УДК 517 . 9

УСРЕДНЕНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ПРОИЗВОДНОЙ ХУКУХАРЫ

Н. В. Скрипник

Одес. нац. ун-т
Украина, 27026, Одесса, ул. Дворянская, 2
e-mail: talie@ukr.net

We give a substantiation for the method of complete or partial averaging for differential inclusions that contain the Hukuhara derivative and are subject to impulsive effects at fixed times.

Наведено обґрунтування методу повного і часткового усереднення для диференціальних включень із похідною Хукухари, що зазнають імпульсного впливу в фіксовані моменти часу.

Хукухара [1] ввел интеграл и производную для многозначных отображений и рассмотрел их связь между собой. Впоследствии в работе [2] было впервые рассмотрено дифференциальное уравнение с производной Хукухары, решение которого являлось многозначным отображением. В последующих работах [3, 4] были введены различные определения решения этого уравнения и доказаны теоремы их существования. M. Kisieliwicz [5] и А. В. Плотников [6] рассмотрели возможность применения некоторых схем усреднения для такого класса задач.

В [7] было введено понятие дифференциального включения с производной Хукухары, получены некоторые свойства их решений и рассмотрена возможность применения некоторых схем усреднения для такого типа включений в стандартной форме [6, 8, 9]. В работе [10] были получены некоторые аналогичные результаты для дифференциальных включений с производной Хукухары с запаздыванием.

Обозначим через $\mathrm{cc}\,(\mathbb{R}^n)(\mathrm{cocc}\,(\mathbb{R}^n))$ пространство, состоящее из всех непустых (и выпуклых) подмножеств пространства $\mathrm{conv}\,(\mathbb{R}^n)$ с метрикой

$$\chi(A,B) = \max\{\max_{a\in A}\min_{b\in B} h(a,b), \max_{b\in B}\min_{a\in A} h(a,b)\},$$

где $h(a,b)$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами $a, b \in \mathrm{conv}\,(\mathbb{R}^n)$.

Определим также скалярную функцию $\mathrm{dist}\,(a,B), a \in \mathrm{conv}\,(R^n), B \in \mathrm{cc}\,(R^n)$, следующим образом:

$$\mathrm{dist}\,(a,B) = \min_{b\in B} h(a,b).$$

Определение 1. *Под интегралом Аумана – Хукухары от многозначного отображения $F : [t_0,T] \to \mathrm{cc}\,(\mathbb{R}^n)$ будем понимать множество $G \in \mathrm{cc}\,(\mathbb{R}^n)$, определяемое следующим образом:*

$$G = \left\{ g \in \mathrm{conv}\,(\mathbb{R}^n),\ g = \int\limits_{t_0}^{t} f(t)dt \,:\, f(\cdot) \in F(\cdot) \right\},$$

где $f : [t_0, T] \to \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ *и интеграл от многозначного отображения* $f(\cdot)$ *понимается в смысле Хукухары [10].*

Теорема 1 [6]. *Пусть многозначное отображение* $F : [t_0, T] \to \mathrm{cocc}(\mathbb{R}^n)$ *ограничено и интегрируемо. Тогда множество* $G = \int_{t_0}^{T} F(s)ds$ *выпукло и компактно.*

Рассмотрим дифференциальное включение с производной Хукухары

$$D_h X \in F(t, X), \tag{1}$$

где $F : \mathbb{R} \times \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{cc}(\mathbb{R}^n)$ — многозначное отображение.

Определение 2. *Решением дифференциального включения (1) называется абсолютно непрерывное многозначное отображение* $X(\cdot)$, *определенная на промежутке* $I \subset \mathbb{R}$ *производная которого удовлетворяет включению (1) почти всюду на* I.

Теорема 2 [8, 6]. *Пусть:*

1) отображение $F : [t_0, T] \times \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{cc}(\mathbb{R}^n)$ *непрерывно по* (t, X) *и удовлетворяет условию Липшица по* X *с суммируемой функцией* $k(t)$;

2) отображение $Y(\cdot)$ *абсолютно непрерывно на* $[t_0, T]$ *и*

$$\mathrm{dist}\,(D_h Y(t), F(t, Y(t))) < \rho(t)$$

почти всюду на $[t_0, T]$, *где* $\rho(\cdot)$ — *суммируемая функция на* $[t_0, T]$;

3) для некоторого $X_0 \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ *выполнено условие*

$$h(Y(t_0), X_0) \le \delta.$$

Тогда существует решение $X(\cdot)$ *задачи (1), определенное на* $[t_0, T]$, *такое, что:*

1) $X(t_0) = X_0$;

2) $h(X(t), Y(t)) \le \xi(t),\ t \in [t_0, T]$;

3) $h(D_h X(t), D_h Y(t)) \le k(t)\xi(t) + \rho(t)$ *почти всюду на* $[t_0, T]$, *где*

$$\xi(t) = \delta e^{m(t)} + \left| \int_{t_0}^{t} e^{m(t)-m(s)} \rho(s) ds \right|, \qquad m(t) = \left| \int_{t_0}^{t} k(s) ds \right|, \quad t \in [t_0, T].$$

Рассмотрим обоснование метода полного усреднения на конечном промежутке для дифференциальных включений, подвергающихся импульсному воздействию в фиксированные моменты времени вида

$$D_h X \in \varepsilon F(t, X), \quad t \ne \tau_i, \qquad X(0) = X_0, \tag{2}$$

$$\Delta X|_{t=\tau_i} \in I_i(x).$$

Если для любого $X \in D$ существует предел

$$F_0(X) = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} F(t, X) dt + \frac{1}{T} \sum_{t \le \tau_i < t+T} I_i(X) \right), \tag{3}$$

то включению (2) поставим в соответствие усредненное включение

$$D_h Y \in \varepsilon F_0(Y), \quad Y(0) = X_0. \tag{4}$$

Теорема 3. *Пусть в области* $Q\{t \geq 0,\ X \in D \subset \mathrm{conv}\,(\mathbb{R}^n)\}$ *выполнены следующие условия:*

1) многозначные отображения $F : Q \to \mathrm{cocc}\,(\mathbb{R}^n)$, $I_i : D \to \mathrm{cocc}\,(\mathbb{R}^n)$ *непрерывны, равномерно ограничены постоянной* M *и удовлетворяют условию Липшица по* X *с постоянной* λ;

2) равномерно относительно $t \geq 0$ *и* $X \in D$ *существует предел (3) и*

$$\frac{1}{T}\, i(t, t+T) \leq d < \infty,$$

где $i(t, t+T)$ — *количество точек последовательности* τ_i *на промежутке* $(t, t+T]$;

3) решения включения (4) для всех $X_0 \in D' \subset D$ *при* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *вместе с некоторой* ρ*-окрестностью принадлежат области* D.

