УДК 517.9

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЩО НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ, У ПРОСТОРІ ОБМЕЖЕНИХ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

А. М. Самойленко

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3

Ю. В. Теплінський, В. А. Недокіс

Кам'янець-Поділ. ун-т
Україна, 32300, Кам'янець-Подільський Хмельницької обл., вул. Огієнка, 61

We study a nonlinear countable-point boundary-value problem for a differential equation that is not solved with respect to the derivative. Both the equation and the nonlinear boundary condition are defined in the Banach space of bounded number sequences. We also consider a possibility of reducing the posed problem to a multiple-point boundary-value problem in a finite-dimensional space.

Исследуется нелинейная счетноточечная краевая задача для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, которое вместе с нелинейным краевым условием определено в банаховом пространстве ограниченных числовых последовательностей. Рассмотрена возможность редукции поставленной задачи к многоточечной краевой задаче в конечномерном пространстве.

Зрозуміло, що можливості конструктивного дослідження різноманітних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь суттєво залежать від розмірності простору, в якому розглядається конкретна крайова задача. На даний час найбільш повно вивчено крайові задачі різних типів у скінченновимірних просторах. Результатам досліджень таких задач в абстрактних банахових просторах присвячено порівняно невелику кількість публікацій, що стосуються переважно періодичних крайових задач. Початок вивченню крайових задач у банаховому просторі $\mathfrak{M}$ обмежених числових послідовностей $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ дійсних чисел з нормою $||x|| = \sup_i\{|x_i|, i = 1, 2, 3, \dots\}$ було покладено в роботах [1 – 4], де досліджувались періодична крайова задача для рівнянь першого і другого порядків та двоточкова крайова задача для нелінійного рівняння першого порядку з лінійною крайовою умовою. У роботах [5, 6] авторами цієї статті вивчалися зліченноточкові крайові задачі для звичайних нелінійних диференціальних рівнянь нормального виду, що визначені у просторі $\mathfrak{M}$.

Ця робота є логічним продовженням статей [5, 6]. Тут ми розглядаємо крайову задачу з нелінійною крайовою умовою, що містить необмежену зліченну множину крайових моментів на додатній півосі у випадку, коли саме рівняння і крайову умову задачі визначено у просторі $\mathfrak{M}$, причому це рівняння не розв'язане відносно похідної. У випадку, коли множина крайових моментів належить скінченному відрізку $[0, T]$, початкову крайову задачу редуковано до аналогічної багатоточкової крайової задачі у скінченновимірному просторі. Зауважимо, що триточкова крайова задача з лінійною крайовою умовою для рівняння у скінченновимірному просторі, що не розв'язане відносно похідної, розглядалася в [7].

1. Крайова задача на півосі. Розглянемо рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{1}$$

праву частину якого $f(t, x, x_1)$ визначено на множині

$$(t, x, x_1) \in \overline{D}_1 = [0, +\infty) \times D \times D_1,$$

де

$$D = \{x|\ x \in \mathfrak{M},\ \|x\| \le M_0 = \text{const} > 0\},$$

$$D_1 = \{x_1\,|\,x_1 \in \mathfrak{M},\ \|x_1\| \le M_1 = \text{const} > 0\},$$

$f = \{f_1, f_2, f_3, \ldots\} : \overline{D}_1 \to \mathfrak{M}$, а під похідною $\dfrac{dx(t)}{dt}$ розуміють вектор

$$\left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \frac{dx_3(t)}{dt}, \ldots\right).$$

Задача полягає у відшуканні розв'язку рівняння (1), який задовольняє умову

$$A_0 x(0) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i x(t_i) = \varphi(x(0); x(t_1), x(t_2), \ldots), \tag{2}$$

де

$$0 < \ t_1 < t_2 < t_3 < \ldots,\ \sup_i \{t_i\} = +\infty; \quad x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in D;$$

$A_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots,$ — нескінченні матриці, такі, що $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|A_i\| < \infty$; норму матриці $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$, узгоджену з нормою вектора $x \in \mathfrak{M}$, визначено рівністю $\|A\| = \sup\limits_i \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$; $\varphi(\psi_1, \psi_2, \ldots) = \{\varphi_1(\psi_1, \psi_2, \ldots), \varphi_2(\psi_1, \psi_2, \ldots), \ldots\} : D^{\infty} \to \mathfrak{M}$, $D^{\infty} = \{\psi \in \mathfrak{M}^{\infty} \mid \|\psi\| \le M_0\}$; $\mathfrak{M}^{\infty}$ — простір послідовностей $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots)$, $\psi_i \in \mathfrak{M}\ \forall i \in Z^+$, обмежених за нормою $\|\psi\| = \sup\limits_{i \in Z^+} \{\|\psi_i\|\}$, де $\|\psi_i\|$ — норма у просторі $\mathfrak{M}$, Z^+ — множина додатних цілих чисел.

Через $h(t)$ позначимо функцію $h : [0, +\infty) \to [0, T)$, $T = \text{const} > 0$, що має властивості:

1*) $h(0) = 0,\ h(+\infty) = \lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = T$;

2*) на півосі $[0, +\infty)$ існує неперервна невід'ємна похідна $h'(t)$, обмежена сталою $\overline{h'} = \sup\limits_{t \ge 0} h'(t)$.

Наступні умови назвемо умовами (A_1):

1) для будь-яких $\{\psi, \psi_*\} \subset D^{\infty}$ справджуються нерівності

$$\|\varphi(\psi)\| \le M_{\varphi},\ \|\varphi(\psi) - \varphi(\psi_*)\| \le K_{\varphi}\, \|\psi - \psi_*\|, \tag{3}$$

де M_{φ} та K_{φ} — додатні сталі;

2) функція $f(t,x,x_1)$ є неперервною на $\overline{D}_1$ відносно (t,x,x_1) та існує така функція $h(t)$ з властивостями 1^*, 2^*, що для всіх $\{x,x'\}\subset D$, $\{x_1,x_1'\}\subset D_1$ виконуються нерівності

$$\begin{gathered}\|f(t,x,x_1)\| \le M_h h'(t),\\ \left\|f(t,x,x_1)-f(t,x',x_1')\right\| \le \left[K_h\left\|x-x'\right\|+K_{1h}\left\|x_1-x_1'\right\|\right]h'(t),\end{gathered} \tag{4}$$

де M_h, K_h, K_{1h} — додатні сталі, що не залежать від вибору точок (t,x,x_1), (t,x',x_1') з множини $\overline{D}_1$;

3) матриця $\sum\limits_{i=1}^{\infty} h(t_i)A_i$ є оборотною, а обернена до неї матриця $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} h(t_i)A_i\right)^{-1}$ — обмеженою за нормою.

Зауважимо, що питання існування функції $h(t)$ докладно вивчалося в [5].

Легко помітити, що при виконанні третьої з умов (A_1) оборотною є матриця $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{h(t_i)}{T}A_i$ й обернена до неї матриця $H_h = T\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} h(t_i)A_i\right)^{-1}$ теж обмежена за нормою.

Через $D_{\beta\varphi h}$ (в [5] цю множину позначено через D_β) позначимо підмножину з D, кожна точка x_0 якої міститься у множині D разом зі своїм $\beta_{\varphi h}$-околом, де

$$\beta_{\varphi h}(x_0) = \frac{T}{2}M_h + \beta_{1\varphi h}(x_0),$$

$$\beta_{1\varphi h}(x_0) = \|H_h\|\left\|d-\sum_{i=0}^{\infty}A_i x_0\right\| + \sum_{i=1}^{\infty}\|H_h A_i\|\,\alpha_{1h}(t_i)M_h,$$

$$\alpha_{1h}(t) = 2h(t)\left(1-\frac{h(t)}{T}\right),$$

а вектор $d=(d_1,d_2,\ldots)$ визначено так, що $|d_i| = M_\varphi$, $\operatorname{sign}\, d_i = -\operatorname{sign}\, d_i^0$, причому $d^0 = \operatorname{colon}\left(d_1^0, d_2^0,\ldots\right) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} A_j x_0,\ i\in Z^+$.

Через $\gamma_{\varphi h}(x_0)$ позначимо вираз $2M_h\overline{h'} + \dfrac{\overline{h'}}{T}\beta_{1\varphi h}(x_0)$, а через $D_{1\gamma\varphi h}$ — множину елементів $x_0\in D_1$, які входять у D_1 разом зі своїми $\gamma_{\varphi h}(x_0)$-околами.

Наступні умови назвемо умовами (B_1):

а) перетин $D_{\beta\gamma\varphi h}$ множин $D_{\beta\varphi h}$ та $D_{1\gamma\varphi h}$ непорожній;

б) норма матриці

$$Q_0 = \begin{bmatrix} \dfrac{K_h T}{2}\left(1+\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|H_h A_i\|\right)+K_\varphi\|H_h\| & \dfrac{K_{1h}T}{2}\left(1+\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|H_h A_i\|\right) \\ K_h\overline{h'}\left(2+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|H_h A_i\|\right)+\dfrac{\overline{h'}}{T}K_\varphi\|H_h\| & K_{1h}\overline{h'}\left(2+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|H_h A_i\|\right)\end{bmatrix}$$

менша за одиницю.

Розглянемо рекурентну послідовність вектор-функцій $\{x_m(t,x_0)\}_{m=0}^{\infty}$, яку формально означимо так:

$$x_0(t,x_0)=x_0=(x_{01},x_{02},\ldots)\in D_{\beta\gamma\varphi h},$$

$$x_m(t,x_0)=x_0+\int\limits_0^t\left[f\left(\tau,x_{m-1}(\tau,x_0),\frac{dx_{m-1}(\tau,x_0)}{d\tau}\right)-\frac{h'(\tau)}{T}\int\limits_0^{\infty}f\left(s,x_{m-1}(s,x_0),\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{dx_{m-1}(s,x_0)}{ds}\right)ds\right]d\tau+\frac{h(t)}{T}H_h\left\{\varphi(x_{m-1}(0);x_{m-1}(t_1),x_{m-1}(t_2),\ldots)-\right.$$

$$-\sum_{i=0}^{\infty}A_ix_0-\sum_{i=1}^{\infty}A_i\int\limits_0^{t_i}\left[f\left(\tau,x_{m-1}(\tau,x_0),\frac{dx_{m-1}(\tau,x_0)}{d\tau}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{h'(\tau)}{T}\int\limits_0^{\infty}f\left(s,x_{m-1}(s,x_0),\frac{dx_{m-1}(s,x_0)}{ds}\right)ds\right]d\tau\right\},\quad m\in Z^+. \tag{5}$$

Достатніми умовами існування такої послідовності є неперервність за нормою відносно $t\geq 0$ функцій $x_i(t,x_0)$ і $\dfrac{dx_i(t,x_0)}{dt}$ та їх належність множинам D і D_1 відповідно при всіх $i\in Z^+$. У цьому разі властивості 1^* та 2^* забезпечують покоординатну збіжність інтеграла $\int\limits_0^{\infty}f\left(\tau,x_{m-1}(\tau,x_0),\dfrac{dx_{m-1}(\tau,x_0)}{d\tau}\right)d\tau$.

