0$ , что система (9) разрешима относительно  $\tilde{a} \in \mathbb{R}^n$  для всех  $x^1 \in \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющих неравенству  $\|x^1 - x^0\| \leq r$ .*

**Доказательство.** Пусть  $K_{1qrs}$ ,  $(q, r, s) \in S_3$ , выбраны так, что матрица (10) невырождена для всех  $x \in \mathbb{R}^n$ . Умножив обе части системы (9) на матрицу  $\mathcal{F}^{-1}(x^0)$ , получим  $\Phi(\tilde{a}) = 0$ , где

$$\Phi(\tilde{a}) = \tilde{a} + \mathcal{F}^{-1}(x^0) \left( \tilde{\Omega}(\tilde{a}, x^0) + x^0 - x^1 \right).$$

Оценим норму функции  $\Phi(\tilde{a}) - \tilde{a}$ :

$$\|\Phi(\tilde{a}) - \tilde{a}\| = \left\| \mathcal{F}^{-1}(x^0) \left( \tilde{\Omega}(\tilde{a}, x^0) + x^0 - x^1 \right) \right\| \leq \|\mathcal{F}^{-1}(x^0)\| \left( \|\tilde{\Omega}(\tilde{a}, x^0)\| + \|x^0 - x^1\| \right).$$

В силу свойств  $\tilde{\Omega}(\tilde{a}, x^0)$ , существует такое  $C(x^0) > 0$ , что  $\|\tilde{\Omega}(\tilde{a}, x^0)\| \leq C(x^0)\|\tilde{a}\|^{4/3}$  для всех  $\tilde{a} \in \mathbb{R}^n : \|\tilde{a}\| \leq 1$ . Следовательно,  $\|\Phi(\tilde{a}) - \tilde{a}\| \leq \|\mathcal{F}^{-1}(x^0)\| (C(x^0)\|\tilde{a}\|^{4/3} + \|x^0 - x^1\|)$ .

Пусть число  $\gamma \in (0, 1)$  удовлетворяет неравенству

$$\gamma^{1/3} < \frac{1}{C(x^0)\|\mathcal{F}^{-1}(x^0)\|}.$$

Тогда существует такое число  $r > 0$ , что  $\|\mathcal{F}^{-1}(x^0)\| (C(x^0)\gamma^{4/3} + \|x^0 - x^1\|) < \gamma$ . Отсюда следует оценка

$$\|\Phi(\tilde{a}) - \tilde{a}\| \leq \|\tilde{a}\| \quad \text{для} \quad \tilde{a} \in \mathcal{S}_\gamma = \{\tilde{a} \in \mathbb{R}^n : \|\tilde{a}\| = \gamma\},$$

т. е. отображения  $\Phi(\tilde{a})$  и  $\Psi(\tilde{a}) = \tilde{a}$  гомотопны на сфере  $\mathcal{S}_\gamma$ , и вращение векторного поля  $\Phi(\tilde{a})$  на  $\mathcal{S}_\gamma$  равно 1. Из принципа ненулевого вращения [11] следует существование такого вектора  $\tilde{a} \in B_\gamma(0)$ , что  $\Phi(\tilde{a}) = 0$ .

Из теоремы 2 следует существование вещественного решения  $a \in \mathbb{R}^n$  системы (8) для достаточно близких точек  $x^0$  и  $x^1$ . В следующем пункте покажем применение теоремы 1 на нескольких примерах, для которых система алгебраических уравнений (8) решается численно.

**4. Примеры. 4.1. Управляемая система с квадратичными векторными полями.** Рассмотрим двухточечную задачу управления для следующей системы:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1, \\ \dot{x}_2 &= u_2, \\ \dot{x}_3 &= x_2^2 u_1 - x_1^2 u_2, \end{aligned} \tag{11}$$

где  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $u \in \mathbb{R}^2$ . Такая система рассматривалась в работах [4, 17] как модель движения плоского твердого тела с двумя осцилляторами. В этом пункте мы явно построим управления  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , переводящие систему (11) из нуля в точку  $x^1 \in \mathbb{R}^3$ . Запишем векторные поля для системы (11):

$$f_1(x) = (1, 0, x_2^2)^T, \quad f_2(x) = (0, 1, -x_1^2)^T, \quad [f_1, f_2](x) = (0, 0, -2(x_1 + x_2))^T.$$

Пусть  $x^0 = 0 \in \mathbb{R}^3$ . Тогда  $f_1(x^0) = f_2(x^0) = [f_1, f_2](x^0) = 0$ , т. е. для выполнения рангового условия управляемости недостаточно скобок Ли первого порядка, поэтому мы также вычислим скобку Ли второго порядка:  $[[f_1, f_2], f_1](x) = (0, 0, 2)^T$ . Тогда ранговое условие (2) выполнено с  $S_2 = \emptyset$  и  $S_3 = \{(1, 2, 1)\}$ .