Тогда для любого $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *существует* $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$ *такое, что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *справедливы следующие утверждения:*

1) для любого решения $Y(t)$ *включения (4) существует решение* $X(t)$ *включения (2) такое, что выполняется неравенство*

$$h(X(t), Y(t)) < \eta; \tag{5}$$

2) для любого решения $X(t)$ *включения (2) существует решение* $Y(t)$ *включения (4) такое, что имеет место неравенство (5).*

Таким образом, справедлива оценка

$$\chi(R(t), R_0(t)) < \eta,$$

где $R(t)$ — *сечение семейства решений исходного включения,* $R_0(t)$ — *сечение семейства решений усредненного включения.*

Доказательство. В силу условий 1, 2 теоремы 2 и теоремы 1 многозначное отображение $F_0 : D \to \mathrm{cocc}\,(\mathbb{R}^n)$ является ограниченным постоянной $M_1 = M(1+d)$ и удовлетворяет условию Липшица с постоянной $\lambda_1 = \lambda(1+d)$.

Действительно,

$$|F_0(X)| = \chi(F_0(X), \{0\}) \leq \chi\left(F_0(X), \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} F(t,X)dt + \frac{1}{T}\sum_{t \leq \tau_i < t+T} I_i(X)\right) +$$

$$+\chi\left(\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} F(t,X)dt + \frac{1}{T}\sum_{t \leq \tau_i < t+T} I_i(X), \{0\}\right) < \alpha + \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} |F(s,X)|ds +$$

$$+\frac{1}{T}\sum_{t \leq \tau_i < t+T} |I_i(X)| < \alpha + M + dM = \alpha + M(1+d),$$

$$\chi(F_0(X_1), F_0(X_2)) \le \chi\left(F_0(X_1), \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} F(t, X_1)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\le\tau_i<t+T} I_i(X_1)\right) +$$

$$+\chi\left(\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} F(t, X_1)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\le\tau_i<t+T} I_i(X_1), \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} F(t, X_2)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\le\tau_i<t+T} I_i(X_2)\right) +$$

$$+\chi\left(\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} F(t, X_2)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\le\tau_i<t+T} I_i(X_2), \{0\}\right) <$$

$$< 2\alpha + \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} \chi(F(s, X_1), F(s, X_2))ds + \frac{1}{T}\sum_{t\le\tau_i<t+T} \chi(I_i(X_1), I_i(X_2))$$

$$\le 2\alpha + \lambda h(X_1, X_2) + \lambda d h(X_1, X_2) = 2\alpha + \lambda(1+d)h(X_1, X_2),$$

где α может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора T. Таким образом,

$$|F_0(X)| \le M(1+d), \quad \chi(F_0(X_1), F_0(X_2)) \le \lambda(1+d)h(X_1, X_2).$$

Докажем, что

$$R_0(t) \subset S_\eta(R(t)),$$

где $S_\eta(R(t))$ – η-окрестность множества $R(t)$. Пусть $Y(t)$ — некоторое решение включения (4). Разобьем отрезок $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на частичные с шагом $\gamma(\varepsilon)$ таким, что $\gamma(\varepsilon) \to \infty$ и $\varepsilon\gamma(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда существует измеримая ветвь $V(t)$ отображения $F_0(Y(t))$ такая, что

$$Y(t) = Y(t_j) + \varepsilon\int\limits_{t_j}^{t} V(s)ds, \qquad Y(0) = X_0, \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \tag{6}$$

где $t_j = j\gamma(\varepsilon),\ m\gamma(\varepsilon) \le L\varepsilon^{-1} < (m+1)\gamma(\varepsilon),\ j = \overline{0, m}$.

Рассмотрим функцию

$$Y^1(t) = Y^1(t_j) + \varepsilon V_j(t - t_j), \qquad t \in [t_j, t_{j+1}], \quad Y^1(0) = X_0, \tag{7}$$

где множества $V_j \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ таковы, что

$$h\left(\gamma(\varepsilon)V_j, \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} V(s)ds\right) = \min_{V\in F_0(Y^1(t_j))} h\left(\gamma(\varepsilon)V, \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} V(s)ds\right). \tag{8}$$

Множество V_j существует в силу компактности множества $F_0(Y^1(t_j))$ и непрерывности минимизируемой функции.

Обозначим $\delta_j = h(Y(t_j), Y^1(t_j))$. При $t \in [t_j, t_{j+1}]$ в силу (6) и (7)

$$h(Y(t), Y(t_j)) \le M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon), \quad h(Y^1(t), Y^1(t_j)) \le M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon). \tag{9}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} h(Y(t), Y^1(t_j)) \le h(Y(t_j), Y^1(t_j)) + h(Y(t), Y(t_j)) \le \delta_j + \varepsilon M_1(t - t_j), \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \\ \chi(F_0(Y(t)), F_0(Y^1(t_j)) \le \lambda_1 h(Y(t), \qquad Y^1(t_j)) \le \lambda_1(\delta_j + \varepsilon M_1(t - t_j)). \end{gathered} \tag{10}$$

Из (8) и (10) следует, что

$$h\left(\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} V(s)ds, \gamma(\varepsilon)V_j\right) \le \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \chi(F_0(Y(s)), F_0(Y^1(t_j)))ds \le \lambda_1\left(\delta_j\gamma(\varepsilon) + \varepsilon M_1\frac{\gamma^2(\varepsilon)}{2}\right). \tag{11}$$