Теорема 1. *Нехай справджуються умови* (A_1) *і* (B_1)*. Тоді:*

1) при $m\to\infty$ *послідовність* $\{x_m(t,x_0)\}_{m=0}^{\infty}$*, яка визначена рівностями (5), рівномірно відносно* $(t,x_0)\in[0,+\infty)\times D_{\beta\gamma\varphi h}$ *збігається до диференційовної по* t *функції* $x^*(t,x_0)$*, а послідовність* $\left\{\dfrac{dx_m(t,x_0)}{dt}\right\}_{m=0}^{\infty}$ *— до функції* $\dfrac{dx^*(t,x_0)}{dt}$*, причому*

$$\sup_{t\in[0,+\infty)}\left\{\|x_m(t,x_0)-x^*(t,x_0)\|\,,\ \left\|\frac{dx_m(t,x_0)}{dt}-\frac{dx^*(t,x_0)}{dt}\right\|\right\}\leq$$

$$\leq\|Q_0^m(E_2-Q_0)^{-1}Z_1^0\|\quad\forall m\in Z^+, \tag{6}$$

де E_2 *— одинична матриця розмірності* 2×2*,* $Z_1^0=\begin{bmatrix}\beta_{\varphi h}(x_0)\\ \gamma_{\varphi h}(x_0)\end{bmatrix}$;

2) функція $x^*(t,x_0)$ *задовольняє крайову умову (2) і є розв'язком рівняння*

$$\frac{dx}{dt}=f\left(t,x,\frac{dx}{dt}\right)+\mu h'(t), \tag{7}$$

де

$$\mu = \Delta^0_{\varphi h}(x_0) = \frac{1}{T} H_h \Bigg\{ \varphi(x^*(0); x^*(t_1), x^*(t_2), \ldots) - \sum_{i=0}^{\infty} A_i x_0 -$$

$$- \sum_{i=1}^{\infty} A_i \int\limits_0^{t_i} \Bigg[f\left(\tau, x^*(\tau, x_0), \frac{dx^*(\tau, x_0)}{d\tau}\right) -$$

$$- \frac{h'(\tau)}{T} \int\limits_0^{\infty} f\left(s, x^*(s, x_0), \frac{dx^*(s, x_0)}{ds}\right) ds \Bigg] d\tau \Bigg\} -$$

$$- \frac{1}{T} \int\limits_0^{\infty} f\left(\tau, x^*(\tau, x_0), \frac{dx^*(\tau, x_0)}{d\tau}\right) d\tau; \tag{8}$$

3) якщо

$$\Delta^0_{\varphi h}(x_0) = 0, \tag{9}$$

то функція $x^*(t, x_0)$ є розв'язком крайової задачі (1), (2).

Доведення цієї теореми проводиться аналогічно до доведення теореми 1 з [5] з деякими технічними ускладненнями.

Через Q_{01} позначимо матрицю

$$\begin{bmatrix} \dfrac{T K_h \left(1 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|H_h A_i\|\right)}{1 - K_\varphi \|H_h\|} & \dfrac{T K_{1h} \left(1 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|H_h A_i\|\right)}{1 - K_\varphi \|H_h\|} \\ \dfrac{\overline{h'} K_h \left(1 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|H_h A_i\|\right)}{1 - K_\varphi \|H_h\|} & \dfrac{\overline{h'} K_{1h} \left(1 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|H_h A_i\|\right)}{1 - K_\varphi \|H_h\|} \end{bmatrix}.$$

Умовами ($\mathbf{B_1^0}$) назвемо умови (B_1), в яких нерівність $\|Q_0\| < 1$ замінено оцінкою $\max\{\|Q_0\|,\ \|Q_{01}\|\} < 1$.

Неважко переконатися, що для обраної функції $h(t)$ за умов (A_1) і (B_1^0) не існує іншого значення μ, при якому розв'язок рівняння (7) з початковою умовою $x(0) = x_0 \in D_{\beta\gamma\varphi h}$ задовольняв би крайову умову (2).

Функцію $\Delta^0_{\varphi h}(x_0)$ називатимемо точною визначальною функцією, її значення μ при фіксованому x_0 — керуючим параметром або керуванням, а рівняння (9) — точним визначальним рівнянням і розглядатимемо поряд з (9) наближене визначальне рівняння

$$\Delta^0_{\varphi hm}(x_0) = 0, \tag{10}$$

де $\Delta^0_{\varphi hm}(x_0)$ — наближена визначальна функція, яка одержується з точної шляхом заміни у виразі (8) функції $x^*(s,x_0)$ на функцію $x_m(s,x_0)$.

Зрозуміло, що крайова задача (1), (2) зводиться до розв'язування рівняння (9), а оскільки записати його неможливо, то доводиться використовувати наближене визначальне рівняння (10).

Наслідок 1. *Справджуються наступні твердження:*

1) якщо при умовах (A_1) та (B_1) існує замкнена підмножина $W \subset D_{\beta\gamma\varphi h}$ така, що для деякого $m \in Z^+$ функція $\Delta^0_{\varphi hm}$ топологічно відображує W на $\Delta^0_{\varphi hm}W$, рівняння (10) має в W єдиний розв'язок x^0 і на межі Γ_W множини W виконується нерівність

$$\inf_{x\in\Gamma_W}\|\Delta^0_{\varphi hm}(x)\| \geq \left(\frac{1}{T}K_\varphi\|H_h\| + (K_h+K_{1h})\left[1+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\|H_hA_i\|\right]\right)\times$$

$$\times\,\|Q_0^m(E_2-Q_0)^{-1}Z_1^0\| = \sigma(m),$$

то крайова задача (1), (2) має розв'язок $x = x^*(t)$ з початковою умовою $x^*(0) = x_0^* \in \in W$;

2) якою б не була функція $h(t)$, при якій виконуються умови (A_1) та (B_1^0), для того щоб деяка підмножина $D_2 \subset D_{\beta\gamma\varphi h}$ містила початкове значення $x^*(0) = x_0^*$ розв'язку цієї крайової задачі, необхідно, щоб виконувалась нерівність

$$\|\Delta^0_{\varphi hm}(\bar{x}_0)\| \leq \sup_{x_0\in D_2}\left\{\frac{1}{T}\|R_h\| + \left(\frac{1}{T}K_\varphi\|H_h\| + (K_h+K_{1h})\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\|H_hA_i\|+1\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\max\left\{1+\|R_h\|;\frac{\overline{h'}}{T}\|R_h\|\right\}\|(E_2-Q_0)^{-1}\|\right\}\|\bar{x}_0-x_0\| + \sigma(m,\bar{x}_0)$$

$$\forall m\in Z^+\ \forall\overline{x}_0\in D_2,$$

де через R_h позначено вираз $H_h\sum\limits_{i=0}^{\infty}A_i$, а через $\sigma(m,\overline{x}_0)$ — вираз

$$\left\{\frac{1}{T}K_\varphi\|H_h\| + (K_h+K_{1h})\left[\frac{1}{2}K_h\sum_{i=1}^{\infty}\|H_hA_i\|+1\right]\right\}\|Q_0^m(E_2-Q_0)^{-1}Z_1^0\|.$$

Доведення наслідку 1 традиційне і забезпечується обґрунтуванням рівномірної неперервності відображення $\Delta^0_{\varphi h}$ на множині W.

2. Крайові задачі на скінченному відрізку. Розглянемо спочатку крайову задачу для рівняння (1) з крайовою умовою

$$A_0x(0) + \sum_{i=1}^{\infty}A_ix(t_i) + Cx(T) = \varphi(x(0),x(T);x(t_1),x(t_2),\ldots),$$
$$0 < t_i < t_{i+1} < T,\ i\in Z^+. \tag{11}$$

Зберігаючи обмеження, накладені раніше на матриці A_i і функцію $\varphi(\psi)$, вважатимемо, що C — обмежена за нормою нескінченна матриця, функція $f(t,x,x_1)\ :\ [0,T]\times\times D\times D_1 = D_{10}\to\mathfrak{M}$ неперервна за сукупністю змінних на D_{10}, причому для будь-яких $\{x,x'\}\subset D,\ \{x_1,x_1'\}\subset D_1$ справджуються аналогічні до умов (4) нерівності

$$\begin{gathered}\|f(t,x,x_1)\|\le M,\\ \left\|f(t,x,x_1)-f(t,x',x_1')\right\|\le K\left\|x-x'\right\|+K_1\left\|x_1-x_1'\right\|,\end{gathered}\tag{12}$$

де M, K, K_1 — додатні сталі.

Через $D_{\beta\varphi}$ позначимо множину точок $x_0\in\mathfrak{M}$, що належать області D разом зі своїм β_φ-околом, де $\beta_\varphi(x_0)=\dfrac{T}{2}M+\beta_{1\varphi}(x_0)$, $0\le\alpha_1(t)=2t\Big(1-\dfrac{t}{T}\Big)$,

$$\beta_{1\varphi}(x_0)=\|H\|\left\|d-\left(\sum_{i=0}^{\infty}A_i+C\right)x_0\right\|+\sum_{i=1}^{\infty}\|HA_i\|\alpha_1(t_i)M,$$

вектор $d\in\mathfrak{M}$ підібрано таким чином, що $|d_i|=M_\varphi, \operatorname{sign}d_i=-\operatorname{sign}d_i^0,\ i\in Z^+$, причому $d^0=\operatorname{colon}(d_1^0,d_2^0,\ldots)=\Big(\sum\limits_{i=0}^{\infty}A_i+C\Big)x_0$, а матрицю H визначено нижче в умові а$_1^1$).

Через $D_{1\gamma\varphi}$ позначимо підмножину точок множини D_1, що належать цій множині разом зі своїми γ_φ-околами, де $\gamma_\varphi(x)=2M+\dfrac{1}{T}\beta_{1\varphi}(x)$.

Припустимо, що справджуються наступні умови:

а$_1^1$) матриця $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{t_i}{T}A_i+C$ є оборотною, а обернена до неї матриця H — обмеженою за нормою;

б$_1^1$) перетин $D_{\beta\gamma\varphi}$ множин $D_{\beta\varphi}$ та $D_{1\gamma\varphi}$ непорожній;

в$_1^1$) норма матриці

$$Q_0^1=\begin{bmatrix}\dfrac{KT}{2}\left(1+\|H\|\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|A_i\|\right)+K_\varphi\|H\| & \dfrac{K_1T}{2}\left(1+\|H\|\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|A_i\|\right)\\ K\left(2+\dfrac{\|H\|}{2}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|A_i\|\right)+\dfrac{1}{T}K_\varphi\|H\| & K_1\left(2+\dfrac{\|H\|}{2}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|A_i\|\right)\end{bmatrix}$$

менша за одиницю.

