УДК 517 . 957 : 58

УМОВНІ СИМЕТРІЇ ТА ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО РІВНЯННЯ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ-КОНВЕКЦІЇ

О. Г. Плюхін

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3
e-mail: pliukhin@imath.kiev.ua

A complete description of Q-conditional symmetries for a nonlinear reaction-diffusion-convection equation is obtained. The Q-conditional operators are applied for finding exact solutions of equations arising in applications.

Приведено исчерпывающее описание Q-условных симметрий одного нелинейного уравнения реакции-диффузии-конвекции. Найденные Q-условные операторы применены к построению точных решений некоторых уравнений, встречающихся в прикладных задачах.

1. Вступ. Нелінійними диференціальними рівняннями другого порядку описуються різноманітні нелінійні процеси [1 – 3]. Побудова точних розв'язків таких рівнянь є актуальною проблемою. Особливо важливими є розв'язки, що мають певну біологічну, фізичну чи хімічну інтерпретацію. Одна з переваг аналітичних розв'язків — це простота, завдяки якій ми можемо бачити, як розв'язки аналітично залежать від параметрів. Таким чином, ми можемо дослідити якісну поведінку розв'язків більш складних, а отже, більш реалістичних моделей.

Диференціальні рівняння з частинними похідними (ДРЧП) описують різні біологічні процеси. Наприклад, модель розсіяння комах з урахуванням динаміки росту має вигляд

$$U_t = [D(U)U_x]_x + C(U),$$

де $D(U)$ — коефіцієнт дифузії (як правило, цей коефіцієнт є степеневою функцією), $C(U)$ — реактивний член, який моделює взаємодію комах із навколишнім середовищем [3]. Тут і нижче нижні індекси t та x означають диференціювання за цими змінними, а $U = U(t,x)$ — шукана функція. Зокрема, можна навести приклад моделі з логістичним законом росту популяції [3, 4]

$$U_t = [UU_x]_x + U(1-U).$$

Фізично ця модель передбачає, що популяція переміщується до ділянок з меншою щільністю швидше, ніж популяція досягне перенаселення. Але моделі реакції-дифузії не враховують ще одного явища переносу, а саме конвекції. Нелінійна конвекція в рівняннях реакції-дифузії може мати вражаючий ефект для структури розв'язків. Якщо конвекція виникає як природне розширення закону збереження, то ми отримуємо рівняння [3]

$$U_t = [U^m U_x]_x + h(U)U_x + C(U).$$

Оскільки рівняння, наведені вище, мають біологічну інтерпретацію, то стає очевидним важливість розгляду рівняння

$$U_t = [U^m U_x]_x + \lambda U^m U_x + C(U), \tag{1}$$

де $\lambda \neq 0$ — довільна стала, $C(U)$ — довільна гладка функція.

Цю роботу присвячено знаходженню Q-умовних симетрій та побудові розв'язків з використанням Q-умовних симетрій.

2. Q-умовні симетрії. Проблему і метод знаходження Q-умовних операторів (некласичних симетрій) вперше була сформульовано в роботі [5] на прикладі лінійного рівняння теплопровідності. В подальшому Q-умовні симетрії рівнянь типу реакції-дифузії-конвекції досліджувались у роботах [6–11].

У роботах [11, 12] наведено вичерпний опис симетрій Лі рівняння реакції-дифузії-конвекції (РРДК) вигляду

$$U_t = [A(U)U_x]_x + B(U)U_x + C(U),\ B(U) \neq 0. \tag{2}$$

Оскільки задача побудови всеможливих Q-умовних операторів рівняння (2) є надто складною, то в роботі [11] знайдено такі оператори для (2) лише як приклади. В цій роботі ми обмежимося розглядом рівняння (1), але ставимо задачу про відшукання для нього всіх Q-умовних операторів вигляду

$$Q = \partial_t + \xi(t,x,U)\partial_x + \eta(t,x,U)\partial_U, \tag{3}$$

де ξ та η — гладкі функції, які потрібно знайти.