Учитывая (6) и (7), получаем

$$\delta_{j+1} \le \delta_j + \varepsilon\lambda_1\left(\delta_j\gamma(\varepsilon) + \varepsilon M_1\frac{\gamma^2(\varepsilon)}{2}\right) = (1 + \lambda_1\varepsilon\gamma(\varepsilon))\delta_j + \lambda_1 M_1\frac{\varepsilon^2\gamma^2(\varepsilon)}{2}. \tag{12}$$

Из неравенства (12) с учетом того, что $\delta_0 = 0$, имеем

$$\begin{gathered} \delta_1 \le \lambda_1 M_1\frac{\varepsilon^2\gamma^2(\varepsilon)}{2}, \\ \delta_2 \le (1 + \lambda_1\varepsilon\gamma(\varepsilon))\delta_1 + \lambda_1 M_1\frac{\varepsilon^2\gamma^2(\varepsilon)}{2} \le \lambda_1 M_1\frac{\varepsilon^2\gamma^2(\varepsilon)}{2}((1 + \lambda_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)) + 1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered} \delta_{j+1} \le \lambda_1 M_1\frac{\varepsilon^2\gamma^2(\varepsilon)}{2}((1 + \lambda_1\varepsilon\gamma(\varepsilon))^i + (1 + \lambda_1\varepsilon\gamma(\varepsilon))^{i-1} + \dots + 1) = \\ = \frac{M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)}{2}\left((1 + \lambda_1\varepsilon\gamma(\varepsilon))^{i+1} - 1\right) \le \frac{M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)}{2}\left((1 + \lambda_1\varepsilon\gamma(\varepsilon))^{\frac{L}{\varepsilon\gamma(\varepsilon)}} - 1\right) \le \\ \le \frac{M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)}{2}(e^{\lambda_1 L} - 1). \end{gathered}$$

Таким образом, в силу неравенств (9) справедлива оценка

$$\begin{gathered} h(Y(t), Y^1(t)) \le h(Y(t), Y(t_j)) + h(Y(t_j), Y^1(t_j)) + h(Y^1(t_j), Y^1(t)) \le \\ \le 2M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon) + \frac{M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)}{2}(e^{\lambda_1 L} - 1) \le \frac{M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)}{2}(e^{\lambda_1 L} + 3). \end{gathered} \tag{14}$$

Из условия 2 теоремы следует, что для любого $\eta_1 > 0$ существует $\varepsilon_1(\eta_1) > 0$ такое, что при $\varepsilon \le \varepsilon_1(\eta_1)$ выполняется неравенство

$$\chi\left(F_0(Y^1(t_j)), \frac{1}{\gamma(\varepsilon)}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} F(s, Y^1(t_j))ds + \frac{1}{\gamma(\varepsilon)}\sum_{t_j \le \tau_i < t_{j+1}} I_i(Y^1(t_j))\right) < \eta_1. \qquad (15)$$

Следовательно, существуют множества $U_j(t) \in F(t, Y^1(t_j)),\ \ P_{ij} \in I_i(Y^1(t_j))$ такие, что

$$h\left(V_j, \frac{1}{\gamma(\varepsilon)}\left(\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} U_j(s)ds + \sum_{t_j \le \tau_i < t_{j+1}} P_{ij}\right)\right) < \eta_1. \qquad (16)$$

Рассмотрим семейство функций

$$X^1(t) = X^1(t_j) + \varepsilon\int\limits_{t_j}^{t} U_j(s)ds + \varepsilon\sum_{t_j \le \tau_i < t} P_{ij},\ t \in (t_j, t_{j+1}]. \qquad (17)$$

Из (7), (17) и (16) с учетом того, что $X^1(0) = Y^1(0)$, следует, что при $j = \overline{1, m}$

$$h(X^1(t_j), Y^1(t_j)) \le h(X^1(t_{j-1}), Y^1(t_{j-1})) + \eta_1\varepsilon\gamma(\varepsilon) \le \ldots \le j\eta_1\varepsilon\gamma(\varepsilon) \le L\eta_1. \qquad (18)$$

Поскольку при $t \in (t_j, t_{j+1}]$

$$h(X^1(t), X^1(t_j)) \le M(1 + d)\varepsilon\gamma(\varepsilon) = M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon),$$

то, учитывая неравенство (9), имеем

$$\begin{aligned} &h(X^1(t), Y^1(t)) \le L\eta_1 + 2M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon), \\ &h(X^1(t), Y^1(t_j)) \le L\eta_1 + M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon). \end{aligned} \qquad (19)$$

Покажем, что существует решение

$$X(t) = X(t_j) + \varepsilon\int\limits_{t_j}^{t} U(\tau)\,d\tau + \varepsilon\sum_{t_j \le \tau_i < t} Q_i, \quad X(0) = X_0, \quad t \in (t_j, t_{j+1}],$$

включения (2), которое является достаточно близким к $X^1(t)$.

Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_p$ — моменты импульсов τ_i, попадающие в полуинтервал $(t_j, t_{j+1}]$. Для удобства обозначим $\theta_0 = t_j,\ \theta_{p+1} = t_{j+1}$. Пусть $\mu_k^+ = h(X^1(\theta_k + 0), X(\theta_k + 0))$, $\mu_k^- = h(X^1(\theta_k), X(\theta_k))$, $k = \overline{0, p+1}$.