Управления (6) в рассматриваемом случае примут вид

$$u_1(t) = a_1 + a_{121} \left( \cos \frac{2\pi K_1}{\varepsilon} t + \sin \frac{2\pi K_3}{\varepsilon} t \right), \quad u_2(t) = a_2 + a_{121} \sin \frac{2\pi K_2}{\varepsilon} t, \quad (12)$$

где параметры  $K_1 = K_{1121}, K_2 = K_{2121}, K_3 = K_{3121}$  удовлетворяют предположению 1.

Подставляя (12) в формулу (7), получаем

$$\begin{aligned} x_1(\varepsilon) &= \varepsilon a_1, \quad x_2(\varepsilon) = \varepsilon a_2, \\ x_3(\varepsilon) &= \frac{\varepsilon^3}{2\pi^2 K_1} \left( -\frac{a_{121}^3}{4K_3} + \frac{a_{121}^2}{4(K_2 + K_3)} \left( \frac{a_1}{K_2^2} (4K_2 K_3 + 3K_1(K_2 + K_3)) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{a_2}{K_1 K_3^2} (2K_2^2 K_3 + K_1(K_1 + K_3)^2) \right) \right) + \\ &\quad + \frac{a_{121}(a_1 + a_2)}{K_1 K_2 K_3} \left( \pi K_1^2 (a_1 K_3 - a_2 K_2) + a_2 K_2 K_3 \right) + \frac{2\pi^2 K_1}{3} a_1 a_2 (a_2 - a_1). \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что все скобки Ли выше второго порядка равны нулю и приведенное представление решений с помощью ряда Вольтерра является точным. Нетрудно показать, что при заданных  $\varepsilon > 0, x(\varepsilon) \in \mathbb{R}^3$  и ненулевых целых числах  $K_1, K_2, K_3$  система алгебраических уравнений (13) имеет вещественные решения  $a_1, a_2, a_{121}$ .

Пусть  $K_1 = 2, K_2 = 3, K_3 = 5$ , тогда следующие функции решают двухточечную задачу управления для  $x^0 = (0, 0, 0)^T$  и  $x^1 = x(\varepsilon)$  при любом  $\varepsilon > 0$ :

$$u_1(t) = \frac{x_1^1}{\varepsilon} + \frac{\hat{a}_{121}}{\varepsilon} \left( \cos \frac{4\pi}{\varepsilon} t + \sin \frac{10\pi}{\varepsilon} t \right), \quad u_2(t) = \frac{x_2^1}{\varepsilon} + \frac{\hat{a}_{121}}{\varepsilon} \sin \frac{6\pi}{\varepsilon} t,$$

где  $\hat{a}_{121}$  — вещественный корень кубического уравнения

$$\begin{aligned} a_{121}^3 - \frac{75x_1^1 - 22x_2^1}{10} a_{121}^2 - \frac{2(x_1^2 + x_2^1)}{3} (20\pi x_1^1 + (15 - 12\pi)x_2^1) a_{121} - \\ - \frac{80\pi^2}{3} (x_1^1 x_2^1 (x_2^1 - x_1^1) - 3x_3^1) = 0. \end{aligned}$$

На рис. 1 представлен график решения  $x(t)$  системы (11) с  $x^1 = (1, 1, 1)^T$  для  $\varepsilon = 1$ .

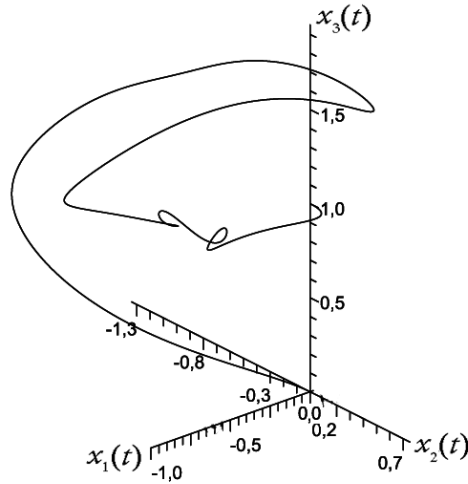


Рис. 1. Траектория системы (11), (12) с краевыми условиями  $x(0) = (0, 0, 0)^T$ ,  $x(1) = (0, 0, 1)^T$ .

**4.2. Катящийся диск.** Рассмотрим кинематические уравнения диска, катящегося по плоскости без проскальзывания (см., например, [13]):

$$\dot{x}_1 = u_1 \cos x_3, \quad \dot{x}_2 = u_1 \sin x_3, \quad (14)$$

$$\dot{x}_3 = u_2, \quad \dot{x}_4 = u_1,$$

где  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ ,  $u = (u_1, u_2)^T \in \mathbb{R}^2$ .