Теорема 1. *Рівняння (1) Q-умовно інваріантне відносно оператора вигляду (3) тоді і тільки тоді, коли воно та відповідний оператор набирають вигляду*

$$i)\ U_t = [U^m U_x]_x + \lambda U^m U_x + (\lambda_1 U^{m+1} + \lambda_2)(U^{-m} - \lambda_3),\ m \neq -1, \tag{4}$$

$$Q = \partial_t + (\lambda_1 U + \lambda_2 U^{-m})\partial_U; \tag{5}$$

$$ii)\ U_t = [U^{-1}U_x]_x + \lambda U^{-1}U_x + (\lambda_1 \ln U + \lambda_2)(U - \lambda_3), \tag{6}$$

$$Q = \partial_t + (\lambda_1 U \ln U + \lambda_2 U)\partial_U; \tag{7}$$

$$iii)\ U_t = [U^{-\frac{1}{2}}U_x]_x + \lambda\, U^{-\frac{1}{2}}U_x + \lambda_1 U + \lambda_2 U^{\frac{1}{2}} + \lambda_3, \tag{8}$$

$$Q = \partial_t + f(t,x)\partial_x + 2(g(t,x)U + h(t,x)U^{\frac{1}{2}})\partial_U, \tag{9}$$

де трійка функцій f, g, h є довільним розв'язком нелінійної системи диференціальних *рівнянь*

$$
\begin{aligned}
&2ff_x + f_t + fg = 0,\\
&f_{xx} - \lambda f_x - 2g_x - fh = 0,\\
&\left(g - \frac{\lambda_1}{2}\right)(g + 2f_x) + g_t = 0, \qquad (10)\\
&2gh - \lambda_1 h + 2f_x h - \lambda_2 f_x + h_t - \lambda g_x - g_{xx} = 0,\\
&h^2 - \frac{\lambda_2}{2}h - \lambda_3 f_x + \frac{\lambda_3}{2}g - \lambda h_x - h_{xx} = 0.
\end{aligned}
$$

Всі інші випадки інваріантності рівнянь вигляду (1) відносно операторів вигляду (3) є випадками класичної інваріантності в сенсі Лі.

Зауваження. При $h = 0$ знайдено загальний розв'язок системи (10). Розв'язки дають нам лише оператори ліївської симетрії (див. випадки 8 та 11 в [11]).

Доведення теореми 1 ґрунтується на алгоритмі відшукання Q-умовних операторів вигляду (3) для рівняння (1) (див., наприклад, [13]). Для доведення спочатку використаємо заміну

$$
V = \begin{cases} U^{m+1}, \ m \neq -1, \\ \ln U, \ m = -1. \end{cases} \qquad (11)
$$

У випадку $m \neq -1$ заміна (11) зводить рівняння (1) до вигляду

$$
V_{xx} = V^n V_t - \lambda V_x + F(V), \ n \neq 0, \ \lambda \neq 0, \qquad (12)
$$

де $n = -\dfrac{m}{m+1}$, $F(V) = -(m+1)C(V^{\frac{1}{m+1}})$, а у випадку $m = -1$ — до вигляду

$$
V_{xx} = e^V V_t - \lambda V_x + F(V), \ \lambda \neq 0, \qquad (13)
$$

де $F(V) = C(e^V)$.

Рівняння (12) є частковим випадком рівняння

$$
V_{xx} = F_0(V)V_t + F_1(V)V_x + F_2(V),
$$

де $F_i(V)$ — довільні функції. Для цього рівняння за допомогою алгоритму знаходження Q-умовних операторів вигляду

$$
Q = \partial_t + \xi(t, x, V)\partial_x + \eta(t, x, V)\partial_V \qquad (14)
$$

в роботі [11] отримано систему рівнянь для знаходження функцій ξ та η. У випадку $F_0(V) = V^n,\ F_1(V) = -\lambda,\ F_2(V) = F(V)$ ця система набирає вигляду

$$\begin{aligned}
&\xi_{VV} = 0,\\
&\eta_{VV} = 2\xi_V(-\lambda - \xi V^n) + 2\xi_{xV},\\
&(2\xi_V\eta - 2\xi\xi_x - \xi_t)V^n - \xi\eta n V^{n-1} - \lambda\xi_x + 3\xi_V F - 2\eta_{xV} + \xi_{xx} = 0,\\
&\eta F_V + (2\xi_x - \eta_V)F + n\eta^2 V^{n-1} + 2\xi_x\eta V^n + \eta_t V^n - \lambda\eta_x - \eta_{xx} = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Розв'язуючи перше рівняння системи (15), отримуємо

$$\xi = e(t,x)V + f(t,x).$$

Виявляється, що при розв'язанні системи (15) при $e(t,x) \neq 0$ не отримаємо жодного Q-умовного оператора, тому нижче

$$\xi = f(t,x). \tag{16}$$

Розв'язуючи друге рівняння системи (15) при (16), одержуємо

$$\eta = g(t,x)V + h(t,x). \tag{17}$$

Підставляючи (16) і (17) в третє рівняння системи, маємо

$$(2ff_x + f_t + nfg)V^n + nfhV^{n-1} + f_{xx} - \lambda f_x - 2g_x = 0. \tag{18}$$

