УДК 532:595

РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА, ЯКІ ЗАДОВОЛЬНЯЮТЬ УМОВУ НЕПРОТІКАННЯ НА СЕГМЕНТІ СФЕРИ*

М. Я. Барняк

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, 01601, Київ, Україна
e-mail: barnyak@imath.kiev.ua

We construct a set of harmonic functions which satisfy the zero-Neumann condition on the spherical cap. The functions can be used as a functional basis for getting approximate solutions of the boundary problems in the liquid sloshing. The harmonic functions were derived by Kelvin inversion of auxiliary functions which fulfill the corresponding boundary condition on an interval of the horizontal axis. The functions were utilised for computing the natural sloshing frequencies in a spherical tank.

Построена система решений уравнения Лапласа, которые удовлетворяют условию непротекания на сегменте сферической поверхности. Такие функции можно использовать в качестве координатных функций для построения решений краевых задач, которые описывают динамику идеальной жидкости, частично заполняемой сферическую полость. Получены эти функции с помощью преобразования инверсии специальных решений уравнения Лапласа, которые удовлетворяют соответствующему краевому условию на отрезке горизонтальной прямой. Построенная система функций применена к определению частот собственных колебаний жидкости в сферической полости.

1. Вступ. У роботі [1] запропоновано спосіб побудови частинних розв'язків рівняння Лапласа, які задовольняють умову непротікання

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad S_0, \tag{1}$$

де S_0 — точки сферичної поверхні

$$r^2 + (z+1)^2 - 1 = 0, \tag{2}$$

за винятком точки верхнього полюса сфери з координатами $r_0 = 0$, $z_0 = 0$.

В роботі [2] продовжено побудову таких функцій та використано їх для побудови розв'язків крайових задач гідродинаміки ідеальної рідини у сферичній порожнині. Однак недоліком побудованих у цих роботах функцій є те, що вони задовольняють умову (1) в усіх точках поверхні S_0.

У даній роботі побудовано такі розв'язки рівняння Лапласа, які задовольняють умову (1) лише на частині області S_0, тобто на сегменті сферичної поверхні (2) при $z < h - 2$, де h набуває заданого значення в межах $0 < h < 2$. Для цього використано побудовані в роботі [3] спеціальні розв'язки рівняння Лапласа, що мають особливості в деякій точці області і задовольняють відповідну умову на відрізку горизонтальної прямої. За допомогою перетворення інверсії ці функції перетворюються в функції, які задовольняють умову (1) лише на частині області S_0.

* Виконано за часткової підтримки НІР № 0112U001015.

2. Перетворення інверсії в задачі про власні коливання ідеальної рідини в сферичній порожнині. Розглянемо крайову спектральну задачу з параметром у крайовій умові, яка описує власні коливання ідеальної рідини, що частково заповнює сферичну порожнину одиничного радіуса на висоту h:

$$\triangle\varphi = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad S_0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \lambda\varphi \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{3}$$

де $\Omega : \{r^2 + (z+1)^2 - 1 < 0, z < h-2, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ — область, заповнена рідиною, $\Sigma : \{z = h-2, r < r_0 = \sqrt{2h - h^2}, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ — незбурена вільна поверхня рідини, $S : \{r^2 + z^2 + 2z = 0, z < h-2, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ — змочена тверда стінка сферичної порожнини, (r, z, θ) — циліндрична система координат, початок якої вибрано у верхньому полюсі сфери.

В роботі [3] для побудови розв'язків задачі (3) використано перетворення інверсії області, при якому, як відомо [4], інверсовані функції задовольняють рівняння Лапласа. В даній роботі також буде використано це перетворення в дещо зміненому вигляді. Розглянемо перетворення інверсії області Ω відносно сфери з центром у початку координат і радіусом

$$a = \sqrt{r_0^2 + (2-h)^2} = \sqrt{h(2-h) + (2-h)^2} = \sqrt{2(2-h)}. \tag{4}$$

Покажемо, що при такому виборі радіуса інверсії лінія перетину поверхонь Σ і S перейде сама в себе, а поверхня Σ — в поверхню S і навпаки, поверхня S перейде в Σ.