Означимо послідовність функцій $\{x_m(t,x_0)\}_{m=0}^{\infty}$ такими рекурентними співвідношеннями:

$$x_m(t,x_0) = x_0 + \int\limits_0^t \left[f\left(\tau, x_{m-1}(\tau,x_0), \frac{dx_{m-1}(\tau,x_0)}{d\tau}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f\left(s, x_{m-1}(s,x_0), \frac{dx_{m-1}(s,x_0)}{ds}\right) ds \right] d\tau +$$

$$+ \frac{t}{T} H \Bigg\{ \varphi(x_{m-1}(0), x_{m-1}(T); x_{m-1}(t_1), x_{m-1}(t_2), \ldots) -$$

$$- \left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i + C\right) x_0 - \sum_{i=1}^{\infty} A_i \int\limits_0^{t_i} \left[f\left(\tau, x_{m-1}(\tau,x_0), \frac{dx_{m-1}(\tau,x_0)}{d\tau}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f\left(s, x_{m-1}(s,x_0), \frac{dx_{m-1}(\tau,x_0)}{d\tau}\right) ds \right] d\tau \Bigg\},\ m = 1, 2, \ldots,$$

$$x_0(t,x_0) = (x_{01}, x_{02}, \ldots) \equiv x_0,\ x_0 \in D_{\beta\gamma\varphi}. \tag{13}$$

Умови існування послідовності (13) та її збіжності до функції $x^*(t,x_0)$, що задовольняє рівність

$$x^*(t,x_0) = x_0 + \int\limits_0^t \left[f\left(\tau, x^*(\tau,x_0), \frac{dx^*(\tau,x_0)}{d\tau}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f\left(s, x^*(s,x_0), \frac{dx^*(s,x_0)}{ds}\right) ds \right] d\tau +$$

$$+ \frac{t}{T} H \Bigg\{ \varphi(x^*(0), x^*(T); x^*(t_1), x^*(t_2), \ldots) - \left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i + C\right) x_0 -$$

$$- \sum_{i=1}^{\infty} A_i \int\limits_0^{t_i} \left[f\left(\tau, x^*(\tau,x_0), \frac{dx^*(\tau,x_0)}{d\tau}\right) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f\left(s, x^*(s,x_0), \frac{dx^*(s,x_0)}{ds}\right) ds \right] d\tau \Bigg\}, \tag{14}$$

наведено в наступному твердженні.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (3), (12) і* $а_1^1)$, $б_1^1)$, $в_1^1)$. *Тоді при* $m \to \infty$ *послідовність* $\{x_m(t,x_0)\}_{m=0}^{\infty}$, *визначена рівностями (13), рівномірно відносно* $(t,x_0) \in \in [0,T] \times D_{\beta\gamma\varphi}$ *збігається до функції* $x^*(t,x_0)$, *що задовольняє рівність (14), причому для всіх* $m \in Z^+$ *справджується аналогічна до оцінки (6) нерівність*

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\{ \|x_m(t,x_0) - x^*(t,x_0)\|,\ \left\| \frac{dx_m(t,x_0)}{dt} - \frac{dx^*(t,x_0)}{dt} \right\| \right\} \leq$$

$$\leq \|Q_0^{1^m}(E_2 - Q_0^1)^{-1} Z_2^0\|,$$

де $Z_2^0 = \begin{bmatrix} \beta_\varphi(x_0) \\ \gamma_\varphi(x_0) \end{bmatrix}$. *Функція* $x^*(t,x_0)$ *задовольняє крайову умову (11) і є розв'язком збуреного рівняння*

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) + \mu, \tag{15}$$

де

$$\mu = \Delta_\varphi^0(x_0) = \frac{1}{T} H \Biggl\{ \varphi(x^*(0), x^*(T); x^*(t_1), x^*(t_2), \ldots) - \left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i + C \right) x_0 -$$

$$- \sum_{i=1}^{\infty} A_i \int\limits_0^{t_i} \left[f\left(\tau, x^*(t,x_0), \frac{dx^*(t,x_0)}{dt}\right) - \frac{1}{T} \int\limits_0^T f\left(\tau, x^*(t,x_0), \frac{dx^*(t,x_0)}{dt}\right) ds \right] d\tau \Biggr\} -$$

$$- \frac{1}{T} \int\limits_0^T f\left(\tau, x^*(t,x_0), \frac{dx^*(t,x_0)}{dt}\right) d\tau, \tag{16}$$

причому умова $\Delta_\varphi^0(x_0) = 0$ *є достатньою для того, щоб функція* $x^*(t,x_0)$ *була розв'язком крайової задачі (1), (11).*

Зауваження 1. Якщо в теоремі 2 умову $в_1^1)$ замінити умовою
$в_1^{01})\ \max\{\|Q_0^1\|,\ \|Q_{01}^1\|\} < 1$,
де

$$Q_{01}^1 = \begin{bmatrix} \dfrac{TK\left(1 + \|H\| \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|A_i\|\right)}{1 - K_\varphi \|H\|} & \dfrac{TK_1\left(1 + \|H\| \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|A_i\|\right)}{1 - K_\varphi \|H\|} \\[2ex] \dfrac{K\left(1 + \|H\| \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|A_i\|\right)}{1 - K_\varphi \|H\|} & \dfrac{K_1\left(1 + \|H\| \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|A_i\|\right)}{1 - K_\varphi \|H\|} \end{bmatrix},$$

то не існує іншого значення μ, при якому розв'язок рівняння (15) з початковою умовою $x(0) = x_0$ задовольняв би крайову умову (11).

Сформулюємо тепер аналогічні результати для рівняння (1), розв'язки якого задовольняють багатоточкову крайову умову

$$A_0x(0) + \sum_{i=1}^{p} A_i x(t_i) + Cx(T) = \varphi_p\left(x(0), x(T); x(t_1), \ldots, x(t_p)\right), \tag{17}$$

де функція $\varphi_p(\psi) = \varphi_p\left(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{p+2}\right) : D^{p+2} \to \mathfrak{M}$,

$$\|\varphi_p(\psi)\| \le M_{\varphi p}, \ \|\varphi_p(\psi) - \varphi_p(\psi_*)\| \le K_{\varphi p}\, \|\psi - \psi_*\| \quad \forall\, \{\, \psi, \psi_* \} \subset D^{p+2}, \tag{18}$$

а $M_{\varphi p}$ та $K_{\varphi p}$ — додатні сталі.

Через $D_{\beta\varphi p}$ позначимо множину точок $x_0 \in \mathfrak{M}$, які входять в область D разом зі своїм $\beta_{\varphi p}$-околом. Тут $\beta_{\varphi p}(x_0) = \dfrac{T}{2}M + \beta_{1\varphi p}(x_0)$,

$$\beta_{1\varphi p}(x_0) = \|H_p\| \left\| d_p - \left(\sum_{i=0}^{p} A_i + C \right) x_0 \right\| + \sum_{i=1}^{p} \|H_p A_i\| \alpha_1(t_i) M,$$

$$d_p = (d_{1p}, d_{2p}, \ldots) \in \mathfrak{M}, \ \ |d_{ip}| = M_{\varphi p}, \ i \in Z^+,$$

$$\operatorname{sign} d_{ip} = -\operatorname{sign} d_{ip}^0, \quad d_p^0 = \operatorname{colon}\left(d_{1p}^0, d_{2p}^0, \ldots\right) = \left(\sum_{i=0}^{p} A_i + C \right) x_0,$$

а матрицю H_p визначено нижче в умові а$^1_2$).

Через $D_{1\gamma\varphi p}$ позначимо підмножину елементів множини D_1, що належать цій множині разом зі своїми $\gamma_{\varphi p}$-околами, де $\gamma_{\varphi p}(x) = 2M + \dfrac{1}{T}\beta_{1\varphi p}(x)$.

Припустимо, що справджуються наступні умови:

а$^1_2$) матриця $\sum\limits_{i=1}^{p} \dfrac{t_i}{T} A_i + C$ є оборотною, а обернена до неї матриця H_p — обмеженою за нормою;

б$^1_2$) перетин $D_{\beta\gamma\varphi p}$ множин $D_{\beta\varphi p}$ та $D_{1\gamma\varphi p}$ непорожній;

в$^1_2$) норма матриці

$$Q^1_{0p} = \begin{bmatrix} \dfrac{KT}{2}\left(1 + \|H_p\| \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \|A_i\|\right) + K_{\varphi p}\|H_p\| & \dfrac{K_1 T}{2}\left(1 + \|H_p\| \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \|A_i\|\right) \\ K\left(2 + \dfrac{1}{2}\|H_p\| \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \|A_i\|\right) + \dfrac{1}{T} K_{\varphi p}\|H_p\| & K_1\left(2 + \dfrac{1}{2}\|H_p\| \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \|A_i\|\right) \end{bmatrix}$$

менша за одиницю.

При цих умовах існує послідовність функцій $\{x_{p_m}(t, x_0)\}$, визначена рівностями, що одержані з (13) замінами в них символів $x_m(t, x_0)$ на $x_{p_m}(t, x_0)$, φ на φ_p, $D_{\beta\gamma\varphi}$ на $D_{\beta\gamma\varphi p}$, $\sum\limits_{i=0}^{\infty}$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}$ на $\sum\limits_{i=0}^{p}$ та $\sum\limits_{i=1}^{p}$ відповідно. Ці функції задовольняють відповідні рекурентні крайові умови

$$A_0 x_{p_m}(0) + \sum_{i=1}^{p} A_i x_{p_m}(t_i) + C x_{p_m}(T) =$$

$$= \varphi(x_{p_{m-1}}(0), x_{p_{m-1}}(T); x_{p_{m-1}}(t_1), \ldots, x_{p_{m-1}}(t_p))$$

при довільних $x_0 \in D_{\beta\gamma\varphi p}$.

Умови збіжності послідовності $\{x_{p_m}(t, x_0)\}$ до функції $x_p(t, x_0)$, що задовольняє рівність (14), в якій виконано заміну символів $x^*(t, x_0)$ на $x_p(t, x_0)$, $\varphi(x^*(0), x^*(T); x^*(t_1), x^*(t_2), \ldots)$ на $\varphi_p(x_p(0), x_p(T); x_p(t_1), \ldots, x_p(t_p))$, $\sum\limits_{i=0}^{\infty}$ та $\sum\limits_{i=1}^{\infty}$ на $\sum\limits_{i=0}^{p}$ та $\sum\limits_{i=1}^{p}$ відповідно, наведено в наступному твердженні.

Наслідок 2. *Припустимо, що виконуються умови (12), (18) та а$_2^1$), б$_2^1$), в$_2^1$). Тоді:*

1) послідовність функцій $\{x_{p_m}(t, x_0)\}_{m=0}^{\infty}$ рівномірно відносно $(t, x_0) \in [0, T] \times D_{\beta\gamma\varphi p}$ збіжна при $m \to \infty$ до граничної функції $x_p(t, x_0)$, причому

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\{ \|x_{p_m}(t, x_0) - x_p(t, x_0)\|, \ \left\| \frac{dx_{p_m}(t, x_0)}{dt} - \frac{dx_p(t, x_0)}{dt} \right\| \right\} \le$$

$$\le \|(Q_{0p}^1)^m (E_2 - Q_{0p}^1)^{-1} Z_{2p}^0\|,$$

де $Z_{2p}^0 = \begin{bmatrix} \beta_{\varphi p}(x_0) \\ \gamma_{\varphi p}(x_0) \end{bmatrix}$;

2) функція $x_p(t, x_0)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) + \mu_p \tag{19}$$

з крайовою умовою (17), де $\mu_p = \Delta_{\varphi p}^0(x_0)$ визначається правою частиною рівності (16), в якій виконано ту ж саму заміну символів, що і в рівності (14), а H замінено на H_p, причому умова $\Delta_{\varphi p}^0(x_0) = 0$ є достатньою для того, щоб функція $x_p(t, x_0)$ була розв'язком крайової задачі (1), (17).