В залежності від значень n необхідно розглянути три окремі випадки:

a) якщо $n \neq 0, 1$, то

$$\begin{aligned}
&2ff_x + f_t + nfg = 0,\\
&fh = 0,\\
&f_{xx} - \lambda f_x - 2g_x = 0;
\end{aligned} \tag{19}$$

b) якщо $n = 1$, то

$$\begin{aligned}
&2ff_x + f_t + fg = 0,\\
&f_{xx} - \lambda f_x - 2g_x + fh = 0;
\end{aligned}$$

c) якщо $n = 0$, то

$$2ff_x + f_t - f_{xx} + \lambda f_x + 2g_x = 0.$$

Зупинимося на розгляді лише випадків a) та b), оскільки у випадку c) рівняння (1) набере вигляду

$$U_t = U_{xx} + \lambda U_x + C(U)$$

і локальною заміною $y = x + \lambda t$ зведеться до рівняння

$$U_t = U_{yy} + C(U),$$

Q-умовні симетрії якого знайдено в роботах [7, 9].

Випадок a). Підставивши (16) і (17) в четверте рівняння системи (15), одержимо

$$(gV + h)F_V + (2f_x - g)F = -nV^{n-1}(gV + h)^2 + h_{xx} + \lambda h_x +$$

$$+ (g_{xx} + \lambda g_x)V - (g_t + 2f_x g)V^{n+1} - (h_t + 2f_x h)V^n. \tag{20}$$

Для того щоб розв'язати останнє рівняння, з урахуванням системи (19) розглянемо випадки $f = 0$ або $h = 0$ (див. друге рівняння системи (19)). При $f = 0$ отримуємо

$$\begin{aligned} &f = 0, \\ &g_x = 0, \\ &(gV + h)F_V - gF = -nV^{n-1}(gV + h)^2 + h_{xx} + \lambda h_x - g_t V^{n+1} - h_t V^n. \end{aligned} \tag{21}$$

Далі розглядаються всеможливі співвідношення між функціями g та h. У випадку $g = \text{const},\ h = \text{const}$ маємо

$$f = 0,\ g = \lambda_1^*,\ h = \lambda_2^*,\ F = (\lambda_1^* V + \lambda_2^*)(\lambda_3 - V^n),$$

тобто

$$V_{xx} = V^n V_t - \lambda V_x + (\lambda_1^* V + \lambda_2^*)(\lambda_3 - V^n), \tag{22}$$

$$Q = \partial_t + (\lambda_1^* V + \lambda_2^*)\partial_V. \tag{23}$$

Виконавши в рівнянні (22) та операторі (23) заміну (11), одержимо випадок i) $\Big($зауважимо, що $\lambda_i = \dfrac{\lambda_i^*}{m+1},\ i = 1, 2\Big)$.

Далі, при $g \neq 0$ ділимо третє рівняння системи (21) на g і отримуємо

$$\left(V + \frac{h}{g}\right) F_V - F = -ngV^{n-1}\left(V + \frac{h}{g}\right)^2 + \frac{h_{xx} + \lambda h_x}{g} - \frac{g_t}{g}V^{n+1} - \frac{h_t}{g}V^n. \tag{24}$$

При аналізі цього рівняння доведено, що $\dfrac{h}{g} = \mathrm{const}$ (один з етапів доведення буде розглянуто нижче), а в даному випадку ми отримуємо лише ліївські оператори та частковий випадок рівняння (22) і, відповідно, оператора (23). Зокрема, при $h = 0$

$$\begin{aligned} &2ff_x + f_t + nfg = 0, \\ &f_{xx} - \lambda f_x - 2g_x = 0, \\ &gVF_V + (2f_x - g)F = -(ng^2 + g_t + 2f_x g)V^{n+1} + (g_{xx} + \lambda g_x)V. \end{aligned} \tag{25}$$

Розв'язуючи систему (25), отримуємо

$$f = \frac{c_1 e^{\lambda_1 nt}}{c_2 e^{\lambda_1 nt} + 1}, \quad g = -\frac{\lambda_1}{c_2 e^{\lambda_1 nt} + 1},$$

$$h = 0, \quad F = \lambda_1 V^{n+1} + \lambda_2 V, \quad c_k \in \mathbf{R},\ k = 1, 2,$$

тобто

$$V_{xx} = V^n V_t - \lambda V_x + \lambda_1 V^{n+1} + \lambda_2 V,$$

$$Q = \partial_t + \frac{c_1 e^{\lambda_1 nt}}{c_2 e^{\lambda_1 nt} + 1}\partial_x - \frac{\lambda_1 V}{c_2 e^{\lambda_1 nt} + 1}\partial_V,$$

а виконуючи елементарні перетворення, бачимо, що це є ліївський оператор (див. випадок 8 в [11]).