Для системы (14) выполнено ранговое условие

$$\text{span} \{f_1(x), f_2(x), [f_1, f_2](x), [[f_1, f_2], f_2](x)\} = \mathbb{R}^4 \quad \forall x \in \mathbb{R}^4,$$

где  $f_1(x) = (\cos x_3, \sin x_3, 0, 1)^T$ ,  $f_2(x) = (0, 0, 1, 0)^T$ . Следовательно,  $S_1 = \{1, 2\}$ ,  $S_2 = \{(1, 2)\}$ ,  $S_3 = \{(1, 2, 2)\}$  и функции управления (6) принимают вид

$$u_1(t) = a_1 + a_{12} \cos \frac{2\pi K_{12}}{\varepsilon} t + a_{122} \cos \frac{2\pi K_1}{\varepsilon} t, \quad (15)$$

$$u_2(t) = a_2 + a_{12} \sin \frac{2\pi K_{12}}{\varepsilon} t + a_{122} \left( \sin \frac{2\pi K_2}{\varepsilon} t + \sin \frac{2\pi K_3}{\varepsilon} t \right).$$

Пусть  $x^0 \in \mathbb{R}^4$ ,  $x^1 \in \mathbb{R}^4$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $K_1 = 2$ ,  $K_2 = 3$ ,  $K_3 = 5$ ,  $|K_{12}| = 9$  и  $a_1, a_2, a_{12}, a_{122}$  являются вещественными решениями уравнений

$$x_1^1 - x_1^0 = \varepsilon a_1 \cos x_3^0 - \varepsilon^2 I_1 \sin x_3^0 - \varepsilon^3 I_2 \cos x_3^0,$$

$$x_2^1 - x_2^0 = \varepsilon a_1 \sin x_3^0 + \varepsilon^2 I_1 \cos x_3^0 - \varepsilon^3 I_2 \sin x_3^0,$$

$$x_3^1 - x_3^0 = \varepsilon a_2, \quad x_4^1 - x_4^0 = \varepsilon a_1,$$



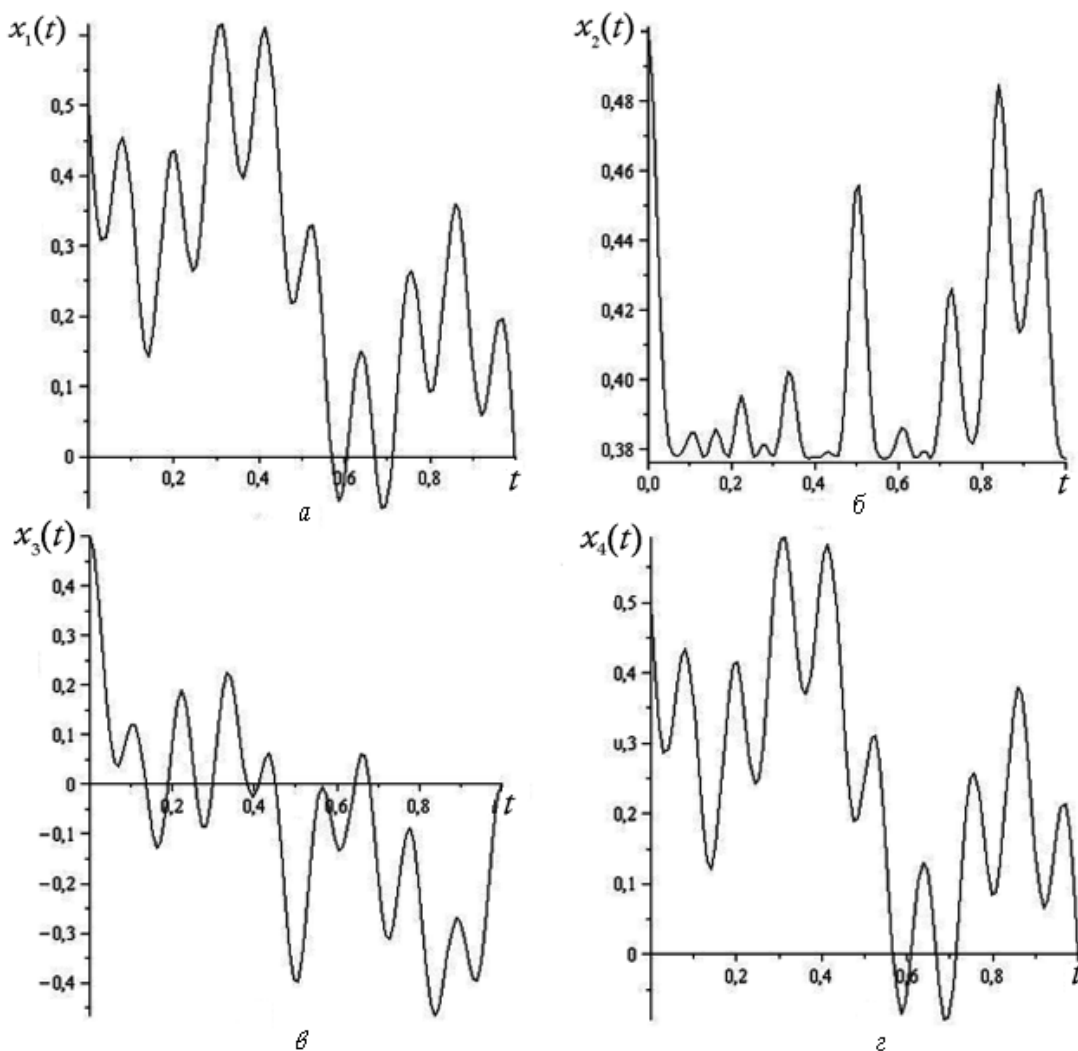


Рис. 2. Компоненты решения системы (14): а –  $(t, x_1(t))$ ; б –  $(t, x_2(t))$ ; в –  $(t, x_3(t))$ ; г –  $(t, x_4(t))$ .