Зауваження 2. Якщо в припущеннях наслідку 2 умову в$_2^1$) замінити умовою

в$_2^{01}$) $\max\{\|Q_{0p}^1\|, \ \|Q_{01p}^1\|\} < 1$,

де

$$Q_{01p}^1 = \begin{bmatrix} \dfrac{TK\left(1 + \|H_p\| \sum\limits_{i=1}^{p} \|A_i\|\right)}{1 - K_{\varphi p}\|H_p\|} & \dfrac{TK_1\left(1 + \|H_p\| \sum\limits_{i=1}^{p} \|A_i\|\right)}{1 - K_{\varphi p}\|H_p\|} \\[3ex] \dfrac{K\left(1 + \|H_p\| \sum\limits_{i=1}^{p} \|A_i\|\right)}{1 - K_{\varphi p}\|H_p\|} & \dfrac{K_1\left(1 + \|H_p\| \sum\limits_{i=1}^{p} \|A_i\|\right)}{1 - K_{\varphi p}\|H_p\|} \end{bmatrix},$$

то не існує іншого значення μ_p, при якому розв'язок рівняння (19) з початковою умовою $x(0) = x_0$ задовольняв би крайову умову (17).

3. Редукція крайової задачі (15), (11) до багатоточкової крайової задачі для рівняння у скінченновимірному просторі . Введемо позначення, що уточнюють позначення з [6, с. 1208]:

$$\overset{(n)}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \overset{(n)}{x_0} = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}),\ \overset{(n)}{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n),$$

$$\overset{(n)}{f}(t, \overset{(n)}{x}, \overset{(n)}{x_1}) = (f_1(t, x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots, x_{11}, \ldots, x_{1n}, 0, 0, \ldots), \ldots$$

$$\ldots, f_n(t, x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots, x_{11}, \ldots, x_{1n}, 0, 0, \ldots)),$$

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots),\ \psi_i = (\psi_{1i}, \psi_{2i}, \ldots),\ \overset{n}{\psi}_i = (\psi_{1i}, \ldots, \psi_{ni}), \quad \{n, i\} \subset Z^+,$$

$$\varphi_p(\psi_1, \ldots, \psi_{p+2}) = \big\{\varphi_{1p}(\psi_1, \ldots, \psi_{p+2}), \varphi_{2p}(\psi_1, \ldots, \psi_{p+2}), \ldots\big\} =$$

$$= \varphi(\psi_1, \ldots, \psi_{p+2}, 0, 0, \ldots) =$$

$$= \big\{\varphi_1(\psi_1, \ldots, \psi_{p+2}, 0, 0, \ldots), \varphi_2(\psi_1, \ldots, \psi_{p+2}, 0, 0, \ldots) \ldots\big\},$$

$$\overset{n}{\varphi}_p(\overset{n}{\psi}_1, \ldots, \overset{n}{\psi}_{p+2}) = \Big\{\varphi_{1p}(\overset{n}{\psi}_1, \ldots, \overset{n}{\psi}_{p+2}), \ldots, \varphi_{np}(\overset{n}{\psi}_1, \ldots, \overset{n}{\psi}_{p+2})\Big\} =$$

$$= \Big\{\varphi_1(\overset{n}{\psi}_1, 0, 0, \ldots; \ldots; \overset{n}{\psi}_{p+2}, 0, 0, \ldots; 0, 0, \ldots), \ldots$$

$$\ldots, \varphi_n(\overset{n}{\psi}_1, 0, 0, \ldots; \ldots; \overset{n}{\psi}_{p+2}, 0, 0, \ldots; 0, 0, \ldots)\Big\},$$

$\overset{(n)}{A_i} = [a_{jk}^{(i)}]_{j,k=1}^n, i \in Z^+$, та $\overset{(n)}{C} = [c_{jk}]_{j,k=1}^n$ — матриці розмірності $n \times n$, що одержуються внаслідок укорочення матриць $A_i = \left[a_{jk}^{(i)}\right]_{j,k=1}^{\infty}$ та $C = [c_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$ відповідно.

Розглянемо крайову задачу для рівняння

$$\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt} = \overset{(n)}{f}\left(t, \overset{(n)}{x}, \frac{d\overset{(n)}{x}}{dt}\right) \tag{20}$$

з крайовою умовою

$$\overset{(n)}{A_0}\overset{(n)}{x}(0) + \sum_{i=1}^{p} \overset{(n)}{A_i}\overset{(n)}{x}(t_i) + \overset{(n)}{C}\overset{(n)}{x}(T) =$$

$$= \overset{(n)}{\varphi}_p(\overset{(n)}{x}(0, \overset{(n)}{x_0}), \overset{(n)}{x}(T, \overset{(n)}{x_0}); \overset{(n)}{x}(t_1, \overset{(n)}{x_0}), \ldots, \overset{(n)}{x}(t_p, \overset{(n)}{x_0})), \tag{21}$$

яка є багатоточковою крайовою задачею у просторі R^n.

Як і раніше, вважатимемо, що функції $f(t,x,x_1)$ та $\varphi_p(\psi)$ підпорядковано умовам (12) та (18) відповідно. Вважатимемо також, що $y \in R^n$ належить множині $\tilde{D}^{(n)}$ (множині $\tilde{D}_1^{(n)}$), якщо $(y,0,0,0,\ldots) \in D((y,0,0,0,\ldots) \in D_1)$. Очевидно, що для довільних $\{\overset{(n)}{x}, \overset{(n)}{x'}\} \subset \subset \tilde{D}^{(n)}$, $\{\overset{(n)}{x_1}, \overset{(n)}{x'_1}\} \subset \tilde{D}_1^{(n)}$ і $t \in [0,T]$ виконуються нерівності

$$\begin{gathered}\|\overset{(n)}{f}(t,\overset{(n)}{x},\overset{(n)}{x_1})\| \le M,\\ \|\overset{(n)}{f}(t,\overset{(n)}{x},\overset{(n)}{x_1}) - \overset{(n)}{f}(t,\overset{(n)}{x'},\overset{(n)}{x'_1})\| \le K\|\overset{(n)}{x} - \overset{(n)}{x'}\| + K_1\|\overset{(n)}{x_1} - \overset{(n)}{x'_1}\|.\end{gathered} \tag{22}$$

Якщо $y_i \in \tilde{D}^{(n)}$, $i = \overline{1,p+2}$, то $Y = (y_1,y_2,\ldots y_{p+2}) \in \tilde{D}^{(n)^{p+2}}$ і для будь-яких $\{Y_1,Y_2\} \subset \tilde{D}^{(n)^{p+2}}$ виконуються нерівності

$$\|\overset{(n)}{\varphi}_p(Y_1)\| \le M_{\varphi p},\ \|\overset{(n)}{\varphi}_p(Y_1) - \overset{(n)}{\varphi}_p(Y_2)\| \le K_{\varphi p}\|Y_1 - Y_2\|. \tag{23}$$

Припустимо, що виконуються такі умови:

а$_3^1$) існує матриця $\overset{(n)}{H}_p$, обернена до матриці $\sum\limits_{i=1}^{p} \frac{t_i}{T}\overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C}$;

б$_3^1$) перетин $\tilde{D}^{(n)}_{\beta\gamma\varphi p}$ множин $\tilde{D}^{(n)}_{\overset{(n)}{\beta}_{\varphi p}}$ та $\tilde{D}^{(n)}_{1_{\overset{(n)}{\gamma}_{\varphi p}}}$ непорожній, де $\tilde{D}^{(n)}_{\overset{(n)}{\beta}_{\varphi p}}$ та $\tilde{D}^{(n)}_{1_{\overset{n}{\gamma}_{\varphi p}}}$ — множини таких точок $\overset{(n)}{x_0} = (x_{01},x_{02},\ldots,x_{0n}) \in R^n$, що точки $(\overset{(n)}{x_0},0,0,\ldots)$ належать області D разом зі своїм $\overset{(n)}{\beta}_{\varphi p}$-околом та області D_1 разом зі своїм $\overset{(n)}{\gamma}_{\varphi p}$-околом, де

$$\overset{(n)}{\beta}_{\varphi p}(x_0) = \frac{T}{2}M + \overset{(n)}{\beta}_{1\varphi p}(x_0),\ \overset{(n)}{\gamma}_{\varphi p}(x_0) = 2M + \frac{1}{T}\overset{(n)}{\beta}_{1\varphi p}(x_0),$$

$$\overset{(n)}{\beta}_{1\varphi p}(x_0) = \|\overset{(n)}{H}_p\|\left\|\overset{(n)}{d}_p - \left(\sum_{i=0}^{p}\overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C}\right)\overset{(n)}{x_0}\right\| + \sum_{i=1}^{p}\|\overset{(n)}{H}_p\overset{(n)}{A}_i\|\alpha_1(t_i)M,$$

а вектор $\overset{(n)}{d}_p = \left\{\overset{(n)}{d}_{1p},\overset{(n)}{d}_{2p},\ldots,\overset{(n)}{d}_{np}\right\} \in R^n$ підібрано так, що $|\overset{(n)}{d}_{ip}| = M_{\varphi p}$, $\operatorname{sign}\overset{(n)}{d}_{ip} = -\operatorname{sign}\overset{(n)^0}{d}_{ip}$, $\overset{(n)^0}{d}_p = \operatorname{colon}\left\{\overset{(n)^0}{d}_{1p},\overset{(n)^0}{d}_{2p},\ldots,\overset{(n)^0}{d}_{np}\right\} = \left(\sum\limits_{i=0}^{p}\overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C}\right)\overset{(n)}{x_0}$;

в$_3^1$) норма матриці

$$\overset{(n)^1}{Q}_{0p} = \begin{bmatrix} \dfrac{KT}{2}\left(1 + \|\overset{(n)}{H}_p\|\sum\limits_{i=1}^{p}\|\overset{(n)}{A}_i\|\right) + K_{\varphi p}\|\overset{(n)}{H}_p\| & \dfrac{K_1T}{2}\left(1 + \|\overset{(n)}{H}_p\|\sum\limits_{i=1}^{p}\|\overset{(n)}{A}_i\|\right) \\ K\left(2 + \dfrac{1}{2}\|\overset{(n)}{H}_p\|\sum\limits_{i=1}^{p}\|\overset{(n)}{A}_i\|\right) + \dfrac{1}{T}K_{\varphi p}\|\overset{(n)}{H}_p\| & K_1\left(2 + \dfrac{1}{2}\|\overset{(n)}{H}_p\|\sum\limits_{i=1}^{p}\|\overset{(n)}{A}_i\|\right) \end{bmatrix}$$

менша за одиницю.