Доведемо, що $\dfrac{h}{g} = \mathrm{const}$. Здиференціювавши рівняння (24) по змінних x та t і виділивши F_V, одержимо два рівняння. Аналізуючи їх при $\left(\dfrac{h}{g}\right)_t = 0$ та при $\left(\dfrac{h}{g}\right)_x = 0$, одержуємо або суперечність, або $\dfrac{h}{g} = \mathrm{const}$.

Розгляньмо детальніше випадок $\left(\dfrac{h}{g}\right)_t \left(\dfrac{h}{g}\right)_x \neq 0$. В цьому випадку, здиференціювавши рівняння (24) лише по змінній x, отримаємо

$$F_V = -\frac{1}{h_x}(2ngh + h_t)_x V^n - 2nhV^{n-1} + \frac{h_{xxx} + \lambda h_{xx}}{h_x}.$$

Оскільки функції $V^n,\ V^{n-1}$ та 1 функціонально незалежні, то коефіцієнти при них повинні бути сталими, зокрема $2nh = \mathrm{const}$, а отже, $h_x = 0$. Тепер, беручи до уваги останні два рівняння системи (19), маємо $g_x = 0$. Суперечність.

Випадок b). Знову підставляючи (16) і (17) в четверте рівняння системи (15), отримуємо рівняння (20) при $n = 1$. Міркуючи, як і у випадку a), одержуємо

$$V_{xx} = VV_t - \lambda V_x + \lambda_1^* V^2 + \lambda_2^* V + \lambda_3^*, \tag{26}$$

$$Q = \partial_t + f(t,x)\partial_x + (g(t,x)V + h(t,x))\partial_V, \tag{27}$$

де функції $f,\ g,\ h$ є розв'язком системи (10). Виконавши заміну (11), отримаємо випадок iii) (зауважимо, що $\lambda_i = -2\lambda_i^*,\ i = 1,2,3$).

Тепер залишилося проаналізувати рівняння (13). Знову використавши результати роботи [11], отримаємо таку систему визначальних рівнянь для знаходження функцій ξ та η:

$$\begin{aligned}
&\xi_{VV} = 0,\\
&\eta_{VV} = 2\xi_V(-\lambda - \xi e^V) + 2\xi_{xV},\\
&(\xi_t + 2\xi\xi_x - 2\xi_V\eta + \xi\eta)e^V + \lambda\xi_x - 3\xi_V F + 2\eta_{xV} - \xi_{xx} = 0,\\
&\eta F_V + (2\xi_x - \eta_V)F + \eta^2 e^V + 2\xi_x\eta e^V + \eta_t e^V - \lambda\eta_x - \eta_{xx} = 0.
\end{aligned} \tag{28}$$

Розв'язуючи цю систему, одержуємо аналогію з випадком $m \neq -1$, тобто ξ визначається формулою (16), а η — формулою (17). Після підстановки (16) та (17) у третє рівняння системи (28) воно набирає вигляду

$$e^V(fh + f_t + 2ff_x) + Ve^V(fg) + \lambda f_x + 2g_x - f_{xx} = 0.$$

Оскільки функції f, g *і* h не залежать від змінної V, то, розщепивши це рівняння по e^V і Ve^V, одержимо систему

$$\begin{aligned}
&fh + f_t + 2ff_x = 0,\\
&fg = 0,\\
&\lambda f_x + 2g_x - f_{xx} = 0.
\end{aligned} \tag{29}$$

Підставляючи (16) та (17) в четверте рівняння системи (28), отримуємо рівняння для знаходження функцій $F,\ f,\ g$ та h:

$$\begin{aligned}
(gV + h)F_V + (2f_x - g)F = -e^V(gV + h)^2 + h_{xx} + \lambda h_x +\\
+ (g_{xx} + \lambda g_x)V - (g_t + 2f_x g)Ve^V - (h_t + 2f_x h)e^V.
\end{aligned} \tag{30}$$

Використовуючи для рівняння (30) аналогічний підхід, як і для рівняння (20), з урахуванням системи (29) маємо

$$F = (\lambda_1 V + \lambda_2)(\lambda_3 - e^V),\ f = 0,\ g = \lambda_1,\ h = \lambda_2,$$

тобто

$$V_{xx} = e^V V_t - \lambda V_x + (\lambda_1 V + \lambda_2)(\lambda_3 - e^V), \tag{31}$$

$$Q = \partial_t + (\lambda_1 V + \lambda_2)\partial_V. \tag{32}$$

Виконавши в рівнянні (31) і операторі (32) заміну (11), отримаємо випадок ii).