где

$$I_1 = -\frac{a_{12}^2}{\pi K_{12}} + \frac{a_1 a_{12}}{2\pi K_{12}} + \frac{4a_1 a_{122}}{15\pi} + \frac{a_1 a_2}{2},$$

$$I_2 = \frac{a_{122}^3}{240\pi^2} + \frac{9a_{122}^2 a_1}{200\pi^2} - \frac{a_{122} a_{12}^2}{15\pi^2 K_{12}} + \frac{2a_{122} a_{12} a_1}{15K_{12}\pi^2} + \frac{a_{122} a_2^2}{16\pi^2} + \frac{2a_{122} a_1 a_2}{15\pi} -$$

$$- \frac{a_{12}^3}{8\pi^2 K_{12}^2} + \frac{3a_{12}^2 a_1}{16\pi^2 K_{12}^2} - \frac{a_{12}^2 a_2}{8\pi K_{12}} + \frac{a_{12} a_1 a_2}{4\pi K_{12}} + \frac{a_{12} a_2^2}{4\pi^2 K_{12}^2} + \frac{a_1 a_2^2}{6}.$$

Тогда управления (15) переводят систему (14) из  $x^0$  в  $x^1$  за время  $\varepsilon$ . В частности, для  $x^0 = (0, 5; 0, 5; 0, 5; 0, 5)^T$ ,  $x^1 = (0, 0, 0, 0)$  и  $\varepsilon = 1$ , поведение решения системы (14) с  $u_1(t) \approx -0,5 - 7,42 \cos 18\pi t - 2,3 \sin 10\pi t$ ,  $u_2(t) = -0,5 - 7,42 \sin 18\pi t - 2,3(\sin 6\pi t + \sin 10\pi t)$  показано на рис. 2.

**4.3. Вращательное движение твердого тела.** Теорема 1 и лемма 1 обосновывают возможность использования управлений вида (6) для линейных по управлению систем. Покажем, что предложенный подход может быть распространен и на некоторые аффинные по управлению системы. Чтобы проиллюстрировать эффективность использования тригонометрических управлений для таких систем, рассмотрим известный пример, описывающий вращательное движение твердого тела под действием двух независимых управляющих моментов (см., например, [1, 18]):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= A_1 x_2 x_3 + b_1 u_1 + c_1 u_2, \\ \dot{x}_2 &= A_2 x_1 x_3 + b_2 u_1 + c_2 u_2, \\ \dot{x}_3 &= A_3 x_1 x_2 + b_3 u_1 + c_3 u_2,\end{aligned}\tag{16}$$

где  $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$  — вектор угловой скорости твердого тела,  $u_1, u_2$  — управления,  $A_i, b_i, c_i, i = 1, 2, 3$ , — вещественные параметры.

Построим управления  $u_1, u_2$  вида (6), переводящие систему (16) из  $x^0 = 0$  в малую окрестность точки  $x^1 \in \mathbb{R}^3$  за время  $\varepsilon$ . Обозначим  $f_0(x) = (A_1 x_2 x_3, A_2 x_1 x_3, A_3 x_1 x_2)^T$ ,  $f_1(x) = (b_1, b_2, b_3)^T$ ,  $f_2(x) = (c_1, c_2, c_3)^T$  и предположим, что

$$\det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & A_1(c_2 b_3 + c_3 b_2) \\ b_2 & c_2 & A_2(c_1 b_3 + c_3 b_1) \\ b_3 & c_3 & A_3(c_1 b_2 + c_2 b_1) \end{pmatrix} \neq 0,$$

тогда  $\text{rank} \{f_1(x^0), f_2(x^0), [[f_0, f_1], f_1](x^0)\} = 3$ .

Представление (5) может быть записано следующим образом:

$$x(t) = f_1 \int_0^t u_1(\tau) d\tau + f_2 \int_0^t u_2(\tau) d\tau + \sum_{i,j=1}^2 [[f_0, f_i], f_j] \int_0^t \int_0^\tau \int_0^s u_i(s) u_j(p) dp ds d\tau + R(t).\tag{17}$$

Пусть  $S_1 = \{1, 2\}$ ,  $S_2 = \emptyset$ ,  $S_3 = \{(0, 1, 2)\}$ . Используя функции управления

$$u_i = a_i + a \sin \frac{2\pi K_i}{\varepsilon} t, \quad i = 1, 2,\tag{18}$$

и формулу (17) для  $x^1 = x(\varepsilon)$ , имеем

$$\begin{aligned}x_1^1 &= \varepsilon(a_1 b_1 + a_2 c_1) + 2A_1 b_2 b_3 I_{11} + A_1(b_2 c_3 + b_3 c_2) I_{12} + 2a_1 c_2 c_3 I_{22}, \\ x_2^1 &= \varepsilon(a_1 b_2 + a_2 c_2) + 2A_2 b_1 b_3 I_{11} + A_2(b_1 c_3 + b_3 c_1) I_{12} + 2a_2 c_1 c_3 I_{22}, \\ x_3^1 &= \varepsilon(a_1 b_3 + a_2 c_3) + 2A_3 b_1 b_2 I_{11} + A_3(b_1 c_2 + b_2 c_1) I_{12} + 2a_3 c_1 c_2 I_{22},\end{aligned}\tag{19}$$