Перетворення інверсії має вигляд

$$r = \frac{a^2\xi}{p^2}, \quad z = \frac{a^2\eta}{p^2}, \quad \text{де} \quad p^2 = \xi^2 + \eta^2. \tag{5}$$

Обернене перетворення має такий вигляд:

$$\xi = \frac{a^2 r}{R^2}, \quad \eta = \frac{a^2 z}{R^2}, \quad \text{де} \quad R^2 = r^2 + z^2 = \frac{a^4}{p^2}. \tag{6}$$

Отже, сфера, яка в циліндричних координатах задається рівнянням

$$r^2 + z^2 + 2z = 0,$$

перетворюється у площину $\dfrac{a^4}{p^2} + \dfrac{2a^2\eta}{p^2} = 0$, $\eta + \dfrac{a^2}{2} = 0$, або $\eta + 2 - h = 0$. Введемо позначення для відстані від вільної поверхні рідини до центра інверсії

$$c = 2 - h.$$

Тепер розглянемо обернене перетворення інверсії площини

$$z + c = 0,$$

$$\frac{a^2\eta}{p^2} + (2-h) = 0, \quad 2(2-h)\eta + (2-h)(\xi^2 + \eta^2) = 0, \quad \xi^2 + \eta^2 + 2\eta = 0,$$

тобто площина інверсується у сферу.

Доведемо тепер таку теорему.

Теорема. *Нехай функція* $\varphi(r,z,\theta)$ *задовольняє в області* Ω *рівняння Лапласа*

$$\triangle\varphi \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}=0 \quad (\textit{в} \quad \Omega) \tag{7}$$

і крайові умови

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{1}{2}\varphi=\lambda\frac{c^2}{p^2}\varphi \quad (\textit{на} \quad S), \tag{8}$$

$$R^2\frac{\partial\varphi}{\partial z}-c\varphi=0 \quad \textit{при} \quad z+c=0 \quad (\textit{на} \quad \Sigma). \tag{9}$$

Тоді функція

$$\psi(r,z,\theta)=\frac{c}{R}\varphi\left(\frac{c^2r}{R^2},\frac{c^2z}{R^2},\theta\right) \tag{10}$$

задовольняє в тій же області Ω *рівняння (7) і крайові умови*

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=0 \quad (\textit{на} \quad S), \tag{11}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}-\lambda\psi=0 \quad \textit{при} \quad z+c=0 \quad (\textit{на} \quad \Sigma). \tag{12}$$

Доведення. Обчислимо $\dfrac{\partial\psi}{\partial n}$ на S на основі (10):

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=-\frac{c}{R^3}\left(r\cos(n,r)+z\cos(n,z)\right)\varphi+\frac{c}{R}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial n}+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial n}\right),$$

де $\cos(n,r)=r$, $\cos(n,z)=z+1$ — напрямні косинуси зовнішньої нормалі до S,

$$\frac{\partial\xi}{\partial n}=\frac{c^2}{R^4}(z^2-r^2)r-\frac{c^2}{R^4}2zr(z+1)=\frac{c^2}{R^4}(z^2r-r^3-2z^2r-2zr)=$$

$$=\frac{c^2}{R^4}(-r^3-z^2r-2zr)=-\frac{c^2r}{R^4}(r^2+z^2+2z)=0,$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial n}=\frac{c^2}{R^4}(-2zr\cdot r)+\frac{c^2}{R^4}(r^2-z^2)(z+1)=\frac{c^2}{R^4}(-2zr^2+r^2z+r^2-z^3-z^2)=$$

$$=\frac{c^2}{R^4}(-zr^2-z^3-2z^2+r^2+z^2)=\frac{c^2}{R^2},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=-\frac{c}{R^3}(r^2+z(z+1))\varphi+\frac{c^3}{R^3}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=\frac{cz}{R^3}\varphi+\frac{c^3}{R^3}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=$$

$$=\frac{\eta}{cR}\varphi+\frac{c^3}{R^3}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=\frac{1}{cR}\left(\eta\varphi+\frac{c^4}{R^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)=\frac{1}{cR}\left(\eta\varphi+p^2\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)=0.$$

Тепер обчислимо $\dfrac{\partial\psi}{\partial z} - \lambda\psi$ на Σ на основі умови (8):