Учитывая условие Липшица, получаем

$$\operatorname{dist}\left(D_h X^1(t), \varepsilon F(t, X^1(t))\right) \le \chi\left(\varepsilon F(t, Y^1(t_j)), \varepsilon F(t, X^1(t))\right) \le$$

$$\le \varepsilon\lambda h(X^1(t), Y^1(t_j)) \le \varepsilon\lambda(M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon) + L\eta_1) = \eta^*,$$

$$\operatorname{dist}\left(\Delta X^1|_{t=\theta_k}, \varepsilon I_i(X^1(\theta_k))\right) \le \chi\left(\varepsilon I_i(Y^1(t_j)), \varepsilon I_i(X^1(\theta_k))\right) \le$$

$$\le \varepsilon\lambda h(Y^1(t_j), X^1(\theta_k)) \le \varepsilon\lambda(M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon) + L\eta_1) = \eta^*.$$

Согласно теореме 2 между точками импульсов существует решение $X(t)$ включения (2) такое, что при $t \in (\theta_k, \theta_{k+1}]$ справедлива оценка

$$h(X(t), X^1(t)) \le \mu_k^+ e^{\varepsilon\lambda(t-\theta_k)} + \varepsilon \int\limits_{\theta_k}^{t} e^{\varepsilon\lambda(t-s)}\eta^* ds.$$

Обозначим $\gamma_k = \theta_{k+1} - \theta_k \le \gamma(\varepsilon),\ \gamma_0 + ... + \gamma_p = \gamma(\varepsilon)$. Тогда

$$\mu_{k+1}^- \le \mu_k^+ e^{\varepsilon\lambda\gamma_k} + \frac{\eta^*}{\lambda}\left(e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)} - 1\right). \tag{20}$$

При переходе через точку импульса получим

$$\mu_{k+1}^+ \le \mu_{k+1}^- + \varepsilon\chi\left(I_i(Y^1(t_j)), I_i(X(\theta_{k+1}))\right) \le$$

$$\le \mu_{k+1}^- + \varepsilon\chi\left(I_i(X^1(\theta_{k+1})), I_i(X(\theta_{k+1}))\right) + \varepsilon\chi\left(I_i(Y^1(t_j)), I_i(X^1(\theta_{k+1}))\right) \le$$

$$\le \mu_{k+1}^- + \varepsilon\lambda\mu_{k+1}^- + \varepsilon\chi\left(I_i(Y^1(t_j)), I_i(X^1(\theta_{k+1}))\right) \le$$

$$\le (1+\varepsilon\lambda)\mu_{k+1}^- + \eta^*. \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует, что

$$\mu_{k+1}^+ \le (1+\varepsilon\lambda)e^{\varepsilon\lambda\gamma_k}\mu_k^+ + \beta, \quad \beta = \frac{\eta^*}{\lambda}(1+\varepsilon\lambda)\left(e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)} - 1\right) + \eta^*.$$

Следовательно,

$$\mu_1^+ \le (1+\varepsilon\lambda)e^{\lambda\varepsilon\gamma_0}\mu_0^+ + \beta \le (1+\varepsilon\lambda)e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}\mu_0^+ + \beta,$$

$$\mu_2^+ \le (1+\varepsilon\lambda)e^{\varepsilon\lambda\gamma_1}\mu_1^+ + \beta \le (1+\varepsilon\lambda)^2 e^{\varepsilon\lambda(\gamma_0+\gamma_1)}\mu_0^+ +$$

$$+\beta(1+\varepsilon\lambda)e^{\varepsilon\lambda\gamma_1} + \beta \le (1+\varepsilon\lambda)^2 e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}\mu_0^+ + \beta\left((1+\varepsilon\lambda)e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}+1\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mu_{k+1}^+ \le (1+\varepsilon\lambda)^{k+1}e^{\varepsilon\lambda\gamma(\varepsilon)}\mu_0^+ + \beta\left(e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}((1+\varepsilon\lambda)^k + \ldots + (1+\varepsilon\lambda)) + 1\right) =$$

$$= (1+\varepsilon\lambda)^{k+1}e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}\mu_0^+ + \beta\left(e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}\frac{(1+\varepsilon\lambda)^k-1}{\varepsilon\lambda}(1+\varepsilon\lambda)+1\right) \le$$

$$\le e^{\lambda(1+d)\varepsilon\gamma(\varepsilon)}\mu_0^+ + \eta^*\left(\frac{1+\varepsilon\lambda}{\lambda}(e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1)+1\right)\left(e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}\frac{e^{\lambda d\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1}{\varepsilon\lambda}(1+\varepsilon\lambda)+1\right) =$$

$$= \alpha\mu_0^+ + \beta_1,$$

где

$$\alpha = e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)(1+d)},$$

$$\beta_1 = (M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon) + L\eta_1)\left(\frac{1+\varepsilon\lambda}{\lambda}(e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1)+1\right)\left(e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}\left(e^{\lambda d\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1\right)(1+\varepsilon\lambda)+\varepsilon\lambda\right).$$

Таким образом,

$$\delta_{j+1}^+ = h(X(t_{j+1}), \qquad X^1(t_{j+1})) \le \alpha\delta_j^+ + \beta_1.$$

Получаем цепочку неравенств

$$\delta_0^+ = 0, \quad \delta_1^+ \le \beta_1, \quad \delta_2^+ \le \alpha\beta_1 + \beta_1 = (\alpha+1)\beta_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\delta_{j+1}^+ \le (\alpha^j + \ldots + 1)\beta_1 = \frac{\alpha^{j+1}-1}{\alpha-1}\beta_1 \le$$

$$\le \frac{e^{\lambda L(1+d)}-1}{e^{\lambda(1+d)\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1}(M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)+L\eta_1)\left(\frac{1+\varepsilon\lambda}{\lambda}(e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1)+1\right)\times$$

$$\times\left(e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}\left(e^{\lambda d\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1\right)(1+\varepsilon\lambda)+\varepsilon\lambda\right).$$

Поскольку

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\frac{1+\varepsilon\lambda}{\lambda}(e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1)+1\right) = 1$$

и

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}\left(e^{\lambda d\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1\right)(1+\varepsilon\lambda)+\varepsilon\lambda}{e^{\lambda(1+d)\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}\frac{e^{\lambda d\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1}{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}+\frac{1}{\gamma(\varepsilon)}}{\frac{e^{\lambda(1+d)\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1}{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}}=\frac{d}{1+d},$$

то

$$\delta_{j+1}^{+}\le C(M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)+L\eta_1)$$

при $\varepsilon\le\varepsilon_2$.