где

$$I_{ii} = \varepsilon^3 \left( \frac{a_i^2}{3} + \frac{a_i a}{4\pi K_i} + \frac{3a^2}{16\pi^2 K_i^2} \right), \quad i = 1, 2,$$

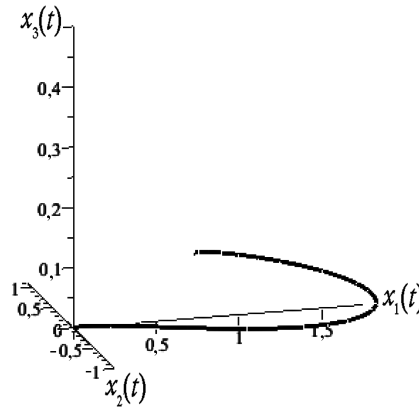


Рис. 3. Траектория системы (16) с управлением (18) для краевых условий  $x(0) = (0, 0, 0)$ ,  $x(1) = (1, 1, 0)$ .

$$I_{12} = \varepsilon^3 \left( \frac{a_1 a_2}{3} + \frac{a}{4\pi} \left( \frac{a_1}{K_1} + \frac{a_2}{K_2} \right) + \frac{3a^2}{8\pi^2 K_1 K_2} \right).$$

Вычисляя параметры в (18) как вещественное решение системы (19), получаем управления, которые приближенно переводят систему (16) из нуля в  $x^1$  за время  $\varepsilon$ .

Для примера положим  $A_1 = -1/3$ ,  $A_2 = 1/2$ ,  $A_3 = -1/5$ ,  $b_1 = c_2 = 1$ ,  $b_2 = b_3 = c_1 = c_3 = 0$ . В этом случае параметры управлений (18) таковы:

$$K_1 = 1, \quad K_2 = \begin{cases} -\text{sign}(\varepsilon x_1^1 x_2^1 + 24x_3^1), & \varepsilon x_1^1 x_2^1 \neq -24x_3^1, \\ 1, & \varepsilon x_1^1 x_2^1 = -24x_3^1, \end{cases}$$

$$a_1 = \varepsilon^{-1} x_1^1, \quad a_2 = \varepsilon^{-1} x_2^1,$$

$$a = -(2\varepsilon)^{-1} \pi (x_1^1 + K_2 x_2^1) + (6\varepsilon^2)^{-1} \left( 9\pi^2 \varepsilon^2 (x_1^{12} + x_2^{12}) + 30\pi^2 \varepsilon |\varepsilon x_1^1 x_2^1 + 24x_3^1| \right)^{1/2}.$$

На рис. 3 построен график решения системы (16) для  $x^1 = x(1) = (1, 1, 0)^T$ .

**4.4. Условие управляемости со скобками Ли высших порядков.** Следующий пример иллюстрирует еще одно возможное направление развития предложенного подхода. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2^3, \tag{20}$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 x_2^2 + u,$$

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Пусть  $x^0 = (0, 0)$ , тогда  $\text{span} \{f_1, [[f_0, f_1], f_1] f_1\} = \mathbb{R}^2$  с  $f_0 = (x_2^3, -x_1 x_2^2)^T$ ,  $f_1 = (0, 1)^T$ .

Как и в предыдущих примерах, запишем представление решения системы (20) с помощью ряда Вольтерра, но со скобками Ли третьего порядка:

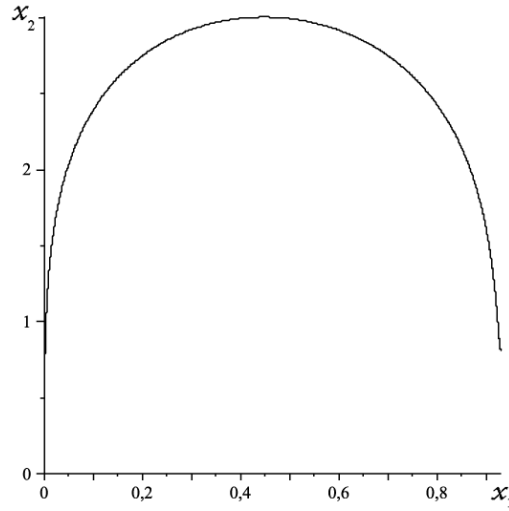


Рис. 4. Траектория системы (20) с управлениями (22).

$$x(t) = f_1(x^0) \int_0^t u(\tau) d\tau + [[f_0, f_1], f_1] f_1(x^0) \int_0^t \int_0^\tau \int_0^s \int_0^p u(s)u(p)u(r)drdpdsd\tau + R(t). \quad (21)$$