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} - \lambda\psi = -\frac{c}{R^3}\,z\varphi + \frac{c}{R}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}\right) - \frac{\lambda}{R}\,c\varphi =$$

$$= -\frac{\eta}{cR}\,\varphi + \frac{c}{R}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{(-2c^2rz)}{R^4} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{c^2(r^2-z^2)}{R^4}\right] - \frac{\lambda c}{R}\,\varphi =$$

$$= -\frac{\eta}{cR}\,\varphi + \frac{1}{cR}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(-2\xi\eta) + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(\xi^2-\eta^2)\right] - \frac{\lambda c}{R}\,\varphi =$$

$$= -\frac{\eta}{cR}\,\varphi - \frac{2\eta}{cR}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\,\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(\eta+1)\right] - \frac{\lambda c}{R}\,\varphi =$$

$$= -\frac{2\eta}{cR}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \frac{\lambda c^2}{2\eta}\,\varphi\right) = -\frac{2\eta}{cR}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{\lambda c^2}{p^2}\,\varphi\right) = 0.$$

Отже, функція ψ задовольняє умову (12).

Теорему доведено.

Таким чином, для того щоб побудувати функції $\varphi(r,z,\theta)$, які задовольняють умову (11), достатньо побудувати функції $\varphi(r,z,\theta)$, які задовольняють умову (9), і скористатися формулою (10).

Далі будемо розглядати розв'язки рівняння (7), які мають вигляд

$$\varphi(r,z,\theta) = \varphi^{(m)}(r,z)\cos m\theta,$$

де $\varphi^{(m)}(r,z)$ — розв'язки рівняння

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\varphi^{(m)}}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2}\,\varphi^{(m)} = 0 \tag{13}$$

в меридіальному перерізі області Ω, який позначимо через G, а L і Γ — меридіальні перерізи поверхонь S і Σ відповідно.

3. Розв'язки рівняння (13), які задовольняють умову (9) на всій площині $z + c = 0$, при $0 \leq r < \infty$. У роботах [1, 2] побудовано розв'язки рівняння (13), які задовольняють умову (9) при $z = c = 1$. Для довільного значення c вони мають вигляд

$$\varphi_k^m(r,z) = c(2k-1)w_{m+2k-2}^{(m)}(r,z+c) + w_{m+2k-1}^{(m)}(r,z+c) -$$

$$-\,2\,\frac{m+k}{c}\,w_{m+2k}^{(m)}(r,z+c), \quad k = 1,2,\ldots.$$

Тут $w_k^{(m)}(r,z)$ — однорідні поліноміальні розв'язки рівняння (13), які визначаються за допомогою рекурентних формул

$$w_m^{(m)}(r,z) = r^m, \quad w_{m+1}^{(m)}(r,z) = zr^m,$$

$$(k+2m+1)w_{m+k+1}^{(m)}(r,z) = (2k+2m+1)zw_{m+k}^{(m)}(r,z) - k(r^2+z^2)w_{m+k-1}^{(m)}(r,z).$$

У роботі [2] показано, що наведені вище функції необхідно доповнити при кожному m функцією

$$\varphi_0^m(r,z) = \sum_{k=-1}^{m} b_k c^k w_k^m(r,z),$$

де функції w_k^m і коефіцієнти $b_k^{(m)}$ при $k \le m$ визначаються таким чином:

$$w_0^m(r,z) = -\left(-\frac{2\sqrt{r^2+z^2}+z}{r}\right)^m, \quad w_{-1}^{(m)}(r,z) = -\frac{w_0^{(m)}(r,z)}{R},$$

$$(k+m+1)w_{k+1}^{(m)}(r,z) = (2k+1)zw_k^m - (k-m)(r^2+z^2)w_{k-1}^m,$$

$$k = 0,1,\ldots,m-1,$$

$$b_m^m = 1, \quad b_{m-1}^m = -\frac{1}{2m}, \quad b_{k-1}^{(m)} = -\frac{2b_k(k+1)}{k+1},$$

$$k = m-1, m-2, \ldots, 0.$$

Функції, які задовольняють умову (11), мають вигляд

$$\psi_0^m(r,z) = \frac{c}{R}\sum_{k=-1}^{m} b_k c^k w_k^{(m)}\left(\frac{c^2 r}{R^2}, \frac{c^2 z}{R^2}\right) = \frac{c}{R}\sum_{k=-1}^{m} b_k c^k w_k^m\left(\frac{r}{R^2}, \frac{z}{R^2}\right).$$