Следовательно, при $t\in(t_j,t_{j+1}]$ имеет место неравенство

$$h(X(t),X^1(t))\le h(X(t),X(t_j))+h(X(t_j),X^1(t_j)))+h(X^1(t),X^1(t_j))\le$$

$$\le M(1+d)\varepsilon\gamma(\varepsilon)+M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)+C(M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)+L\eta_1)=M_1(2+C)\varepsilon\gamma(\varepsilon)+CL\eta_1. \tag{22}$$

В силу неравенств (14), (26) и (22) получаем, что $h(X(t),Y(t))$ может быть сделано меньше любого наперед заданного η за счет выбора $\varepsilon\le\varepsilon_0$ и η_1.

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично.

Если многозначные отображения $F(t,X)$ и $I_i(X)$ являются периодичными по t, то можно получить более точную оценку.

Теорема 4. *Пусть в области $Q\{t\ge 0,\ X\in D\subset \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)\}$ выполнены следующие условия:*

1) многозначные отображения $F: Q\to \operatorname{cocc}(\mathbb{R}^n)$, $I_i: D\to \operatorname{cocc}(\mathbb{R}^n)$ непрерывны, равномерно ограничены постоянной M и удовлетворяют условию Липшица по X с постоянной λ;

2) многозначное отображение $F(t,X)$ 2π-периодично по t и существует $p\in\mathbb{N}$ такое, что для всех $i\in\mathbb{N}$ справедливы равенства $\tau_{i+p}=\tau_i+2\pi,\ I_{i+p}(X)\equiv I_i(X)$;

3) решения включения (4) для всех $X_0\in D'\subset D$ при $t\in[0,L\varepsilon^{-1}]$ вместе с некоторой ρ-окрестностью принадлежат области D.

Тогда для любого $L>0$ существуют такие $\varepsilon_0(L)>0$ и $C(L)>0$, что при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ и $t\in[0,L\varepsilon^{-1}]$ справедливы следующие утверждения:

1) для любого решения $Y(t)$ включения (4) существует решение $X(t)$ включения (2) такое, что выполняется неравенство

$$h(X(t),Y(t))\le C\varepsilon; \tag{23}$$

2) для любого решения $X(t)$ включения (2) существует решение $Y(t)$ включения (4) такое, что имеет место неравенство (23).

Таким образом, справедлива оценка

$$\chi(R(t),R_0(t))<C\varepsilon,$$

где $R(t)$ — сечение семейства решений исходного включения, $R_0(t)$ — сечение семейства решений усредненного включения.

Доказательство. В силу условия 2 теоремы формула усреднения (3) принимает вид

$$F_0(X) \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(s,X)ds + \frac{1}{2\pi}\sum_{0\le\tau_i<2\pi} I_i(X). \tag{24}$$

В силу условия 1 теоремы и формулы (24) многозначное отображение $F_0 : D \to \mathrm{cocc}\,(\mathbb{R}^n)$ ограничено постоянной $M_1 = M(1+d)$ и удовлетворяет условию Липшица с постоянной $\lambda_1 = \lambda(1+d)$.

Действительно,

$$|F_0(X)| = \chi(F_0(X),\{0\}) = \chi\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(t,X)dt + \frac{1}{2\pi}\sum_{0\le\tau_i<2\pi} I_i(X),\{0\}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |F(s,X)|ds + \frac{1}{2\pi}\sum_{t\le\tau_i<t+T} |I_i(X)| \le M + dM = M(1+d),$$

$$\chi(F_0(X_1),F_0(X_2)) = \chi\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(t,X_1)dt + \frac{1}{2\pi}\sum_{0\le\tau_i<2\pi} I_i(X_1),\right.$$

$$\left.\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(t,X_2)dt + \frac{1}{2\pi}\sum_{0\le\tau_i<2\pi} I_i(X_2)\right) \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \chi(F(s,X_1),F(s,X_2))ds +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{0\le\tau_i<2\pi} \chi(I_i(X_1),I_i(X_2)) \le \lambda h(X_1,X_2) + \lambda d h(X_1,X_2) =$$

$$= \lambda(1+d)h(X_1,X_2).$$

Пусть $Y(t)$ — некоторое решение включения (4). Разобьем отрезок $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на частичные с шагом 2π точками $t_j = 2\pi j,\ j = \overline{0,m}$, где m таково, что $t_m \le L\varepsilon^{-1} < t_{m+1}$. Тогда существует измеримая ветвь $V(t)$ отображения $F_0(Y(t))$ такая, что

$$Y(t) = Y(t_j) + \varepsilon\int\limits_{t_j}^{t} V(s)ds,\ Y(0) = X_0, \quad t \in [t_j, t_{j+1}]. \tag{25}$$

Рассмотрим функцию

$$Y^1(t) = Y^1(t_j) + \varepsilon V_j(t - t_j), \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \qquad Y^1(0) = X_0, \tag{26}$$

где множества $V_j \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ таковы, что

$$h\left(2\pi V_j, \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} V(s)ds\right) = \min_{V \in F_0(Y^1(t_j))} h\left(2\pi V, \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} V(s)ds\right). \tag{27}$$

Множество V_j существует в силу компактности множества $F_0(Y^1(t_j))$ и непрерывности минимизируемой функции.

Обозначим $\delta_j = h(Y(t_j), Y^1(t_j))$. При $t \in [t_j, t_{j+1}]$ в силу (25) и (26)

$$h(Y(t), Y(t_j)) \le 2\pi M_1 \varepsilon, \quad h(Y^1(t), Y^1(t_j)) \le 2\pi M_1 \varepsilon. \tag{28}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} h(Y(t), Y^1(t_j)) \le h(Y(t_j), Y^1(t_j)) + h(Y(t), Y(t_j)) \le \delta_j + \varepsilon M_1 (t - t_j), \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \\ \chi(F_0(Y(t)), F_0(Y^1(t_j)) \le \lambda_1 h(Y(t), Y^1(t_j)) \le \lambda_1(\delta_j + \varepsilon M_1(t - t_j)). \end{gathered} \tag{29}$$

Из (27) и (29) следует, что

$$h\left(\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} V(s)ds, 2\pi V_j\right) \le \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \chi(F_0(Y(s)), F_0(Y^1(t_j)))ds \le \lambda_1\left(2\pi\delta_j + 2\pi^2 M_1 \varepsilon\right). \tag{30}$$