Пусть

$$u(t) = a + b \sin \frac{2\pi K}{\varepsilon} t, \quad K \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (22)$$

Тогда для  $x^1 = x(\varepsilon)$  формула (21) принимает вид

$$x_1^1 = \frac{\varepsilon^4}{16\pi^3 K^3} (4\pi^3 K^3 a^3 + 4(2\pi^2 K^2 - 3)a^2 b + 9\pi K a b^2 + 5b^3), \quad x_2^1 = \varepsilon a.$$

Положим  $K = 1$ ,  $a = \varepsilon^{-1} x_2^1$ , и пусть  $b$  удовлетворяет кубическому уравнению

$$5b^3 + \frac{9\pi x_2^1}{\varepsilon} b^2 + \frac{4(2\pi^2 - 3)x_2^{12}}{\varepsilon^2} b + \frac{4\pi^3(\varepsilon x_2^{13} - 4x_1^1)}{\varepsilon^4} = 0.$$

Тогда управление (22) приближенно решает двухточечную задачу управления для системы (20) с начальным положением в нуле. К примеру, для  $x^0 = (0, 0)^T$ ,  $x^1 = (1, 1)^T$ ,  $\varepsilon = 0, 1$  получаем управление  $u(t) \approx 10 + 79, 54 \sin 20\pi t$  (рис. 4).

Этот пример показывает, что семейство тригонометрических полиномов (22) может быть использовано и для решения двухточечной задачи для нелинейной системы (20) с хорошей точностью в случае, когда для выполнения условия управляемости необходимо использование скобок Ли более высоких порядков.

**5. Выводы.** В данной работе изучена двухточечная задача управления для класса линейных по управлению систем, удовлетворяющих ранговому условию (2). Ключевой особенностью этой работы является сведение краевой задачи с управлением к системе ал-

гебраических уравнений третьего порядка, что сформулировано в теореме 1. Насколько нам известно, до сих пор не были опубликованы общие результаты о разрешимости таких систем. Таким образом, теорема о локальной разрешимости (теорема 2) является новым результатом об обосновании применимости тригонометрических управлений в локальной задаче планирования движения. Отметим, что доказательство теоремы 2 основано на принципе ненулевого вращения, так как теорема о неявной функции в рассматриваемом случае неприменима. Кроме того, предложенный метод не требует замен переменных для перехода к каноническим формам, что делает его удобным с практической точки зрения. На примере нильпотентной системы показано, что предложенная схема управления переводит систему точно в целевую точку. В общем случае для оценки погрешности необходимо учитывать остаточный член ряда Вольтерра. Вопросы погрешности метода остаются открытыми для дальнейших исследований. Другое возможное расширение метода связано с использованием скобок Ли высших порядков и планированием движения с обходом препятствий.

**Приложение.**

$$\begin{aligned}
 G(t) = & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} f_j(x) \Big|_{x=x^0} \int_0^t u_i(s) ds \int_0^t u_j(s) ds + \\
 & + \frac{1}{6} \sum_{i,j,l=1}^m \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} f_j(x) \right) f_l(x) \Big|_{x=x^0} \times \\
 & \times \int_0^t u_i(s) ds \int_0^t u_j(s) ds \int_0^t u_l(s) ds + \\
 & + \frac{1}{6} \sum_{i<j}^m \sum_{l=1}^m \left( \frac{\partial f_l(x)}{\partial x} [f_i, f_j](x) + 2 \frac{\partial}{\partial x} ([f_i, f_j](x)) f_l(x) \right) \Big|_{x=x^0} \times \\
 & \times \int_0^t u_l(s) ds \int_0^t \int_0^{\tau} (u_j(s) u_i(p) - u_i(s) u_j(p)) dp ds,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega_1 = & \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} f_j(x) \Big|_{x=x^0} a_i a_j + \frac{1}{\pi} \sum_{i<j} [f_i, f_j](x^0) \left( \sum_{(q,r) \in S_2} \frac{a_{qr}}{K_{qr}} A_{ij}^r + \right. \\
 & \left. + \sum_{(q,r,s) \in S_3} a_{qrs} \left( \frac{A_{ij}^r}{K_{2qrs}} + \frac{A_{ij}^s}{K_{3qrs}} \right) \right), \quad A_{ij}^q = \delta_{iq} \tilde{a}_j - \delta_{jq} \tilde{a}_i,
 \end{aligned}$$