Виходячи з цих умов та нерівностей (12), (18), можна встановити, що послідовність функцій $\{\overset{(n)}{x}_{p_m}(t,\overset{(n)}{x}_0)\}_{m=0}^{\infty}$, $\overset{(n)}{x}_{p_0}(t,\overset{(n)}{x}_0)\equiv\overset{(n)}{\underset{0}{x}}$, яка визначена при $m\in Z^+$ рекурентним співвідношенням (13), в якому виконано заміни символів $x_m(t,x_0)$ на $\overset{(n)}{x}_{p_m}(t,\overset{(n)}{x}_0)$, x_0 на $\overset{(n)}{x}_0$, f на $\overset{(n)}{f}$, H на $\overset{(n)}{H}_p$, $\sum\limits_{i=0}^{\infty}$ та $\sum\limits_{i=1}^{\infty}$ на $\sum\limits_{i=0}^{p}$ та $\sum\limits_{i=1}^{p}$ відповідно, A_i на $\overset{(n)}{A}_i$, $\varphi(x_{m-1}(0),x_{m-1}(T);x_{m-1}(t_1),x_{m-1}(t_2),\ldots)$ на $\overset{(n)}{\varphi}_p(\overset{(n)}{x}_{p_{m-1}}(0,\overset{(n)}{x}_0),\overset{(n)}{x}_{p_{m-1}}(T,\overset{(n)}{x}_0);\overset{(n)}{x}_{p_{m-1}}(t_1,\overset{(n)}{x}_0),\ldots,\overset{(n)}{x}_{p_{m-1}}(t_p,\overset{(n)}{x}_0))$, при $m\to\infty$ є збіжною до функції $\overset{(n)}{x}_p(t,\overset{(n)}{x}_0)$, а послідовність $\left\{\dfrac{d\overset{(n)}{x}_{p_m}(t,\overset{(n)}{x}_0)}{dt}\right\}_{m=0}^{\infty}$ — до функції $\dfrac{d\overset{(n)}{x}_p(t,\overset{(n)}{x}_0)}{dt}$ рівномірно відносно $(t,\overset{(n)}{x}_0)\in[0,T]\times\tilde{D}_{\beta\gamma\varphi p}$. При цьому ці функції задовольняють рівність (14), в якій покладено $\overset{(n)}{x}_p(t,\overset{(n)}{x}_0)$ замість $x^*(t,x_0)$, $\overset{(n)}{\varphi}_p(\overset{(n)}{x}_p(0,\overset{(n)}{x}_0),\overset{(n)}{x}_p(T,\overset{(n)}{x}_0);\overset{(n)}{x}_p(t_1,\overset{(n)}{x}_0),\ldots,\overset{(n)}{x}_p(t_p,\overset{(n)}{x}_0))$ замість $\varphi(x^*(0),x^*(T),x^*(t_1),x^*(t_2),\ldots)$ та проведено інші заміни символів так само, як у рівності (13), і функція $\overset{(n)}{x}_p(t,\overset{(n)}{x}_0)$ є розв'язком збуреного рівняння

$$\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt}=\overset{(n)}{f}\left(t,\overset{(n)}{x},\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt}\right)+\overset{(n)}{\mu}_p \tag{24}$$

з крайовою умовою (21), де керування $\overset{(n)}{\mu}_p=\overset{(n)}{\Delta}_{\varphi p}(\overset{(n)}{x}_0)$ визначається правою частиною рівностей (16), в якій виконано ті ж самі заміни символів, що й останній раз у рівності (14). Умова $\overset{(n)}{\Delta}_{\varphi p}(\overset{(n)}{x}_0)=0$ є достатньою для того, щоб функція $\overset{(n)}{x}_p(t,\overset{(n)}{x}_0)$ визначала розв'язок крайової задачі (20), (21).

Зауваження 3. Умова

в$_3^{01}$) $\max\{\|\overset{(n)}{Q}{}^1_{0p}\|,\ \|\overset{(n)}{Q}{}^1_{01p}\|\}<1$,

де

$$\overset{(n)}{Q}{}^1_{01p}=\begin{bmatrix}\dfrac{TK(1+\|\overset{(n)}{H}_p\|\sum\limits_{i=1}^{p}\|\overset{(n)}{A}_i\|)}{1-K_{\varphi p}\|\overset{(n)}{H}_p\|} & \dfrac{TK_1(1+\|\overset{(n)}{H}_p\|\sum\limits_{i=1}^{p}\|\overset{(n)}{A}_i\|)}{1-K_{\varphi p}\|\overset{(n)}{H}_p\|}\\[2ex] \dfrac{K(1+\|\overset{(n)}{H}_p\|\sum\limits_{i=1}^{p}\|\overset{(n)}{A}_i\|)}{1-K_{\varphi p}\|\overset{(n)}{H}_p\|} & \dfrac{K_1(1+\|\overset{(n)}{H}_p\|\sum\limits_{i=1}^{p}\|\overset{(n)}{A}_i\|)}{1-K_{\varphi p}\|\overset{(n)}{H}_p\|}\end{bmatrix},$$

забезпечує єдиність керування $\overset{(n)}{\mu}_p=\overset{(n)}{\Delta}_{\varphi p}(\overset{(n)}{x}_0)$ у правій частині рівняння (24), розв'язок якого задовольняє крайову умову (21).

Говорять, що $f(t,x,x_1)\in C_{\mathrm{Lip}}(t)$, якщо

$$\|f(t',x,x_1)-f(t'',x,x_1)\|\le\tilde{K}\|t'-t''\|,\quad \tilde{K}=\mathrm{const}>0,$$

для довільних $x\in D,\ x_1\in D_1,\{t',t''\}\subset[0,T]$.

Домовимось вважати, що функція $f(t,x,x_1) \in \hat{C}_{\mathrm{Lip}}(x,x_1)$, якщо вона неперервна в області D_{10}, є обмеженою в цій області сталою M і задовольняє підсилену умову Коші–Ліпшиця відносно $\{x,x_1\}$:

$$\|f(t,x',x_1') - f(t,x'',x_1'')\| \le \alpha(t)\varepsilon(m)(\|x'-x''\| + \|x_1'-x_1''\|),$$

де x', x'' — довільні точки області D, перші m відповідних координат яких збігаються, x_1', x_1'' — довільні точки області D_1, перші m відповідних координат яких збігаються, $\alpha(t) \ge$ ≥ 0 — функція, неперервна на $[0,T]$, $\varepsilon(m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \ge 0$.

Будемо говорити також, що $\varphi(\psi) \in \hat{C}_{\mathrm{Lip}}(\psi)$, якщо функція $\varphi(\psi)$ обмежена на D^∞ сталою M_φ і для всіх $\{\psi, \tilde{\psi}, \psi^g\} \subset D^\infty$ справджуються нерівності

$$\|\varphi(\psi) - \varphi(\tilde{\psi})\| \le \delta_0(n)\|\psi - \tilde{\psi}\|, \tag{25}$$

$$\|\varphi(\psi) - \varphi(\psi^g)\| \le \delta(g)\|\psi - \psi^g\|, \tag{26}$$

причому $\delta_0(n) \to 0$ при $n \to \infty$, $\delta(g) \to 0$ при $g \to \infty$. Приклад такої функції побудовано в [6].

Покладемо $K^* = \max\limits_{t\in[0,T]} \alpha(t)\cdot\varepsilon(0)$ і далі вважатимемо в другій умові (12) $K_1 = K = K^*$.

Введемо позначення

$$\beta^*_{\varphi p}(x,n_0) = \frac{\frac{2}{K^*T} - 1}{\sum\limits_{i=1}^{p} \|\overset{(n_0)}{A_i}\| + \frac{2K_{\varphi p}}{K^*T}} \left(M_\varphi + \left(\sum_{i=0}^{p}\|A_i\| + \|C\|\right)\|x\|\right) + \frac{M}{K^*};$$

$$\gamma^*_{\varphi p}(x,n_0) = \frac{\frac{2}{K^*} - 4}{T\sum\limits_{i=1}^{p} \|\overset{(n_0)}{A_i}\| + \frac{2K_{\varphi p}}{K^*}} \left(M_\varphi + \left(\sum_{i=0}^{p}\|A_i\| + \|C\|\right)\|x\|\right) + \frac{M}{K^*}, \quad n_0 \in Z^+;$$

$D^*_{\beta\varphi p}$ — множина, всі точки якої належать множині D разом зі своїм $\beta^*_{\varphi p}(x)$-околом; $D^*_{1\gamma\varphi p}$ — множина, всі точки якої належать множині D_1 разом зі своїм $\gamma^*_{\varphi p}(x)$-околом.

Вважаючи, що $\varphi(\psi) \in \hat{C}_{\mathrm{Lip}}(\psi)$, покладемо в правих частинах нерівностей (25) і (26) $\delta(0) = \delta_0(0) = K_\varphi$.

Справджується наступне твердження.

Лема 1. *Нехай $f(t,x,x_1) \in \hat{C}_{\mathrm{Lip}}(x,x_1) \cap C_{\mathrm{Lip}}(t)$, перетин $D^*_{\beta\gamma\varphi p}$ множин $D^*_{\beta\varphi p}$ та $D^*_{1\gamma\varphi p}$ непорожній і справджуються умови $а_2^1$), $в_2^{01}$), (3) та (26). Якщо для будь-якого $n \ge n_0$ виконуються умови $а_3^1$), $в_3^1$), то для будь-якого $x_0 \in D^*_{\beta\gamma\varphi p}$ у сенсі покоординатного граничного переходу мають місце співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty} \overset{(n)}{x_p}(t, \overset{(n)}{x_0}) = x_p(t,x_0), \quad \lim_{n\to\infty} \overset{(n)}{\mu_p} = \mu_p, \tag{27}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d\,\overset{(n)}{x_p}(t,\overset{(n)}{x_0})}{dt} = \frac{dx_p(t,x_0)}{dt}, \tag{28}$$

в яких функції $x_p(t,x_0)$ *і* $\overset{(n)}{x}_p(t,\overset{(n)}{x}_0)$ *є розв'язками крайових задач (19), (17) та (24), (21) відповідно.*

Доведення проведемо аналогічно до доведення леми 2.1 з [6]. Неважко зрозуміти, що з умови (3) випливають умова (18) та нерівності (23) для будь-якого $n \in Z^+$, а з включення $f(t,x,x_1) \in \hat{C}_{\text{Lip}}(x,x_1)$ — нерівності (12) та (22) при всіх $n \in Z^+$. При цьому сталі M, $K = K_1 = K^*$, $M_{\varphi p}$ та $K_{\varphi p}$ не залежать від n.