Учитывая (25) и (26), получаем

$$\delta_{j+1} \le \delta_j + \varepsilon\lambda_1\left(2\pi\delta_j + 2\pi^2 M_1\varepsilon\right) = (1 + 2\pi\lambda_1\varepsilon)\delta_j + 2\pi^2\lambda_1 M_1 \varepsilon^2. \tag{31}$$

Из неравенства (31) с учетом того, что $\delta_0 = 0$, имеем

$$\begin{aligned} &\delta_1 \le 2\pi^2\lambda_1 M_1 \varepsilon^2, \\ &\delta_2 \le (1 + 2\pi\lambda_1\varepsilon)\delta_1 + 2\pi^2\lambda_1 M_1\varepsilon^2 \le 2\pi^2\lambda_1 M_1 \varepsilon^2((1 + 2\pi\lambda_1\varepsilon) + 1), \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\delta_{j+1} \le 2\pi^2\lambda_1 M_1\varepsilon^2((1 + 2\pi\lambda_1\varepsilon)^i + (1 + 2\pi\lambda_1\varepsilon)^{i-1} + \ldots + 1) = \\ &\quad = \pi M_1 \varepsilon\left((1 + 2\pi\lambda_1\varepsilon)^{i+1} - 1\right) \le \pi M_1\varepsilon\left((1 + 2\pi\lambda_1\varepsilon)^{\frac{L}{2\pi\varepsilon}} - 1\right) \le \pi M_1 \varepsilon(e^{\lambda_1 L} - 1). \end{aligned} \tag{32}$$

Таким образом, в силу неравенств (9) справедлива оценка

$$\begin{gathered} h(Y(t), Y^1(t)) \le h(Y(t), Y(t_j)) + h(Y(t_j), Y^1(t_j)) + h(Y^1(t_j), Y^1(t)) \le \\ \le 4\pi M_1\varepsilon + \pi M_1\varepsilon(e^{\lambda_1 L} - 1) \le \pi M_1 \varepsilon(e^{\lambda_1 L} + 3). \end{gathered} \tag{33}$$

Из условия 2 теоремы следует

$$F_0(Y^1(t_j)) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} F(s, Y^1(t_j))ds + \frac{1}{2\pi}\sum_{t_j \le \tau_i < t_{j+1}} I_i(Y^1(t_j)). \tag{34}$$

Следовательно, существуют множества $U_j(t) \in F(t, Y^1(t_j)),\ P_{ij} \in I_i(Y^1(t_j))$ такие, что

$$V_j = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} U_j(s)ds + \sum_{t_j \le \tau_i < t_{j+1}} P_{ij}\right). \tag{35}$$

Рассмотрим семейство функций

$$X^1(t) = X^1(t_j) + \varepsilon\int\limits_{t_j}^{t} U_j(s)ds + \varepsilon\sum_{t_j \le \tau_i < t} P_{ij},\ t \in (t_j, t_{j+1}]. \tag{36}$$

Из (26), (36) и (35) с учетом того, что $X^1(0) = Y^1(0)$, следует, что при $j = \overline{1,m}$

$$X^1(t_j) = Y^1(t_j)), \quad h(X^1(t), X^1(t_j)) \le 2\pi M_1\varepsilon, \quad h(X^1(t), Y^1(t)) \le 4\pi M_1\varepsilon. \tag{37}$$

Покажем, что существует решение

$$X(t) = X(t_j) + \varepsilon\int\limits_{t_j}^{t} U(\tau)\,d\tau + \varepsilon\sum_{t_j \le \tau_i < t} Q_i, \quad X(0) = X_0, \quad t \in (t_j, t_{j+1}],$$

включения (2), которое является достаточно близким к $X^1(t)$.

Пусть $\theta_1, ..., \theta_p-$ моменты импульсов τ_i, попадающие в полуинтервал $(t_j, t_{j+1}]$. Для удобства обозначим $\theta_0 = t_j,\ \theta_{p+1} = t_{j+1}$. Пусть

$$\mu_k^+ = h(X^1(\theta_k + 0), X(\theta_k + 0)), \quad \mu_k^- = h(X^1(\theta_k), X(\theta_k)), \quad k = \overline{0, p+1}.$$

Учитывая условие Липшица, получаем

$$\operatorname{dist}\left(D_h X^1(t), \varepsilon F(t, X^1(t))\right) \le \chi\left(\varepsilon F(t, Y^1(t_j)), \varepsilon F(t, X^1(t))\right) \le$$

$$\le \varepsilon\lambda h(X^1(t), X^1(t_j)) \le 2\pi\lambda M_1\varepsilon^2 = \eta^*,$$

$$\operatorname{dist}\left(\Delta X^1|_{t=\theta_k}, \varepsilon I_i(X^1(\theta_k))\right) \le \chi\left(\varepsilon I_i(Y^1(t_j)), \varepsilon I_i(X^1(\theta_k))\right) \le$$

$$\le \varepsilon\lambda h(X^1(t_j), X^1(\theta_k)) \le 2\pi\lambda M_1\varepsilon^2 = \eta^*.$$

Согласно теореме 2 между точками импульсов существует решение $X(t)$ включения (2) такое, что при $t \in (\theta_k, \theta_{k+1}]$ справедлива оценка

$$h(X(t), X^1(t)) \leq \mu_k^+ e^{\varepsilon\lambda(t-\theta_k)} + \varepsilon \int\limits_{\theta_k}^{t} e^{\varepsilon\lambda(t-s)} \eta^* ds.$$

Обозначим $\gamma_k = \theta_{k+1} - \theta_k \leq 2\pi,\ \gamma_0 + ... + \gamma_p = 2\pi$. Тогда

$$\mu_{k+1}^- \leq \mu_k^+ e^{\varepsilon\lambda\gamma_k} + \frac{\eta^*}{\lambda}\left(e^{2\pi\lambda\varepsilon} - 1\right). \tag{38}$$