Враховуючи, що $\dfrac{1}{R}\, w_k^m\left(\dfrac{r}{R^2}, \dfrac{z}{R^2}\right) = w_{-k-1}^m(r,z)$, маємо

$$\psi_0^{(m)}(r,z) = \sum_{k=-m-1}^{0} b_{m-k}\, c^{m-k+1}\, w_k^{(m)}(r,z).$$

Функції $\psi_k^{(m)}(r,z)$ мають вигляд

$$\psi_k^{(m)}(r,z) = \frac{c^2}{R}(2k+1)w_{m+2k-2}^{(m)}\left(\frac{c^2 r}{R^2}, \frac{c^2 z}{R^2}+c\right) +$$
$$+\frac{c}{R}w_{m+2k-1}^{(m)}\left(\frac{c^2 r}{R^2}, \frac{c^2 z}{R^2}+c\right) - \frac{2c(m+k)}{R}\, w_{m+2k}^{(m)}\left(\frac{c^2 r}{R^2}, \frac{c^2 z}{R^2}+c\right).$$

4. Функції, які задовольняють умову (11) на сегменті сфери. Перейдемо до побудови функцій, які задовольняють умову (9) на деякому відрізку $0 \le r < r_0$. Для цього використаємо розв'язки рівняння (13), які побудовані в роботі [3], на основі їх зображення у вигляді дійсної та уявної частин функції

$$\varphi(r,z) = \int_0^{\pi} f(iz + r_0 + r\cos t)\, \cos mt\, dt, \tag{14}$$

де $r_0 > 0$ — відстань від кутової точки області G до осі симетрії порожнини.

Для зручності введемо позначення

$$u = iz + r_0.$$

Вважаємо, що у формулі (14) функція $f(u + r\cos t)$ дорівнює $ln(u + r\cos t)(u + r\cos t)^k$, та позначимо через $v_k^m(r,u)$ функції

$$v_k^m(r,u) = \frac{2^m}{\pi}\int\limits_0^\pi ln(u + r\cos t)(u + r\cos t)^k \cos mt\,dt,$$

а через $s_k^m(r,u)$ функції

$$s_k^m(r,u) = \frac{2^m}{\pi}\int\limits_0^\pi (u + r\cos t)^k \cos mt\,dt.$$

Як випливає з інтегральних зображень цих функцій, для частинних похідних цих функцій по змінних u та r мають місце рекурентні формули

$$\frac{\partial s_k^m}{\partial u} = ks_{k-1}^m, \quad r\frac{\partial s_k^m}{\partial r} = ks_k^m - uks_{k-1}^m, \tag{15}$$

$$\frac{\partial v_k^m}{\partial u} = kv_{k-1}^m + s_{k-1}^m, \quad r\frac{\partial v_k^m}{\partial r} = kv_k^m - kuv_{k-1}^m + s_k^m - us_{k-1}^m. \tag{16}$$

Диференціюючи отримані співвідношення по r і u, одержуємо рекурентні співвідношення для других похідних від цих функцій, а після підстановки їх в рівняння (13), яке задовольняють функції $v_k^m(r,u)$ і $s_k^m(r,u)$, — рекурентні формули

$$(k^2 - m^2)s_k^m - uk(2k-1)s_{k-1}^m + (u^2 - r^2)k(k-1)s_{k-2}^m = 0, \tag{17}$$

$$\begin{gathered}(k^2 - m^2)v_k^m - uk(2k-1)v_{k-1}^m + (u^2 - r^2)k(k-1)v_{k-2}^m + 2ks_k^m - \\ - u(4k-1)s_{k-1}^m + (u^2 - r^2)(2k-1)s_{k-2}^2 = 0.\end{gathered} \tag{18}$$