Враховуючи, що з умов в$_2^{01}$) та в$_3^1$) випливають оцінки

$$\frac{KT}{2}\left[1+\|H_p\|\sum_{i=1}^{p}\|A_1\|\right] \le \|Q_{0p}^1\| < 1,\ \frac{KT}{2}\left[1+\|\overset{(n)}{H}_p\|\sum_{i=1}^{p}\|\overset{(n)}{A}_1\|\right] \le \|\overset{(n)}{Q}{}^1_{0p}\| < 1,$$

одержуємо, що при $n \ge n_0$ $\overset{(n)}{\beta}_{\varphi p} < \beta^*_{\varphi p}$, $\beta_{\varphi p} < \beta^*_{\varphi p}$ $\forall x_0 \in D^*_{\beta\gamma\varphi p}$. Це означає, що з включення $x_0 \in D^*_{\beta\varphi p}$ випливають співвідношення $x_0 \in D_{\beta\varphi p}$ і $\overset{(n)}{x}_0 \in \tilde{D}^{(n)}_{\overset{(n)}{\beta}_{\varphi p}}$ $\forall n \ge n_0$. Аналогічно з включення $x_0 \in D^*_{1\gamma\varphi p}$ випливають включення $x_0 \in D_{1\gamma\varphi p}$ і $\overset{(n)}{x}_0 \in \tilde{D}^{(n)}_{1_{\overset{(n)}{\gamma}_{\varphi p}}}$. Для цього досить показати, що для будь-якого $n \ge n_0$ справджуються нерівності $\gamma_{\varphi p} < \gamma^*_{\varphi p}$, $\overset{(n)}{\gamma}_{\varphi p} < \gamma^*_{\varphi p}$.

Умова в$_3^1$) приводить до нерівностей

$$\|\overset{(n)}{\Delta}_{\varphi p}(\overset{(n)}{x}_0)\| \le \frac{\frac{2}{K^*T}-1}{T\sum\limits_{i=1}^{p}\|\overset{(n_0)}{A}_i\| + \frac{2K_\varphi}{K^*}}\left(M_\varphi + \left(\sum_{i=0}^{p}\|A_i\| + \|C\|\right)\|x_0\| + \right.$$

$$\left. + \frac{MT}{2}\sum_{i=1}^{p}\|A_i\|\right) + M \le M' = \text{const} < \infty,$$

де $n \ge n_0,\ x_0 \in D^*_{\beta\gamma\varphi p}$. Тому послідовність $\left\{\overset{(n)}{\mu}_p\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ рівномірно обмежена за нормою простору $\mathfrak{M}$, і з неї методом діагоналізації можна виділити підпослідовність $\left\{\overset{(s_i)}{\mu}_p\right\}_{i=1}^{\infty}$, покоординатно збіжну при $i \to \infty$. Запишемо тепер відповідну послідовність рівнянь вигляду (24), замінивши індекс n на індекс s_i:

$$\frac{d\overset{(s_i)}{x}}{dt} = \overset{(s_i)}{f}\left(t, \overset{(s_i)}{x}, \frac{d\overset{(s_i)}{x}}{dt}\right) + \overset{(s_i)}{\mu}_p,\ i \in Z^+. \tag{29}$$

Кожному рівнянню (29) відповідає крайова умова (21), в якій виконано вказану вище заміну індексів.

Оскільки для будь-якого $i \in Z^+, t \in [0,T]$ $\|\overset{(s_i)}{x}_p(t,\overset{(s_i)}{x}_0)\| \le M_0$, то послідовність функцій $\left\{\overset{(s_i)}{x}_p(t,\overset{(s_i)}{x}_0)\right\}_{i=1}^{\infty}$ рівномірно обмежена на цьому відрізку. Покажемо, що вона на ньому рівностепенево неперервна.

Дійсно, позначивши s_i через k, для будь-яких $\{t^{(1)}, t^{(2)}\} \subset [0,T]$, $t^{(1)} < t^{(2)}$, маємо

$$\overset{(k)}{x}_p(t^{(2)}, \overset{(k)}{x}_0) - \overset{(k)}{x}_p(t^{(1)}, \overset{(k)}{x}_0) = \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \left[\overset{(k)}{f}\left(\tau, \overset{(k)}{x}_p(\tau, \overset{(k)}{x}_0), \frac{d\,\overset{(k)}{x}_p(\tau, \overset{(k)}{x}_0)}{d\tau}\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{T}\int\limits_0^T \overset{(k)}{f}\left(s, \overset{(k)}{x}_p(s, \overset{(k)}{x}_0), \frac{d\,\overset{(k)}{x}_p(s, \overset{(k)}{x}_0)}{ds}\right) ds \right] d\tau + \frac{(t^{(2)} - t^{(1)})}{T} \overset{(k)}{H}_p \times$$

$$\times \left\{ \overset{(k)}{\varphi}_p(\overset{(k)}{x}_p(0, \overset{(k)}{x}_0), \overset{(k)}{x}_p(T, \overset{(k)}{x}_0); \overset{(k)}{x}_p(t_1, \overset{(k)}{x}_0), \ldots, \overset{(k)}{x}_p(t_p, \overset{(k)}{x}_0)) - \left(\sum_{i=0}^{p} \overset{(k)}{A}_i + \overset{(k)}{C} \right) \overset{(k)}{x}_0 - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{p} \overset{(k)}{A}_i \int\limits_0^{t_i} \left[\overset{(k)}{f}\left(\tau, \overset{(k)}{x}_p(\tau, \overset{(k)}{x}_0), \frac{d\,\overset{(k)}{x}_p(\tau, \overset{(k)}{x}_0)}{d\tau}\right) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T \overset{(k)}{f}\left(s, \overset{(k)}{x}_p(s, \overset{(k)}{x}_0), \frac{d\,\overset{(k)}{x}_p(s, \overset{(k)}{x}_0)}{ds}\right) ds \right] d\tau \right\},$$

звідки одержуємо нерівність

$$\|\overset{(k)}{x}_p(t^{(2)}, \overset{(k)}{x}_0) - \overset{(k)}{x}_p(t^{(1)}, \overset{(k)}{x}_0)\| \leq (t^{(2)} - t^{(1)})M'', \ M'' = \text{const} < \infty.$$

Стала M'' не залежить від s_i. Тому остання нерівність забезпечує рівностепеневу неперервність послідовності $\left\{ \overset{(s_i)}{x}_p(t, \overset{(s_i)}{x}_0) \right\}_{i=1}^{\infty}$ на сегменті $[0,T]$, і застосування теореми Арцела та методу діагоналізації дає можливість вибрати з неї підпослідовність, рівномірно збіжну в покоординатному сенсі відносно $t \in [0,T]$. Для зручності вважатимемо, що такою вже є сама послідовність $\left\{ \overset{(s_i)}{x}_p(t, \overset{(s_i)}{x}_0) \right\}_{i=1}^{\infty}$, і, знову позначивши s_i через k, для всіх $\{t^{(1)}, t^{(2)}\} \subset [0,T]$ таких, що $t^{(1)} < t^{(2)}$, з (24) отримаємо

$$\left\| \frac{d\,\overset{(k)}{x}_p(t^{(2)}, \overset{(k)}{x}_0)}{dt} - \frac{d\,\overset{(k)}{x}_p(t^{(1)}, \overset{(k)}{x}_0)}{dt} \right\| \leq K^* \left\| \overset{(k)}{x}_p(t^{(2)}, \overset{(k)}{x}_0) - \overset{(k)}{x}_p(t^{(1)}, \overset{(k)}{x}_0) \right\| +$$

$$+ K^* \left\| \frac{d\,\overset{(k)}{x}_p(t^{(2)}, \overset{(k)}{x}_0)}{dt} - \frac{d\,\overset{(k)}{x}_p(t^{(1)}, \overset{(k)}{x}_0)}{dt} \right\| + \tilde{K}(t^{(2)} - t^{(1)}) \leq$$

$$\leq \frac{1}{1 - K^*} [\tilde{K} + K^* M''](t^{(2)} - t^{(1)}).$$

Отже, послідовність $\left\{ \dfrac{d\,\overset{(s_i)}{x}_p(t, \overset{(s_i)}{x}_0)}{dt} \right\}_{i=1}^{\infty}$ рівностепенево неперервна на сегменті $[0,T]$, і, ще раз застосувавши теорему Арцела та метод діагоналізації, можна вибрати з неї підпослідовність $\left\{\dfrac{d\overset{(k_i)}{x}_p(t,\overset{(k_i)}{x_0})}{dt}\right\}_{i=1}^{\infty}$, рівномірно відносно $t\in[0,T]$ збіжну в покоординатному розумінні одночасно з послідовністю $\left\{\overset{(k_i)}{x}_p(t,\overset{(k_i)}{x_0})\right\}_{i=1}^{\infty}$.

Нехай

$$\frac{d\overset{(k_i)}{x}}{dt}=\overset{(k_i)}{f}\left(t,\overset{(k_i)}{x},\frac{d\overset{(k_i)}{x}}{dt}\right)+\overset{(k_i)}{\mu}_p,\ i\in Z^+,$$

— відповідна підпослідовність послідовності рівнянь (29) і кожному її рівнянню відповідає крайова умова, одержана з (21) заміною індексу n на k_i.

Ввівши позначення $\bar\mu_p=\lim\limits_{i\to\infty}\overset{(s_i)}{\mu}_p$, $\bar x_p(t,x_0)=\lim\limits_{i\to\infty}\overset{(k_i)}{x}_p(t,\overset{(k_i)}{x_0})$, де граничні переходи здійснюються у покоординатному сенсі, покажемо, що справджуються рівності

$$\bar x_p(t,x_0)=x_p(t,x_0),\quad \bar\mu_p=\mu_p. \tag{30}$$

Введемо позначення $\overset{(k_i)}{x_p}(t,\overset{(k_i)}{x_0})=\overset{(k_i)}{x_p}=(\overset{(k_i)}{x}_{1p},\ldots,\overset{(k_i)}{x}_{k_ip})$,

$$\frac{d\overset{(k_i)}{x_p}(t,\overset{(k_i)}{x_0})}{dt}=\frac{d\overset{(k_i)}{x_p}}{dt}=\left(\frac{d\overset{(k_i)}{x}_{1p}}{dt},\ldots,\frac{d\overset{(k_i)}{x}_{k_ip}}{dt}\right),$$

$$\overset{(k_i)}{f}(t,\overset{(k_i)}{x_p})=\overset{(k_i)}{f}=(\overset{(k_i)}{f_1},\overset{(k_i)}{f_2},\ldots,\overset{(k_i)}{f}_{k_i}),\ i\in Z^+,$$

і розглянемо при фіксованому натуральному ℓ послідовність $\left\{\overset{(k_i)}{f_\ell}\right\}_{i=1}^{\infty}$, скінченна кількість елементів якої, що відповідають значенням $i\in\{1,2,\ldots,m\}$, є нулями, якщо $k_m<$ $<\ell\le k_{m+1}$.