При переходе через точку импульса имеем

$$\mu_{k+1}^+ \leq \mu_{k+1}^- + \varepsilon\chi\left(I_i(Y^1(t_j)), I_i(X(\theta_{k+1}))\right) \leq$$

$$\leq \mu_{k+1}^- + \varepsilon\chi\left(I_i(X^1(\theta_{k+1})), I_i(X(\theta_{k+1}))\right) +$$

$$+ \varepsilon\chi\left(I_i(X^1(t_j)), I_i(X^1(\theta_{k+1}))\right) \leq$$

$$\leq \mu_{k+1}^- + \varepsilon\lambda\mu_{k+1}^- + \varepsilon\chi\left(I_i(X^1(t_j)), I_i(X^1(\theta_{k+1}))\right) \leq$$

$$\leq (1+\varepsilon\lambda)\mu_{k+1}^- + \eta^*. \tag{39}$$

Из (20) и (21) следует, что

$$\mu_{k+1}^+ \leq (1+\varepsilon\lambda)e^{\varepsilon\lambda\gamma_k}\mu_k^+ + \beta,$$

$$\beta = \frac{\eta^*}{\lambda}(1+\varepsilon\lambda)\left(e^{2\pi\lambda\varepsilon} - 1\right) + \eta^*.$$

Следовательно,

$$\mu_1^+ \leq (1+\varepsilon\lambda)e^{\lambda\varepsilon\gamma_0}\mu_0^+ + \beta \leq (1+\varepsilon\lambda)e^{2\pi\lambda\varepsilon}\mu_0^+ + \beta,$$

$$\mu_2^+ \leq (1+\varepsilon\lambda)e^{\varepsilon\lambda\gamma_1}\mu_1^+ + \beta \leq (1+\varepsilon\lambda)^2 e^{\varepsilon\lambda(\gamma_0+\gamma_1)}\mu_0^+ +$$

$$+ \beta(1+\varepsilon\lambda)e^{\varepsilon\lambda\gamma_1} + \beta \leq (1+\varepsilon\lambda)^2 e^{2\pi\lambda\varepsilon}\mu_0^+ +$$

$$+ \beta\left((1+\varepsilon\lambda)e^{2\pi\lambda\varepsilon} + 1\right),$$

. . . .

$$\mu_{k+1}^{+} \leq (1+\varepsilon\lambda)^{k+1}e^{2\pi\lambda\varepsilon}\mu_0^{+} + \beta\left(e^{2\pi\lambda\varepsilon}((1+\varepsilon\lambda)^k + ... + (1+\varepsilon\lambda)) + 1\right) =$$

$$= (1+\varepsilon\lambda)^{k+1}e^{2\pi\lambda\varepsilon}\mu_0^{+} + \beta\left(e^{2\pi\lambda\varepsilon}\frac{(1+\varepsilon\lambda)^k - 1}{\varepsilon\lambda}(1+\varepsilon\lambda) + 1\right) \leq$$

$$\leq e^{2\pi\lambda(1+d)\varepsilon}\mu_0^{+} + \eta^*\left(\frac{1+\varepsilon\lambda}{\lambda}(e^{2\pi\lambda\varepsilon} - 1) + 1\right) \times$$

$$\times\left(e^{2\pi\lambda\varepsilon}\frac{e^{\lambda d\varepsilon 2\pi} - 1}{\varepsilon\lambda}(1+\varepsilon\lambda) + 1\right) =$$

$$= \alpha\mu_0^{+} + \beta_1,$$

где

$$\alpha = e^{2\pi\lambda(1+d)\varepsilon},$$

$$\beta_1 = 2\pi M_1\varepsilon 2\pi\left(\frac{1+\varepsilon\lambda}{\lambda}(e^{2\pi\lambda\varepsilon} - 1) + 1\right)\left(e^{2\pi\lambda\varepsilon}\left(e^{2\pi\lambda d\varepsilon} - 1\right)(1+\varepsilon\lambda) + \varepsilon\lambda\right).$$

Таким образом,

$$\delta_{j+1}^{+} = h(X(t_{j+1}), X^1(t_{j+1})) \leq \alpha\delta_j^{+} + \beta_1.$$

Получаем цепочку неравенств

$$\delta_0^{+} = 0,$$

$$\delta_1^{+} \leq \beta_1,$$

$$\delta_2^{+} \leq \alpha\beta_1 + \beta_1 = (\alpha+1)\beta_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\delta_{j+1}^{+} \leq (\alpha^j + ... + 1)\beta_1 = \frac{\alpha^{j+1} - 1}{\alpha - 1}\beta_1 \leq$$

$$\leq \frac{e^{\lambda L(1+d)} - 1}{e^{2\pi\lambda(1+d)\varepsilon} - 1}(M_1\varepsilon 2\pi + L\eta_1)\left(\frac{1+\varepsilon\lambda}{\lambda}(e^{2\pi\lambda\varepsilon} - 1) + 1\right) \times$$

$$\times\left(e^{2\pi\lambda\varepsilon}\left(e^{2\pi\lambda d\varepsilon} - 1\right)(1+\varepsilon\lambda) + \varepsilon\lambda\right).$$

Поскольку

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1+\varepsilon\lambda}{\lambda}(e^{2\pi\lambda\varepsilon} - 1) + 1\right) = 1$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{2\pi\lambda\varepsilon}\left(e^{2\pi\lambda d\varepsilon}-1\right)(1+\varepsilon\lambda)+\varepsilon\lambda}{e^{2\pi\lambda(1+d)\varepsilon}-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{2\pi\lambda\varepsilon}\frac{e^{2\pi\lambda d\varepsilon}-1}{\lambda\varepsilon}+1}{\frac{e^{2\pi\lambda(1+d)\varepsilon}-1}{\lambda\varepsilon}}=\frac{2d\pi+1}{2(1+d)\pi},$$

то

$$\delta_{j+1}^{+}\leq C_0\varepsilon$$

при $\varepsilon\leq\varepsilon_2$.