Використовуючи формулу (17), рекурентну формулу (18) можна спростити і записати у вигляді

$$\begin{gathered}[(k+2)^2 - m^2]v_{k+2}^m - u(k+2)(2k+3)v_{k+1}^m + (u^2 - r^2)(k+2)(k+1)v_k^m + \\ + \frac{m^2(2k+3) - (k+2)^2}{(k+1)(k+2)}\,s_{k+2}^m + \frac{k+2}{k+1}\,s_{k+1}^m = 0.\end{gathered}$$

Запишемо функцію $\varphi_k^*(r,z)$ у такому вигляді:

$$\begin{gathered}\varphi_k^*(r,z) = d_0\mathrm{Re}\,v_k^m(r,u) + d_1\mathrm{Re}\,v_{k+1}^m(r,u) + d_2\mathrm{Im}\,v_{k+1}^m(r,u) + d_3\mathrm{Re}\,v_{k+2}^m(r,u) + \\ + d_4\mathrm{Re}\,s_{k+1}^m(r,u) + d_5\mathrm{Im}\,s_{k+1}^m(r,u) + d_6\mathrm{Re}\,s_{k+2}^m(r,u),\end{gathered}$$

де $u = i(z+c) + r_0$, d_k — невідомі константи.

Якщо $z = -c$, то $u = r_0$, а функція $\operatorname{Im} v_k^m(r, r_0) = 0$ при $r < r_0$, оскільки в інтегральному зображенні функції $v_k^m(r, r_0)$ підінтегральна функція при $r \le r_0$ і довільному значенні t набуває дійсних значень. Це ж можна сказати і про уявну частину функції $s_k^m(r, r_0)$, тобто $\operatorname{Im} s_k^m(r, r_0) = 0$ при $r \le r_0$.

Обчислимо частинні похідні від функцій $s_k^m(r, i(z+c)+r_0)$ і $v_k^m(r, i(z+c)+r_0)$ по змінній z при $z = -c$ та $r \le r_0$:

$$\left.\frac{\partial s_k^m(r, i(z+c)+r_0)}{\partial z}\right|_{z=-c} = k s_{k-1}^m(r, r_0)\cdot i,$$

$$\left.\frac{\partial v_k^m(r, i(z+c)+r_0)}{\partial z}\right|_{z=-c} = (k v_{k-1}^m(r, r_0) + s_{k-1}^m(r, r_0))i.$$

Із наведених вище формул випливає

$$\frac{\partial}{\partial z}\,(\operatorname{Re} s_k^m)|_{z=-c} = -k\operatorname{Im}(s_k^m) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}\,(\operatorname{Im} s_k^m)|_{z=-c} = k\operatorname{Re}(s_k^m),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\,(\operatorname{Re} v_k^m)|_{z=-c} = -k\operatorname{Im}\, v_{k-1}^m - \operatorname{Im} s_{k-1}^m = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\,(\operatorname{Im} v_k^m)|_{z=-c} = k\operatorname{Re} v_{k-1}^m + \operatorname{Re} s_{k-1}^m.$$

Праві частини цих формул залежать від r та r_0, і вони справджуються при $r \le r_0$.

Підставимо функцію $\varphi_k^*(r, z)$ у крайову умову (9) із урахуванням наведених вище співвідношень:

$$\begin{aligned} c[d_0\operatorname{Re} v_k^m(r, r_0) + d_1\operatorname{Re} v_{k+1}^m(r, r_0) + d_3\operatorname{Re} v_{k+2}^m(r, r_0) + \\ + d_4\operatorname{Re} s_{k+1}^m(r, r_0) + d_6\operatorname{Re} s_{k+2}^m(r, r_0)] - (c^2 + r^2)[d_2(k+1)\operatorname{Re} v_{k+1}^m(r, r_0) + \\ + d_2\operatorname{Re} s_k^m + d_5(k+1)\operatorname{Re} s_k^m(r, r_0)] = 0. \end{aligned}$$

Оскільки $\operatorname{Im} s_k^m(r, r_0) = 0$ і $\operatorname{Im} v_k^m(r, r_0) = 0$ при $r \le r_0$, то після згрупування подібних членів можна записати одержане рівняння у вигляді

$$\begin{aligned} [cd_0 - (c^2 + r^2)d_2(k+1)]v_k^m(r, r_0) - (c^2 + r^2)(d_2 + d_5(k+1))s_k^m(r, r_0) + cd_1 v_{k+1}^m(r, r_0) + \\ + cd_3 v_{k+2}^m(r, r_0) + cd_4 s_{k+1}^m + cd_6 s_{k+2}^m(r, r_0) = 0. \end{aligned}$$