Тоді для будь-якого $i\ge m+1$

$$\overset{(k_i)}{f_\ell}=f_\ell\left(t,\overset{(k_i)}{x}_{1p},\ldots,\overset{(k_i)}{x}_{k_ip},0,0,\ldots,\frac{d\overset{(k_i)}{x}_{1p}}{dt},\ldots,\frac{d\overset{(k_i)}{x}_{k_ip}}{dt},0,0,\ldots\right),$$

тобто вказана послідовність має вигляд

$$\underbrace{0,0,\ldots,0}_{m},f_\ell\left(t,\overset{(k_{m+1})}{x_{1p}},\overset{(k_{m+1})}{x_{2p}},\ldots,\overset{(k_{m+1})}{x}_{k_{m+1}p},0,0,\ldots,\frac{d\overset{(k_{m+1})}{x_{1p}}}{dt},\frac{d\overset{(k_{m+1})}{x_{2p}}}{dt},\ldots,\frac{d\overset{(k_{m+1})}{x}_{k_{m+1}p}}{dt},0,0,\ldots\right),$$

$$f_\ell\left(t,\overset{(k_{m+2})}{x_{1p}},\overset{(k_{m+2})}{x_{2p}},\ldots,\overset{(k_{m+2})}{x}_{k_{m+2}p},0,0,\ldots,\frac{d\overset{(k_{m+2})}{x_{1p}}}{dt},\frac{d\overset{(k_{m+2})}{x_{2p}}}{dt},\ldots,\frac{d\overset{(k_{m+2})}{x}_{k_{m+2}p}}{dt},0,0,\ldots\right),\ldots.$$

Покажемо, що

$$\left\{\overset{(k_i)}{f_\ell}\right\}_{i=1}^{\infty} \to f_\ell\left(t, \bar{x}_p(t, x_0), \frac{d\bar{x}_p(t, x_0)}{dt}\right)$$

при $i \to \infty$. Для цього оцінимо модуль різниці

$$I_\ell^{(k_i)} = \left| f_\ell\left(t, \overset{(k_i)}{x}_{1p}, \overset{(k_i)}{x}_{2p}, \ldots, \frac{d\overset{(k_i)}{x}_{1p}}{dt}, \frac{d\overset{(k_i)}{x}_{2p}}{dt}, \ldots\right) - f_\ell\left(t, \bar{x}_{1p}, \bar{x}_{2p}, \ldots, \frac{d\bar{x}_{1p}}{dt}, \frac{d\bar{x}_{2p}}{dt}, \ldots\right)\right|,$$

де $\overset{(k_i)}{x}_{k_i+1} = \overset{(k_i)}{x}_{k_i+2} = \ldots = 0, i \geq m+1$.

Неважко переконатися, що

$$I_\ell^{(k_i)} \leq A^0(\ell, g) + B^0(\ell, g),$$

де

$$A^0(\ell, g) = \left| f_\ell\left(t, \overset{(k_i)}{x}_{1p}(t), \overset{(k_i)}{x}_{2p}(t), \ldots, \frac{d\overset{(k_i)}{x}_{1p}(t)}{dt}, \frac{d\overset{(k_i)}{x}_{2p}(t)}{dt}, \ldots\right) - f_\ell\left(t, \bar{x}_{1p}(t), \ldots, \bar{x}_{gp}(t),\right.\right.$$

$$\left.\left.\overset{(k_i)}{x}_{(g+1)p}(t), \overset{(k_i)}{x}_{(g+2)p}(t), \ldots, \frac{d\bar{x}_{1p}(t)}{dt}, \ldots, \frac{d\bar{x}_{gp}(t)}{dt}, \frac{d\overset{(k_i)}{x}_{(g+1)p}(t)}{dt}, \frac{d\overset{(k_i)}{x}_{(g+2)p}(t)}{dt}, \ldots\right)\right|,$$

$$B^0(\ell, g) = \left| f_\ell\left(t, \bar{x}_{1p}(t), \ldots, \bar{x}_{gp}(t), \overset{(k_i)}{x}_{(g+1)p}(t), \overset{(k_i)}{x}_{(g+2)p}(t), \ldots, \frac{d\bar{x}_{1p}(t)}{dt}, \ldots, \frac{d\bar{x}_{gp}(t)}{dt},\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{d\overset{(k_i)}{x}_{(g+1)p}(t)}{dt}, \frac{d\overset{(k_i)}{x}_{(g+2)p}(t)}{dt}, \ldots\right) - f_\ell\left(t, \bar{x}_{1p}, \bar{x}_{2p}, \ldots, \frac{d\bar{x}_{1p}}{dt}, \frac{d\bar{x}_{2p}}{dt}, \ldots\right)\right|.$$

Оскільки $f(t, x, x_1) \in \hat{C}_{\mathrm{Lip}}(x, x_1)$, то справджується оцінка

$$B^0(\ell, g) \leq \alpha(t) 2(M_0 + M_1)\varepsilon(g) \leq \max_{t \in [0,T]} \alpha(t) 2(M_0 + M_1)\varepsilon(g),$$

де $\varepsilon(g) \underset{g \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Тоді, обравши для як завгодно малого числа $\nu > 0$ індекс g^0 так, щоб виконувалась нерівність $\varepsilon(g^0) < \nu$, матимемо

$$B^0(\ell, g^0) < 2(M_0 + M_1)\nu \max_{t \in [0,T]} \alpha(t).$$

Для $A^0(\ell, g^0)$ справджується нерівність

$$A(\ell, g^0) \le \alpha(t)\varepsilon(0)\Bigg[\sup\Big\{|\overset{(k_i)}{x}_{1p} - \bar{x}_{1p}|, \ldots, |\overset{(k_i)}{x}_{g^0p} - \bar{x}_{g^0p}|\Big\} +$$

$$+ \sup\left\{\left|\frac{d\overset{(k_i)}{x}_{1p}}{dt} - \frac{d\bar{x}_{1p}}{dt}\right|, \ldots, \left|\frac{d\overset{(k_i)}{x}_{g^0p}}{dt} - \frac{d\bar{x}_{g^0p}}{dt}\right|\right\}\Bigg].$$

Оскільки покоординатно $\overset{(k_i)}{x}_p \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x}_p$ та $\dfrac{d\overset{(k_i)}{x}_p}{dt} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{d\bar{x}_p}{dt}$ рівномірно відносно $t \in [0, T]$, то існує такий номер $N(\ell, \nu)$, що для будь-якого $k_i \ge N(\ell, \nu)$

$$\sup\Big\{|\overset{(k_i)}{x}_{1p} - \bar{x}_{1p}|, \ldots, |\overset{(k_i)}{x}_{g^0p} - \bar{x}_{g^0p}|\Big\} +$$

$$+ \sup\left\{\left|\frac{d\overset{(k_i)}{x}_{1p}}{dt} - \frac{d\bar{x}_{1p}}{dt}\right|, \ldots, \left|\frac{d\overset{(k_i)}{x}_{g^0p}}{dt} - \frac{d\bar{x}_{g^0p}}{dt}\right|\right\} < \nu.$$

Очевидно, що нерівність $k_i \ge N(\ell, \nu)$ виконується для будь-якого $i \ge i_0 \in Z^+$. Отже, $I_\ell^{(k_i)} \le \nu(2(M_0 + M_1) + \varepsilon(0)) \max\limits_{t\in[0,T]} \alpha(t) \quad \forall\, i \ge i_0$. Тому рівномірно відносно $t \in$ $\in [0, T]$ $\left\{\overset{(k_i)}{f_\ell}\right\}_{i=1}^{\infty} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} f_\ell\left(t, \bar{x}_p, \dfrac{d\bar{x}_p}{dt}\right)$. Це означає, що в покоординатному сенсі

$$\left\{\overset{(k_i)}{f}\left(t, \overset{(k_i)}{x}_p, \frac{d\overset{(k_i)}{x}_p}{dt}\right)\right\}_{i=1}^{\infty} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} f\left(t, \bar{x}_p, \frac{d\bar{x}_p}{dt}\right)$$

рівномірно відносно $t \in [0, T]$. Тоді, здійснивши покоординатний граничний перехід при $i \to \infty$ в рівностях

$$\frac{d\overset{(k_i)}{x}_p(t, \overset{(k_i)}{x}_0)}{dt} = \overset{(k_i)}{f}\left(t, \overset{(k_i)}{x}_p(t, \overset{(k_i)}{x}_0), \frac{d\overset{(k_i)}{x}_p(t, \overset{(k_i)}{x}_0)}{dt}\right) + \overset{(k_i)}{\mu}_p, \quad \overset{(k_i)}{x}_p(0, \overset{(k_i)}{x}_0) = \overset{(k_i)}{x}_0,$$

одержимо співвідношення

$$\frac{d\bar{x}_p(t, x_0)}{dt} = f\left(t, \bar{x}_p(t, x_0), \frac{d\bar{x}_p(t, x_0)}{dt}\right) + \bar{\mu}_p, \quad \bar{x}_p(0, x_0) = x_0. \tag{31}$$

Неважко також переконатися, що функція $\bar{x}_p(t, x_0)$ задовольняє рівність (17).

Отже, на підставі рівностей (31) функція $\bar{x}_p(t, x_0)$ є розв'язком крайової задачі (19), (17), і з єдиності керування μ_p для фіксованого x_0 випливають рівності (30).

Завершується доведення леми 1 аналогічно до доведення леми 2.1 з [6].

Введемо позначення

$$\beta_\varphi^*(x, n_0, p_0) = \frac{\frac{2}{K^*T} - 1}{\sum\limits_{i=1}^{p_0} \| \overset{(n_0)}{A_i} \| + \frac{2K_\varphi}{K^*T}} \left(M_\varphi + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \|A_i\| + \|C\| \right) \|x\| \right) + \frac{M}{K^*};$$

$D_{\beta\varphi}^*$ — множина, кожна точка якої належить множині D разом зі своїм $\beta_\varphi^*(x, n_0, p_0)$-околом;

$$\gamma_\varphi^*(x, n_0, p_0) = \frac{\frac{2}{K^*} - 4}{T \sum\limits_{i=1}^{p_0} \| \overset{(n_0)}{A_i} \| + \frac{2K_\varphi}{K^*}} \left(M_\varphi + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \|A_i\| + \|C\| \right) \|x\| \right) + \frac{M}{K^*};$$

$D_{1\gamma\varphi}^*$ — множина, кожна точка якої належить множині D_1 разом зі своїм $\gamma_\varphi^*(x, n_0, p_0)$-околом.

Теорема 3 (аналог теореми 2.1 з [6]). *Нехай $f(t, x, x_1) \in \hat{C}_{\text{Lip}}(x, x_1) \cap C_{\text{Lip}}(t)$, $\varphi(\psi) \in \in \hat{C}_{\text{Lip}}(\psi)$, перетин множин $D_{\beta\varphi}^*$ та $D_{1\gamma\varphi}^*$ непорожній і для будь-яких $n \geq n_0$, $p \geq p_0$ виконуються умови а$_1^1$), а$_2^1$), а$_3^1$) та умови в$_1^1$), в$_2^{01}$), в$_3^1$), в яких покладено $K_{\varphi p} = K_\varphi$. Тоді для будь-якого $x_0 \in D_{\beta\varphi}^* \cap D_{1\gamma\varphi}^*$ справджуються граничні співвідношення*

$$x^*(t, x_0) = \lim_{p \to \infty} \left(\lim_{n \to \infty} \overset{(n)}{x}_p(t, \overset{(n)}{x_0}) \right), \tag{32}$$

$$\mu = \lim_{p \to \infty} (\lim_{n \to \infty} \overset{(n)}{\mu}_p), \tag{33}$$

$$\frac{dx^*(t, x_0)}{dt} = \lim_{p \to \infty} \left(\lim_{n \to \infty} \frac{d \overset{(n)}{x}_p(t, \overset{(n)}{x_0})}{dt} \right), \tag{34}$$

де збіжність відносно n є покоординатною, відносно p — за нормою простору $\mathfrak{M}$, $x^*(t, x_0)$ та μ визначено в теоремі 2.