Теорему доведено.

3. Точні розв'язки нелінійних РРДК. Знаходження нових операторів Q-умовної симетрії не гарантує побудову нових точних розв'язків рівняння, яке розглядається. Інколи розв'язки можуть виявитися типу плоскої хвилі, тобто їх можна побудувати за допомогою симетрій Лі [14, 15]. У цій роботі ми побудуємо нові точні розв'язки нелінійних РРДК та покажемо, що вони є неліївськими. Для зручності розглядатимемо рівняння для змінної $V(t,x)$, а потім виконаємо заміну (11) і повернемося до початкової змінної $U(t,x)$.

Розгляньмо випадок i). Рівняння (4) та відповідний оператор (5) після заміни (11) набувають вигляду (22) та (23) відповідно.

За відомою процедурою з допомогою оператора (23) отримуємо анзац

$$V = \begin{cases} \lambda_2^* t + \varphi(x), & \lambda_1^* = 0, \\ \varphi(x) e^{\lambda_1^* t} - \dfrac{\lambda_2^*}{\lambda_1^*}, & \lambda_1^* \neq 0, \end{cases} \tag{33}$$

де $\varphi(x)$ — нова невідома функція.

Підставляючи анзац (33) в рівняння (22), одержуємо звичайне диференціальне рівняння (ЗДР), розв'язавши яке, отримаємо розв'язок рівняння (22) при $\lambda_1^* = 0$:

$$V = \lambda_2^* t + c_1 + c_2 e^{-\lambda x} - \frac{\lambda_4^*}{\lambda} x.$$

Використовуючи заміну (11), знаходимо розв'язок

$$U = \left[\lambda_2 (m+1) t + c_1 + c_2 e^{-\lambda x} - \frac{\lambda_4 (m+1)}{\lambda} x\right]^{\frac{1}{m+1}}$$

рівняння

$$U_t = [U^m U_x]_x + \lambda U^m U_x + \lambda_2 U^{-m} + \lambda_4, \ m \neq -1, \ \lambda \neq 0,$$

при $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_4 = -\lambda_2 \lambda_3$.

Останнє рівняння має лише оператори зсуву ∂_t, ∂_x симетрії Лі, тому за допомогою цих операторів ми можемо отримати тільки розв'язки вигляду плоскої хвилі. Проаналізувавши отриманий нами розв'язок, приходимо до висновку, що лише при $c_2 = 0$ він є ліївським. Вимога $c_2 \neq 0$ дає неліївський розв'язок. Подібна ситуація має місце і для інших розв'язків, отриманих в цій роботі.

Провівши подібні міркування і для випадку $\lambda_1^* \neq 0$, отримаємо три типи розв'язків рівняння (4) в залежності від значення δ, $\delta = \lambda^2 + 4\lambda_1 \lambda_3 (m+1)$:

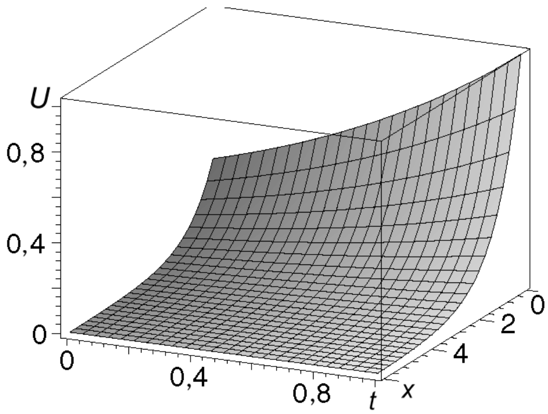

Рис. 1. Точний розв'язок (36).