Порівняємо наведене рівняння із рекурентною формулою (18), яка при $u = r_0$ набирає вигляду

$$\begin{aligned} [(k+2)^2 - m^2]v_{k+2}^m(r, r_0) - r_0(k+2)(2k+3)v_{k+1}^m(r, r_0) + (r_0^2 - r^2)(k+2)(k+1)v_k^m(r, r_0) + \\ + \frac{(2k+3)m^2 - (k+2)^2}{(k+1)(k+2)}\, s_{k+2}^m(r, r_0) + r_0\,\frac{k+2}{k+1}\, s_{k+1}^m = 0. \end{aligned}$$

Відношення між коефіцієнтами при однакових функціях повинні бути однаковими. Отже,

$$\frac{d_3}{(k+2)^2-m^2} = \frac{d_1}{-r_0(k+2)(2k+3)} = \frac{d_0 - c^2 d_2(k+1)}{r_0^2(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{d_2(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{d_4(k+1)}{-(k+2)r_0} = \frac{d_6(k+1)(k+2)}{(2k+3)m^2-(k+2)^2},$$

$$d_2 + d_5(k+1) = 0, \quad cd_0 - c^2 d_2(k+1) = r_0^2 d_2(k+1), \quad d_0 = (c^2+r_0^2)d_2(k+1).$$

Оскільки коефіцієнти d_k визначаються з точністю до сталого множника, то покладемо $d_0 = c^2 + r^2$. Тоді

$$d_2 = \frac{c}{k+1}, \quad d_4 = \frac{r_0 d_2}{k+1} = \frac{r_0}{(k+1)^2}, \quad d_5 = -\frac{d_2}{k+1} = -\frac{c}{(k+1)^2},$$

$$d_1 = -\frac{r_0(2k+3)}{k+1}, \quad d_3 = \frac{(k+2)^2-m^2}{(k+1)(k+2)}, \quad d_6 = \frac{(2k+3)m^2-(k+2)^2}{(k+1)^2(k+2)^2}.$$

В результаті одержимо

$$\varphi_k^*(r,z) = (c^2+r_0^2)\operatorname{Re} v_k^m(r,u) - \frac{r_0(2k+3)}{k+1}\operatorname{Re} v_{k+1}^m(r,u) +$$

$$+ \frac{c}{k+1}\operatorname{Im} v_{k+1}^m(r,u) + \frac{(k+2)^2-m^2}{(k+1)(k+2)}\operatorname{Re} v_{k+2}^m(r,u) +$$

$$+ \frac{r_0}{(k+1)^2}\operatorname{Re} s_{k+1}^m(r,u) + \frac{c}{(k+1)^2}\operatorname{Im} s_{k+1}^m(r,u) +$$

$$+ \frac{(2k+3)^2m^2-(k+2)^2}{(k+1)^2(k+2)^2}\operatorname{Re} s_{k+2}(r,u), \quad \text{де} \quad u = i(z+c)+z_0.$$

Цю формулу можна записати ще в такому вигляді:

$$\varphi_k^*(r,z) = \operatorname{Re}\Bigg[(c^2+r_0^2)v_k^m(r,u) - \frac{r_0(2k+3)+ic}{k+1}\,v_{k+1}^m(r,u) + \frac{(k+2)^2-m^2}{(k+1)(k+2)}\,v_{k+2}^m(r,u) +$$

$$+ \frac{r_0+ic}{(k+1)^2}\,s_{k+1}^m(r,u) + \frac{(2k+3)m^2-(k+2)^2}{(k+1)^2(k+2)^2}\,s_{k+2}(r,u)\Bigg], \quad u = i(z+c)+r_0.$$

При $m=1$ ця функція набирає вигляду

$$\varphi_k^*(r,z) = \operatorname{Re}\Bigg[(c^2+r_0^2)v_k^*(r,u) - \frac{r_0(2k+3)+ic}{k+1}\,v_{k+1}^m(r,u) + \frac{k+3}{k+2}\,v_{k+2}^m(r,u) +$$

$$+ \frac{r_0+ic}{(k+1)^2}\,s_{k+1}^m(r,u) - \frac{1}{(k+2)^2}s_{k+2}^m(r,u)\Bigg], \quad \text{де} \quad u = i(z+c)+r_0.$$