Следовательно, при $t\in(t_j,t_{j+1}]$ имеет место неравенство

$$h(X(t),X^1(t))\leq h(X(t),X(t_j))+h(X(t_j),X^1(t_j)))+h(X^1(t),X^1(t_j))\leq$$

$$\leq 2\pi M(1+d)\varepsilon+2\pi M_1\varepsilon+C_0\varepsilon=2\pi M_1(2+C_0)\varepsilon. \tag{40}$$

В силу неравенств (33), (37) и (40) получаем

$$h(X(t),Y(t))\leq C_1\varepsilon, \tag{41}$$

где $C_1=\pi M_1(e^{\lambda_1 L}+3)+4\pi M_1+C_0$.

Взяв произвольное решение $X(t)$ включения (2) и выполнив выкладки, аналогичные предыдущим, можем построить решение $Y(t)$ включения (4) такое, что выполняется неравенство вида (41) с некоторой константой C_2. Выбирая $C=\max\{C_1,C_2\}$ и ε_0 таким образом, чтобы решения $Y(t)$ не выходили за ρ-окрестность решений $X(t)$, получаем справедливость всех утверждений теоремы.

Для дифференциальных включений с производной Хукухары можно проводить частичное усреднение, т. е. усреднять только некоторые слагаемые или сомножители.

Приведем результат по обоснованию схемы частичного усреднения.

Теорема 5. *Пусть в области Q определены дифференциальные включения*

$$D_hX\in\varepsilon F(t,X),\quad t\neq\tau_i,\ \ X(0)=X_0, \tag{42}$$

$$\Delta X|_{t=\tau_i}\in I_i(x),$$

$$D_hY\in\varepsilon\overline{F}(t,Y),\quad t\neq\nu_j,\ \ Y(0)=X_0, \tag{43}$$

$$\Delta Y|_{t=\nu_j}\in\overline{I}_j(x),$$

и пусть в этой области:

1) многозначные отображения $F,\overline{F}:Q\to\operatorname{cc}(\mathbb{R}^n)$, $I_i,\overline{I}_j:D\to\operatorname{cc}(\mathbb{R}^n)$ непрерывны, равномерно ограничены постоянной M и удовлетворяют условию Липшица по X с постоянной λ;

2) равномерно относительно $t\geq 0$ и $X\in D$ существует предел

$$\lim_{T\to\infty}\chi\left(\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T}F(t,X)dt+\frac{1}{T}\sum_{t\leq\tau_i<t+T}I_i(X),\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T}\overline{F}(t,X)dt+\frac{1}{T}\sum_{t\leq\nu_j<t+T}\overline{I}_j(X)\right)=0 \tag{44}$$

и

$$\frac{1}{T}\, i(t,t+T) \le d < \infty, \qquad \frac{1}{T}\, j(t,t+T) \le d < \infty,$$

где $i(t,t+T), j(t,t+T)$ *— количество точек последовательностей* τ_i, ν_j *на промежутке* $(t,t+T]$;

3) решения включения (43) для всех $X_0 \in D' \subset D$ *при* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *принадлежат вместе с некоторой* ρ*-окрестностью области* D.

Тогда для любого $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *существует такое* $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0,\sigma]$, *что при* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ *и* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *справедливы следующие утверждения:*

1) для любого решения $Y(t)$ *включения (43) существует решение* $X(t)$ *включения (42) такое, что выполняется неравенство*

$$h(X(t), Y(t)) < \eta; \tag{45}$$

2) для любого решения $X(t)$ *включения (42) существует решение* $Y(t)$ *включения (43) такое, что имеет место неравенство (45).*

Таким образом, справедлива оценка

$$\chi(R(t), \overline{R}(t)) < \eta,$$

где $R(t), \overline{R}(t)$ *— замыкания сечения семейств решений включений (42) и (43).*

Замечания. 1. Если многозначные отображения $F(t,X), \overline{F}(t,X), I_i(X)$ и $\overline{I}_i(X)$ являются периодичными по t, то можно получить оценку, аналогичную полученной в теореме 4.

2. В случае, когда $F,\ \overline{F} : \mathbb{R}\times \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n) \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n),\ I_j,\ \overline{I}_j : \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n) \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$, отсюда следуют результаты, полученные в работах В. А. Плотникова и П. М. Китанова.

3. В случае, когда $F,\ \overline{F} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n),\ I_j,\ \overline{I}_j : \mathbb{R}^n \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$, отсюда следуют результаты, полученные в работе В. А. Плотникова [11].

4. В случае, когда $F,\ \overline{F} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ I_j,\ \overline{I}_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, отсюда следуют результаты, полученные в работе В. А. Плотникова [12].

1. *Hukuhara M.* Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Funkc. ekvacioj. — 1967. — № 10. — P. 205–223.
2. *De Blasi F. S., Iervolino F.* Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso // Boll. Unione mat. ital. — 1969. — **2**, № 4-5. — P. 491–501.
3. *Brandao Lopes Pinto A. J., De Blasi F. S., Iervolino F.* Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions // Ibid. — 1970. — **4**. — P. 534–538.
4. *Kisielewicz M.* Description of a class of differential equations with set-valued solutions // Lincei-Rend. sci. fis. e mat. e nat. — 1975. — **58**. — P. 158–162.
5. *Kisielewicz M.* Method of averaging for differential equations with compact convex valued solutions // Rend. mat. — 1976. — **9**, № 3. — P. 397–408.
6. *Плотников А.В.* Исследование некоторых дифференциальных уравнений с многозначной правой частью: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Одесса, 1994.
7. *Плотников А. В.* Дифференциальные включения с производной Хукухары и некоторые задачи управления. — Одесса, 1982. — 35 с. — Деп. в УкрНИИНТИ, № 2036-82.

8. *Плотников А. В.* Дифференциальные включения с производной Хукухары. — Одесса, 1987. — 43 с. — Деп. в УкрНИИНТИ, № 989-Ук87.

9. *Плотников А. В.* Усреднение дифференциальных включений с производной Хукухары // Укр. мат. журн. — 1989. — **42**, № 1. — С. 121 – 125.

10. *Dabrowska R., Janiak T.* Stability of functional-differential equations with compact convex valued solutions // Discuss. Math. — 1993. — № 13. — P. 87 – 92.

11. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. — Одесса: Астропринт, 1999. — 356 с.

12. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. — Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. — 188 с.

Получено 27.11.2006