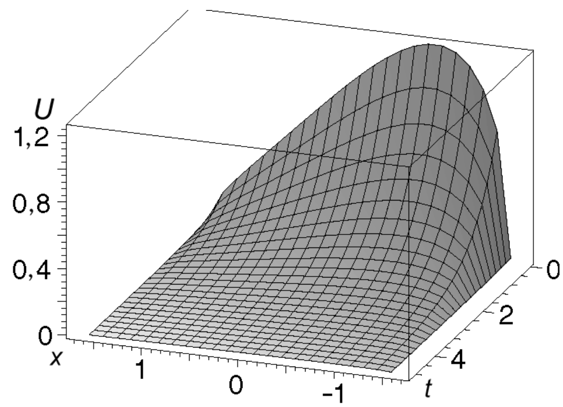

Рис. 2. Точний розв'язок (37).

$$U =$$

$$= \left[c_1 \exp\left(\frac{-\lambda + \sqrt{\delta}}{2}x + \lambda_1(m+1)t\right) + c_2 \exp\left(\frac{-\lambda - \sqrt{\delta}}{2}x + \lambda_1(m+1)t\right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right]^{\frac{1}{m+1}}, \ \delta > 0, \tag{34}$$

$$U = \left[c_1 \exp\left(-\frac{\lambda}{2}x + \lambda_1(m+1)t\right) + c_2 x \exp\left(-\frac{\lambda}{2}x + \lambda_1(m+1)t\right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right]^{\frac{1}{m+1}}, \ \delta = 0,$$

$$U = \left[\exp\left(-\frac{\lambda}{2}x + \lambda_1(m+1)t\right)\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{-\delta}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{-\delta}}{2}x\right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right]^{\frac{1}{m+1}}, \ \delta < 0. \tag{35}$$

На рис. 1 зображено розв'язок (див. (34) при $c_1 = 4, \ c_2 = -4, \ m = 1, \ \lambda = 3, \ \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 = 1$)

$$U = \sqrt{4\exp(-x-2t) - 4\exp(-2x-2t)} \tag{36}$$

узагальненого рівняння Маррі

$$U_t = [UU_x]_x + 3UU_x - U(1-U),$$

яке отримується з (4) як частковий випадок. На рис. 2 зображено розв'язок (див. (35) при $c_1 = 1, \ c_2 = 0, \ m = 1, \ \lambda = 2, \ \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 = 1$)

$$U = \sqrt{\exp(-x-2t)\cos x} \tag{37}$$

узагальненого рівняння Маррі

$$U_t = [UU_x]_x + 2UU_x - U(1-U),$$

яке отримується з (4) як частковий випадок.

Нагадаємо, що власне рівняння Маррі

$$U_t = U_{xx} + \lambda U U_x + \lambda_1 U(1 - U)$$

детально вивчалося в [3], а його точні розв'язки знайдено в [16].

Зауважимо, що розв'язки (36), (37) задовольняють нульові крайові умови відповідно для області $x \in [0, +\infty)$ та $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Розгляньмо випадок ii). Рівняння (6) та відповідний оператор (7) після заміни (11) набирають вигляду (31) та (32) відповідно.

Як і при розгляді випадку i), отримуємо такі два анзаци:

$$V = \begin{cases} \lambda_2 t + \varphi(x), \ \lambda_1 = 0, \\ \varphi(x) e^{\lambda_1 t} - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}, \ \lambda_1 \neq 0. \end{cases} \tag{38}$$

Оскільки структура анзаців (38) така сама, як і (33), то подальші викладки повністю аналогічні. У підсумку отримаємо розв'язок

$$U = \exp\left[\lambda_2 t + c_1 + c_2 e^{-\lambda x} - \frac{\lambda_4}{\lambda} x\right]$$

нелінійного РРДК

$$U_t = [U^{-1} U_x]_x + \lambda U^{-1} U_x + \lambda_2 U + \lambda_4, \ \lambda_4 = -\lambda_2 \lambda_3,$$

та три розв'язки:

$$U = \exp\left[c_1 \exp\left(\frac{-\lambda + \sqrt{\delta}}{2} x + \lambda_1 t\right) + c_2 \exp\left(\frac{-\lambda - \sqrt{\delta}}{2} x + \lambda_1 t\right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right], \tag{39}$$

$$U = \exp\left[c_1 \exp\left(-\frac{\lambda}{2} x + \lambda_1 t\right) + c_2 x \exp\left(-\frac{\lambda}{2} x + \lambda_1 t\right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right],$$

$$U = \exp\left[\exp\left(-\frac{\lambda}{2} x + \lambda_1 t\right)\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{-\delta}}{2} x + c_2 \sin\frac{\sqrt{-\delta}}{2} x\right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right] \tag{40}$$

рівняння (6) в залежності від знаку $\delta = \lambda^2 + 4\lambda_1\lambda_3$.