Функція $\psi_k^*(r,z)$, яка задовольняє умову (11) на S, має вигляд

$$\psi_k^*(r,z) = \frac{c}{R}\,\mathrm{Re}\left[(c^2+r_0^2)v_k^*(\xi,u_1) - \frac{r_0(2k+3)+ic}{k+1}\,v_{k+1}^m(\xi,u_1) + \right.$$

$$+\frac{k+3}{k+2}\,v_{k+2}^m(\xi,u_1) + \frac{r_0+ic}{(k+1)^2}\,s_{k+1}^m(\xi,u_1) -$$

$$\left. -\frac{1}{(k+2)^2}\,s_{k+2}^m(\xi,u_1)\right],$$

де

$$u_1 = i\left(\frac{c^2 z}{R^2} + c\right) + r_0, \quad \xi = \frac{c^2 r}{R^2}.$$

Обчислимо похідну по z від функції $\psi_k^*(r,z)$:

$$\frac{\partial\psi_k^*}{\partial z} = -\frac{z}{R^2}\,\psi_k^* + \frac{c}{R}\,\frac{\partial\psi_k^*}{\partial\xi}\,\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{c}{R}\,\frac{\partial\psi_k}{\partial u_1}\,\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\,\frac{\partial\eta}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial z} = -\frac{2c^2 rz}{R^4}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial\eta} = i, \quad \frac{\partial\eta}{\partial z} = \frac{c^2(r^2-z^2)}{R^4}.$$

Для обчислення похідних $\dfrac{\partial\psi_k^*}{\partial\xi}$ і $\dfrac{\partial\psi_k^*}{\partial u_1}$ використаємо рекурентні формули для похідних (15) і (16).

Функції $\varphi_k^*(r,z)$ в сукупності з функціями $\varphi_k^m(r,z)$ використано в якості координатних функцій при реалізації варіаційного методу розв'язування задачі. При врахуванні трьох функцій $\varphi_0^m(r,z)$ і від чотирьох до десяти функцій $\varphi_0^*(r,z)$ при $m=1$ одержано величини для перших двох власних значень задачі (3) (див. таблицю).

h	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2	N	N_1
0,5	1,207717	5,496884	1,207717	5,496884	3	4
0,75	1,356965	5,257182	1,356965	5,257182	3	4
1,0	1,560157	5,275546	1,560157	5,275546	3	4
1,25	1,859132	5,583088	1,859132	5,583088	3	5
1,5	2,362244	6,373042	2,362244	6,373042	3	6
1,75	3,500317	8,531005	3,500317	8,530989	3	10

В четвертому і п'ятому стовпчиках наведено перші два значення задачі, одержані іншим методом в роботі [3]. Як видно із таблиці, ці значення майже скрізь однакові, хоча в роботі [3] використано до 36 координатних функцій. У шостому і сьомому стовпчиках наведено кількість врахованих функцій $\varphi_k^m(r,z)$ і $\varphi_k^*(r,z)$. Побудовані тут функції $\varphi_k^*(r,z)$ і $\psi_k^*(r,z)$ можна використати і при розв'язуванні інших задач динаміки рідини у сферичній порожнині, в тому числі і нелінійних задачах.

1. *Барняк М. Я., Луковский И. А.* К решению задач динамики идеальной несжимаемой жидкости в сферической полости и в горизонтальном круговом канале // Мат. физика и нелинейная механика. — 1985. — Вып. 4 (38). — С. 66 – 71.
2. *Барняк М. Я., Жавроцький Д. С., Луковський І. О.* Наближений метод побудови розв'язків крайових задач гідродинаміки ідеальної рідини в сферичній порожнині // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — **2**, № 1. — С. 64 – 73.
3. *Барняк М. Я.* Побудова розв'язків крайових задач для рівняння Лапласа в областях обертання з ребристою межею // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 5. — С. 579 – 595.
4. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 830 с.

Одержано 15.06.15