Якщо умову в$_2^{01}$) замінити умовою

в$_2^{01*}$) $\max\{ \|Q_{0p}^1\|, \|Q_{01p}^1\| \} \leq q = \text{const} < 1$,

то не існує іншого значення $\mu \in \mathfrak{M}$ такого, при якому розв'язок рівняння (15) з початковою умовою $x(0) = x_0$ задовольняв би крайову умову (11).

Доведення. Неважко показати, що з включення $x_0 \in D_{\beta\varphi}^* \cap D_{1\gamma\varphi}^*$ випливають включення

$$x_0 \in D_{\beta\varphi} \cap D_{1\gamma\varphi}, \ x_0 \in D_{\beta\varphi p} \cap D_{1\gamma\varphi p},$$

$$\overset{(n)}{x}_0 \in \tilde{D}^{(n)}_{\overset{(n)}{\beta}_{\varphi p}} \cap \tilde{D}^{(n)}_{1_{\overset{(n)}{\gamma}_{\varphi p}}} \quad \forall \, n \geq n_0, \ p \geq p_0,$$

для чого достатньо переконатися в істинності імплікацій

$$(x_0 \in D^*_{\beta\varphi}) \quad \Rightarrow \quad (x_0 \in D_{\beta\varphi}) \wedge (x_0 \in D_{\beta\varphi p}) \wedge (\overset{(n)}{x}_0 \in \tilde{D}^{(n)}_{\overset{(n)}{\beta}_{\varphi p}}),$$

$$(x_0 \in D^*_{1\gamma\varphi}) \quad \Rightarrow \quad (x_0 \in D_{1\gamma\varphi}) \wedge (x_0 \in D_{1\gamma\varphi p}) \wedge (\overset{(n)}{x}_0 \in \tilde{D}^{(n)}_{1_{\overset{(n)}{\gamma}_{\varphi p}}}).$$

Справджуються співвідношення

$$\|x_p(t,x_0) - x^*(t,x_0)\| \leq \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3,$$

$$\left\|\frac{dx_p(t,x_0)}{dt} - \frac{dx^*(t,x_0)}{dt}\right\| \leq \Gamma_1^1 + \frac{1}{T}(\Gamma_2 + \Gamma_3),$$

де

$$\Gamma_1 = \left\|\int\limits_0^t \left[f\left(\tau, x^*(\tau,x_0), \frac{dx^*(\tau,x_0)}{d\tau}\right) - f\left(\tau, x_p(\tau,x_0), \frac{dx_p(\tau,x_0)}{d\tau}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\frac{1}{T}\int\limits_0^T \left(f\left(s, x^*(s,x_0), \frac{dx^*(s,x_0)}{ds}\right) - f\left(s, x_p(s,x_0), \frac{dx_p(s,x_0)}{ds}\right)\right)ds\right]d\tau\right\| \leq$$

$$\leq \alpha_1(t)K^*\left[\sup_{t\in[0,T]}\|x^*(t,x_0) - x_p(t,x_0)\| + \sup_{t\in[0,T]}\left\|\frac{dx^*(t,x_0)}{dt} - \frac{dx_p(t,x_0)}{dt}\right\|\right],$$

$$\Gamma_1^1 = \left\|f\left(\tau, x^*(\tau,x_0), \frac{dx^*(\tau,x_0)}{d\tau}\right) - f\left(\tau, x_p(\tau,x_0), \frac{dx_p(\tau,x_0)}{d\tau}\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{T}\int\limits_0^T \left(f\left(s, x^*(s,x_0), \frac{dx^*(s,x_0)}{ds}\right) - f\left(s, x_p(s,x_0), \frac{dx_p(s,x_0)}{ds}\right)\right)ds\right\| \leq$$

$$\leq 2K^*\left[\sup_{t\in[0,T]}\|x^*(t,x_0) - x_p(t,x_0)\| + \sup_{t\in[0,T]}\left\|\frac{dx^*(t,x_0)}{dt} - \frac{dx_p(t,x_0)}{dt}\right\|\right],$$

$$\Gamma_2 = \left\| H \left\{ \varphi(x^*(0), x^*(T); x^*(t_1), x^*(t_2), \ldots) - \left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i + C \right) x_0 \right\} - \right.$$

$$\left. - H_p \left\{ \varphi_p(x_p(0), x_p(T); x_p(t_1), \ldots, x_p(t_p)) - \left(\sum_{i=0}^{p} A_i + C \right) x_0 \right\} \right\| \leq$$

$$\leq K^{(1)} \|H - H_p\| + \|H\| K_\varphi \sup_{t \in [0,T]} \|x^*(t, x_0) - x_p(t, x_0)\| +$$

$$+ \|H\| M_0 \left\{ \sum_{i=p+1}^{\infty} \|A_i\| + \delta_0(p+2) \right\},$$

$$\Gamma_3 = \left\| H \sum_{i=1}^{\infty} A_i \int_0^{t_i} \left[f\left(\tau, x^*(\tau, x_0), \frac{dx^*(\tau, x_0)}{d\tau} \right) - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{T} \int_0^T f\left(s, x^*(s, x_0), \frac{dx^*(s, x_0)}{ds} \right) ds \right] d\tau -$$

$$- H_p \sum_{i=1}^{p} A_i \int_0^{t_i} \left[f\left(\tau, x_p(\tau, x_0), \frac{dx_p(\tau, x_0)}{d\tau} \right) - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{T} \int_0^T f\left(s, x_p(s, x_0), \frac{dx_p(s, x_0)}{ds} \right) ds \right] d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \|H\| \frac{K^* T}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\| \left[\sup_{t \in [0,T]} \|x^*(t, x_0) - x_p(t, x_0)\| + \right.$$

$$\left. + \sup_{t \in [0,T]} \left\| \frac{dx^*(t, x_0)}{dt} - \frac{dx_p(t, x_0)}{dt} \right\| \right] +$$

$$+ \|H\| \frac{TM}{2} \sum_{i=p+1}^{\infty} \|A_i\| + \|H - H_p\| \frac{TM}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\|.$$

Поклавши $\sup\limits_{t \in [0,T]} \|x^*(t, x_0) - x_p(t, x_0)\| = \xi$, $\sup\limits_{t \in [0,T]} \left\| \dfrac{dx^*(t, x_0)}{dt} - \dfrac{dx_p(t, x_0)}{dt} \right\| = \xi_1$, одержимо оцінки

$$\xi \le \frac{K^*T}{2}(\xi+\xi_1) + K^{(1)}\|H-H_p\| + \|H\|\|K_\varphi\xi +$$

$$+ \|H\|M_0\left\{\sum_{i=p+1}^{\infty}\|A_i\| + \delta_0(p+2)\right\} +$$

$$+ \frac{\|H\|K^*T}{2}(\xi+\xi_1)\sum_{i=1}^{\infty}\|A_i\| + \|H\|\frac{TM}{2}\sum_{i=p+1}^{\infty}\|A_i\| + \|H-H_p\|\frac{TM}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\|A_i\|,$$

$$\xi_1 \le 2K^*(\xi+\xi_1) + K^{(1)}\|H-H_p\| + \frac{\|H\|}{T}K_\varphi\xi +$$

$$+ \frac{\|H\|M_0}{T}\left\{\sum_{i=p+1}^{\infty}\|A_i\| + \delta_0(p+2)\right\} +$$

$$+ \frac{K^*\|H\|}{2}(\xi+\xi_1)\sum_{i=1}^{\infty}\|A_i\| + \|H\|\frac{M}{2}\sum_{i=p+1}^{\infty}\|A_i\| + \|H-H_p\|\frac{M}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\|A_i\|,$$

що в сукупності дають покомпонентну нерівність

$$\begin{bmatrix}\xi\\ \xi_1\end{bmatrix} \le Q_0^1\begin{bmatrix}\xi\\ \xi_1\end{bmatrix} + \|H-H_p\|\,K^{(1)}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} + \Bigg(\|H-H_p\|\,\frac{TM}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\|A_i\| +$$
$$+ \|H\|\left(M_0 + \frac{TM}{2}\right)\sum_{i=p+1}^{\infty}\|A_i\| + \|H\|\,M_0\delta_0(p+2)\Bigg)\begin{bmatrix}1\\ \dfrac{1}{T}\end{bmatrix},$$

де в матриці Q_0^1 покладено $K_1 = K = K^*$.

Оскільки $K^{(1)}$ — стала, що не залежить від p, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|A_i\|$ є збіжним, $\delta_0(p)$ прямує до нуля при $p\to\infty$, то, врахувавши умову в$_1^1$), з останньої нерівності матимемо $\max\{\xi,\xi_1\} \le \le \eta(p)\|(E_2 - Q_0^1)^{-1}\|$, де $\eta(p) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Це означає, що при всіх $x_0 \in D^*_{\beta\varphi}\cap D^*_{1\gamma\varphi}$ послідовності $\{x_p(t,x_0)\}_{p=p_0}^{\infty}$ та $\left\{\dfrac{dx_p(t,x_0)}{dt}\right\}_{p=p_0}^{\infty}$ збіжні за нормою простору $\mathfrak{M}$ при $p\to\infty$ до $x^*(t,x_0)$ та $\dfrac{dx^*(t,x_0)}{dt}$ відповідно. Використовуючи (27) та (28), одержуємо (32) та (34). Оскільки з (32) випливає (33), а з умови в$_1^{01}$) — умова в$_1^1$), то справджується зауваження 1, що й завершує доведення теореми.

Насамкінець зауважимо, що достатніх умов, при яких збіжність відносно n у граничних переходах (32) — (34) здійснювалася б за нормою простору $\mathfrak{M}$, на цей час не знайдено.

1. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования счетных систем периодических дифференциальных уравнений // Мат. физика. — 1966. — Вып. 2. — С. 115 – 132.
2. *Мартинюк О. М., Мартинюк С. В.* Исследование периодических решений счетных систем дифференциальных уравнений второго порядка // Нелинейные эволюционные уравнения в прикладных задачах. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. — С. 88 – 90.
3. *Ронто Н. И., Мартынюк О. М.* Исследование периодических решений счетных систем второго порядка // Укр. мат. журн. — 1991. — **44**, № 1. — С. 83 – 93.
4. *Мартынюк О. М.* О решении двухточечной краевой задачи для счетных систем // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. — С. 68 – 70.
5. *Теплінський Ю. В., Недокіс В. А.* Про зліченноточкову нелінійну крайову задачу на півосі для звичайних диференціальних рівнянь у просторі обмежених числових послідовностей // Нелінійні коливання. — 2003. — **6**, № 4. — С. 530 – 549.
6. *Самойленко А. М., Теплінський Ю. В., Недокіс В. А.* Метод укорочення для зліченноточкових крайових задач у просторі обмежених числових послідовностей // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 9. — С. 1203 – 1230.
7. *Савіна Т. В.* Триточкова крайова задача для системи рівнянь першого порядку, не розв'язаної відносно похідної // Конструктивні методи дослідження диференціальних рівнянь. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1993. — С. 166 – 173.

Одержано 25.10.2006