На рис. 3 зображено розв'язок (див. (40) при $c_1 = 1, \ c_2 = 1, \ \lambda = 1, \ \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1, \ \lambda_3 = 0$)

$$U = \exp\left[(1 - \exp(-x)) \exp t + 1\right] \tag{41}$$

рівняння швидкої дифузії з логарифмічною нелінійністю в реактивному члені

$$U_t = [U^{-1} U_x]_x + U^{-1} U_x + U(\ln U - 1),$$

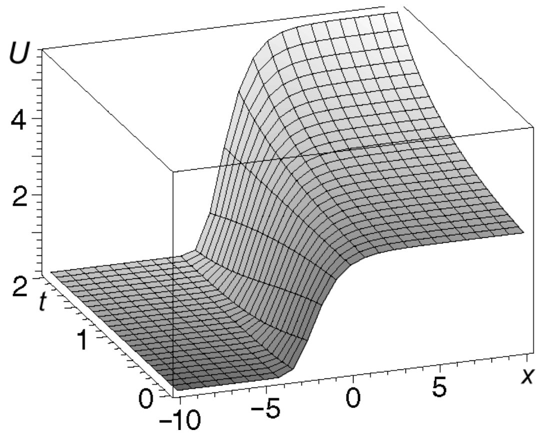

Рис. 3. Точний розв'язок (41).

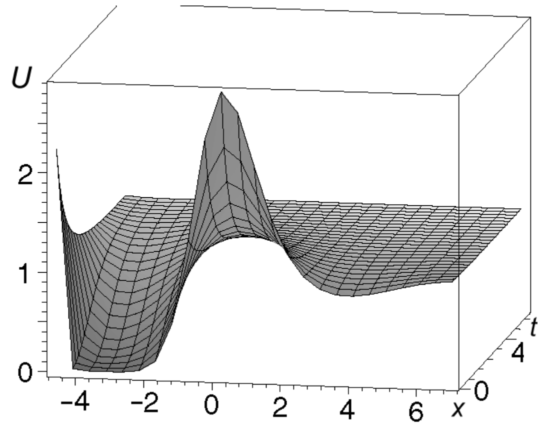

Рис. 4. Точний розв'язок (42).

яке є частковим випадком (6). На рис. 4 зображено розв'язок (див. (40) при $c_1 = 1,\ c_2 = 1,\ \lambda = 1,\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1$)

$$U = \exp\left[\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)\exp\left(-t - \frac{x}{2}\right)\right] \tag{42}$$

рівняння

$$U_t = [U^{-1}U_x]_x + U^{-1}U_x + \ln U(1-U),$$

яке є суттєво іншим випадком рівняння (6).

Розгляньмо випадок iii). Хоча система (10) містить п'ять нелінійних рівнянь з частинними похідними на три невідомі функції, ми покажемо, що вона є сумісною. Бачимо, що при $f = g = 0,\ \lambda_1 = 0$ система (10) зводиться до одного ЗДР

$$h_{xx} + \lambda h_x + \frac{\lambda_2}{2}h - h^2 = 0 \tag{43}$$

і тоді відповідний оператор

$$Q = \partial_t + 2h(x)U^{\frac{1}{2}}\partial_U \tag{44}$$

є оператором Q-умовної симетрії для будь-якого ненульового розв'язку рівняння (43). Також при $h = \dfrac{\lambda_2}{2}$ отримуємо частковий випадок і) при $m = -\dfrac{1}{2},\ \lambda_1 = 0$.

Рівняння (8) та відповідний оператор (9) після заміни (11) набирають вигляду (26) та (27) відповідно. Оскільки не знайдено загального розв'язку системи (10), то ми обмежимося побудовою анзацу, використовуючи оператор (44), записаний у вигляді (27), при $f = g = 0,\ \lambda_1^* = 0$. Як випливає з системи (10) $h = h(x)$, тому

$$Q = \partial_t + h(x)\partial_V, \tag{45}$$

а відповідне рівняння має вигляд

$$V_{xx} = VV_t - \lambda V_x + \lambda_2^* V + \lambda_3^*. \tag{46}$$

Для побудови анзацу за оператором (45) розв'яжемо рівняння

$$\frac{dt}{1} = \frac{dV}{h(x)},$$

з якого отримуємо анзац

$$V = h(x)t + \varphi(x). \tag{47}$$

Підставивши анзац (47) в рівняння (46), отримаємо

$$h_{xx}t + \varphi_{xx} = (ht + \varphi)h - \lambda(h_x t + \varphi_x) + \lambda_2^*(ht + \varphi) + \lambda_3^*.$$