$$\Omega_2 = \sum_{i,j,l=1}^m \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} f_j(x) \right) f_l(x) \Big|_{x=x^0} a_i a_j a_l +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi} \sum_{i < j} \sum_{l=1}^m \left( \frac{\partial f_l(x)}{\partial x} [f_i, f_j](x) + 2 \frac{\partial}{\partial x} ([f_i, f_j](x)) f_l(x) \right) \Big|_{x=x^0} \times \\
& \times a_l \left\{ \sum_{(q,r) \in S_2} \frac{a_{qr}}{K_{qr}} \left( \delta_{iq} \delta_{jr} \frac{a_{qr}}{2} + A_{ij}^r \right) + \sum_{(q,r,s) \in S_3} a_{qrs} \left( \frac{A_{ij}^r}{K_{2qrs}} + \frac{A_{ij}^s}{K_{3qrs}} \right) \right\} + \\
& + \frac{1}{2\pi} \sum_{i < j} \sum_{l=1}^m [[f_i, f_j], f_l] \left\{ \sum_{(q,r) \in S_2} \frac{a_{qr}}{K_{qr}} \left\{ \delta_{iq} \delta_{jr} a_l a_{qr} + \right. \right. \\
& + A_{ij}^q \left( -\frac{\delta_{lr} a_{qr}}{2} + \frac{3}{\pi K_{qr}} \left( a_l - \frac{\delta_{lq} a_{qr}}{4} \right) \right) + A_{ij}^r \left( \frac{a_{qr} \delta_{lq}}{2} + a_l - \frac{5\delta_{lr} a_{qr}}{4\pi K_{qr}} \right) - \\
& - \frac{1}{\pi} \sum_{(k,p) \in S_2} \frac{a_{kp}}{K_{kp}} \left( \delta_{lp} A_{ij}^r + \frac{a_{qr}}{2} (2\delta_{lp} \delta_{iq} \delta_{jr} + \delta_{lq} (\delta_{ip} \delta_{jr} - \delta_{jp} \delta_{ir})) + \delta_{lr} (\delta_{iq} \delta_{jp} - \delta_{jq} \delta_{ip})) \right) + \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{(k,p) \in S_2 \\ (k,p) \neq (q,r)}} \frac{a_{kp}}{K_{kp}^2 - K_{qr}^2} \left( K_{qr} (a_l (\delta_{ik} \delta_{jq} - \delta_{jk} \delta_{iq}) - \delta_{lk} A_{ij}^q) + \right. \\
& \left. + K_{kp} (a_l (\delta_{ip} \delta_{jr} - \delta_{jp} \delta_{ir}) - \delta_{lp} A_{ij}^r) \right) \left. \right\} + \\
& + \sum_{(q,r,s) \in S_3} a_{qrs} \left\{ \frac{3A_{ij}^q}{\pi K_{1qrs}^2} \left( a_l - \frac{a_{qrs} \delta_{lq}}{4} \right) + \right. \\
& + \frac{A_{ij}^r}{K_{2qrs}} \left( a_l - \frac{5a_{qrs} \delta_{lr}}{4\pi K_{2qrs}} \right) - \frac{A_{ij}^s}{K_{3qrs}} \left( a_l - \frac{5a_{qrs} \delta_{ls}}{4\pi K_{3qrs}} \right) - \\
& - \frac{1}{\pi} \sum_{(k,p,z) \in S_3} a_{kpz} \left( \frac{A_{ij}^r}{K_{2qrs}} \left( \frac{\delta_{lp}}{K_{2kpz}} + \frac{\delta_{lz}}{K_{3kpz}} \frac{2K_{3kpz}^2 - K_{2qrs}^2}{K_{3kpz}^2 - K_{2qrs}^2} \right) + \right. \\
& + \frac{A_{ij}^s}{K_{3qrs}} \left( \frac{\delta_{lz}}{K_{3kpz}} + \frac{\delta_{lp} (2K_{2kpz}^2 - K_{3qrs}^2)}{K_{2kpz} (K_{2kpz}^2 - K_{3qrs}^2)} \right) + \\
& + a_l \left( \frac{K_{3kpz} (\delta_{iz} \delta_{jr} - \delta_{jz} \delta_{ir})}{K_{2qrs} (K_{3kpz}^2 - K_{2qrs}^2)} + \frac{K_{2kpz} (\delta_{ip} \delta_{js} - \delta_{jp} \delta_{is})}{K_{3qrs} (K_{2kpz}^2 - K_{3qrs}^2)} \right) \left. \right) + \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{(k,p,z) \in S_3 \\ (k,p,z) \neq (q,r,s)}} a_{kpz} \left( \frac{a_l (\delta_{ik} \delta_{jq} - \delta_{jk} \delta_{iq}) - \delta_{lk} A_{ij}^q}{K_{1kpz}^2 - K_{1qrs}^2} + \frac{K_{2kpz}}{K_{2qrs}} \times \right. \\
& \left. \times \frac{a_l (\delta_{ip} \delta_{jr} - \delta_{jp} \delta_{ir}) - \delta_{lp} A_{ij}^r}{K_{2kpz}^2 - K_{2qrs}^2} + \frac{K_{3kpz}}{K_{3qrs} (K_{3kpz}^2 - K_{3qrs}^2)} (a_l (\delta_{iz} \delta_{js} - \delta_{jz} \delta_{is}) - \delta_{lz} A_{ij}^s) \right) \left. \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{(q,r) \in S_2} \sum_{(k,p,z) \in S_3} a_{qr} a_{kpz} \left\{ \frac{1}{K_{1kpz}^2 - K_{qr}^2} \left( 2a_l(\delta_{ik}\delta_{jq} - \delta_{jk}\delta_{iq}) - \delta_{lk}A_{ij}^q + \delta_{lq}A_{ij}^k \right) + \right. \\
 & + \frac{1}{K_{2kpz}K_{qr}} \left( \left( a_l(K_{2kpz}^2 + K_{qr}^2) - \frac{a_{qr}\delta_{lq}}{2}(K_{2kpz}^2 - K_{qr}^2) \right) \times \right. \\
 & \times (\delta_{ip}\delta_{jr} - \delta_{jp}\delta_{ir}) + a_{qr}(K_{2kpz}^2 - K_{qr}^2) \left( \delta_{lp}(\delta_{ir}\delta_{jq} - \delta_{jr}\delta_{iq}) + \frac{\delta_{lr}}{2}(\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}) \right) - \\
 & - \delta_{lp}A_{ij}^r(2K_{2kpz}^2 - K_{qr}^2) - \delta_{lr}A_{ij}^p(K_{2kpz}^2 - 2K_{qr}^2) \left. \right) + \\
 & + \frac{1}{K_{3kpz}K_{qr}} \left( \left( a_l(K_{3kpz}^2 + K_{qr}^2) - \frac{a_{qr}\delta_{lq}}{2}(K_{3kpz}^2 - K_{qr}^2) \right) (\delta_{iz}\delta_{jr} - \delta_{jz}\delta_{ir}) + \right. \\
 & + a_{qr}(K_{3kpz}^2 - K_{qr}^2) \left( \delta_{ls}(\delta_{ir}\delta_{jq} - \delta_{jr}\delta_{iq}) + \frac{\delta_{lr}}{2}(\delta_{iz}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jz}) \right) - \\
 & \left. - \delta_{lz}A_{ij}^r(2K_{3kpz}^2 - K_{qr}^2) - \delta_{lr}A_{ij}^z(K_{3kpz}^2 - 2K_{qr}^2) \right) \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