Оскільки функції h та φ не залежать від t, то, розщепивши останнє рівняння по t, будемо мати

$$h_{xx} + \lambda h_x - h^2 - \lambda_2^* h = 0, \tag{48}$$

$$\varphi_{xx} + \lambda\varphi_x - h\varphi - \lambda_2^*\varphi - \lambda_3^* = 0. \tag{49}$$

На жаль, для нелінійного ЗДР (48), а відповідно, і для рівняння (49) не знайдено ні загального розв'язку, ні нетривіальних часткових розв'язків в явному вигляді (див. [17, 18]). Використавши заміну (11), отримаємо розв'язок

$$U = (h(x)t + \varphi(x))^2$$

рівняння

$$U_t = [U^{-\frac{1}{2}}U_x]_x + \lambda\, U^{-\frac{1}{2}}U_x + \lambda_2 U^{\frac{1}{2}} + \lambda_3,$$

де $\lambda_i = -2\lambda_i^*,\ i = 2, 3$, а функції h та φ є розв'язком системи нелінійних ЗДР

$$h_{xx} + \lambda h_x - h^2 + \frac{\lambda_2}{2}h = 0,$$

$$\varphi_{xx} + \lambda\varphi_x - h\varphi + \frac{\lambda_2}{2}\varphi + \frac{\lambda_3}{2} = 0.$$

Висновки. В цій роботі знайдено всеможливі Q-умовні оператори вигляду (3) для рівняння (1), а саме (5), (7) та (9). З допомогою цих операторів побудовано розв'язки рівняння (1), які є новими, і їх неможливо отримати за допомогою класичних симетрій Лі.

1. *Ames W. F.* Nonlinear partial differential equations in engineering. — New York: Acad. Press, 1972. — 495 p.

2. *Aris R.* The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts. **I, II**. — Oxford: Clarendon Press, 1975. — 692 p.

3. *Murray J. D.* Mathematical biology. — Berlin: Springer, 1989. — 750 p.

4. *Черніга Р. М.* Застосування одного конструктивного методу для побудови неліївських розв'язків нелінійних еволюційних рівнянь // Укр. мат. журн. — 1997. — **49**, № 9. — С. 814 – 827.

5. *Bluman G. W., Cole I. D.* The general similarity solution of the heat equation // J. Math. and Mech. — 1969. — **18**. — P. 1025 – 1042.

6. *Olver P., Rosenau P.* Group-invariant solutions of differential equations // SIAM J. Appl. Math. — 1987. — **47**. — P. 263 – 278.

7. *Серов Н. И.* Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения теплопроводности // Укр. мат. журн. — 1990. — **42**, № 10. — С. 1370 – 1376.

8. *Fushchych W. I., Shtelen W. M., Serov M. I., Popovych R. O.* Q-conditional symmetry of the linear heat equation // Доп. НАН України. — 1992. — № 12. — С. 28 – 33.

9. *Clarkson P. A., Mansfield E. L.* Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations // Physica D. — 1993. — **70**. — P. 250 – 288.

10. *Arrigo D. J., Hill J. M.* Nonclassical symmetry reductions of the linear diffusion equation with a nonlinear source // Stud. Appl. Math. — 1995. — **94**. — P. 21 – 39.

11. *Cherniha R. M., Serov M. I.* Symmetries, ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection term // Eur. J. Appl. Math. — 1998. — **9.** — P. 527 – 542.

12. *Cherniha R., Serov M.* Symmetries, ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection term. II // Ibid. — 2006. — **17**. — P. 597 – 605.

13. *Fushchych W., Shtelen W., Serov M.* Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. — 430 p.

14. *Cherniha R.* A constructive method for construction of new exact solutions of nonlinear evolution equations // Rept. Math. Phys. — 1996. — **38**. — P. 301 – 312.

15. *Cherniha R.* New non-Lie ansätze and exact solutions of nonlinear reaction-diffusion-convection equations // J. Phys. A: Math. and Gen. — 1998. — **31**. — P. 8179 – 8198.

16. *Cherniha R.* New Q-conditional symmetries and exact solutions of some reaction-diffusion-convection equations arising in mathematical biology // J. Math. Anal. and Appl. — 2007. — № 2. — P. 783 – 799.

17. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Физматгиз, 1961. — 703 с.

18. *Polyanin A. D., Zaitsev V. F.* Handbook of exact solutions for ordinary differential equations. — London: CRC Press Co., 2003. — 802 p.

Одержано 29.06.2006,
після доопрацювання — 27.04.2007