1. *Crouch P. E.* Spacecraft attitude control and stabilization: applications of geometric control theory to rigid body models // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1984. — **29**. — P. 321–331.
2. *Brockett R. W.* Control theory and singular Riemannian geometry // New Direct. Appl. Math. / Eds P. J. Hilton, G. S. Young. — New York: Springer-Verlag, 1981. — P. 11–27.
3. *Bushnell L. G., Tilbury D. M., Sastry S. S.* Steering three-input chained form nonholonomic systems using sinusoids: the fire truck example // Int. J. Robot. Res. — 1995. — **14**. — P. 366–381.
4. *Cariñena J. F., Clemente-Gallardo J., Ramos A.* Motion on Lie groups and its applications in control theory // Repts Math. Phys. — 2003. — **51**. — P. 159–170.
5. *Chitour Y., Jean F., Long R.* A global steering method for nonholonomic systems // J. Different. Equat. — 2013. — **254**. — P. 1903–1956.
6. *Chumachenko T., Zuyev A.* Application of the return method to the steering of nonlinear systems // Robot Motion and Control / Ed. K. Kozłowski. — Berlin: Springer, 2009. — P. 83–91.
7. *Duleba I., Khefifi W., Karcz-Duleba I.* Layer, Lie algebraic method of motion planning for nonholonomic systems // J. Franklin Inst. — 2012. — **349**. — P. 201–215.
8. *Грушковская В. В., Зуев А. Л.* Приближенное решение краевой задачи для управляемых систем, удовлетворяющих ранговому условию // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, № 4. — С. 86–101.
9. *Gurvits L., Li Z. X.* Smooth time-periodic feedback solutions for nonholonomic motion planning // Nonholonomic Motion Planning / Eds Z. Li, J. F. Canny. — New York: Springer, 1993. — P. 53–108.
10. *Jean F.* Control of nonholonomic systems: from sub-Riemannian geometry to motion planning. — Cham: Springer, 2014.
11. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. — М.: Наука, 1975. — 512 с.
12. *Lafferriere G., Sussmann H. J.* Motion planning for controllable systems without drift // Proc. 1991 IEEE Int. Conf. Robot. and Automat. — Sacramento, 1991. — P. 1148–1153.

13. *Li Z., Canny J.* Motion of two rigid bodies with rolling constraint // IEEE Trans. Robot. and Automat. — 1990. — **6**. — P. 62–71.
14. *Murray R. M., Sastry S. S.* Steering nonholonomic systems using sinusoids // Proc. 29th IEEE CDC. — Honolulu, 1990. — P. 2097–2101.
15. *Nijmeijer H., van der Schaft A. J.* Nonlinear dynamical control systems. — New York: Springer-Verlag, 1990.
16. *Liu W.* An approximation algorithm for nonholonomic systems // SIAM J. Contr. and Optim. — 1997. — **35**. — P. 1328–1365.
17. *Yang R., Krishnaprasad P. S., Dayawansa W.* Optimal control of a rigid body with two oscillators // Mech. Day, Fields Inst. Commun. — Providence: Amer. Math. Soc., 1996. — **7**. — P. 233–260.
18. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975. — 496 с.

Получено 08.06.15