УДК 517.929

ПРО НАБЛИЖЕННЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ СИСТЕМАМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

О. В. Матвій, І. М. Черевко

Чернів. нац. ун-т
Україна, 58012, Чернівці, вул. М. Коцюбинського, 2
e-mail: cherevko@chnu.cv.ua

For a system of neutral type differential-difference equations we propose an approximation with a systems of ordinary differential equations. We prove that this procedure converges, and estimate the rate of convergence.

Построена схема аппроксимации системы дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследованы условия сходимости схемы аппроксимации.

Вступ. Наближення диференціальних рівнянь із запізненням системами звичайних диференціальних рівнянь вивчались у працях [1–4]. Такий підхід дозволяє використати методи дослідження звичайних диференціальних рівнянь для рівнянь із запізненням. Точність наближення на скінченному інтервалі досягається за рахунок підвищення розмірності апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь.

Відзначимо роботу [5], де розглянуто схему апроксимації диференціального рівняння нейтрального типу із використанням апроксимації Паде для функції e^x. При цьому точність апроксимації встановлено тільки у просторах достатньо гладких функцій.

У даній роботі будемо досліджувати схему апроксимації системи диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу за Хейлом у просторах неперервних та кусково-неперервних функцій.

1. Постановка задачі. Нехай n, p — деякі натуральні числа, a, T — задані дійсні числа, $a < T$. Розглядатимемо систему диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) - \sum_{i=1}^{p} A_i(t)x(t-\tau_i)\right] = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_p)), \tag{1}$$

$$t \in [a, T], \;\; p \geq 1,$$

де $x \in R^n, \tau_i, i = \overline{1,p},$ — запізнення, $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_p = \tau$; $A_i(t), i = \overline{1,p},$ — неперервні на $[a, T]$ $(n \times n)$-матричні функції; $f(t, u_0, \ldots, u_p)$ — неперервна вектор-функція, визначена для $t \in [a, T]$, $u_i \in R^n$, $i = \overline{0,p}$.

Будемо розглядати для $x \in R^n$ норму $||x|| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, а для $(n \times n)$-матриці A задамо норму $||A|| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, що узгоджена із векторною нормою.

Припустимо, що для системи (1) виконуються умови:

1) $\sum_{i=1}^{p} ||A_i(t)|| \le r < 1, t \in [a, T]$;

2) функція f задовольняє умову Ліпшиця

$$||f(t, u'_0, \dots, u'_p) - f(t, u''_0, \dots, u''_p)|| \le \sum_{i=0}^{p} L_i ||u'_i - u''_i||,$$

де $L_i > 0,\ u'_i,\ u''_i \in R^n,\ i = \overline{0, p}, ||f(t, u_0, \dots, u_p)|| = \max_t \sum_{j=1}^{n} |f_j(t, u_0, \dots, u_p)|$.

Нехай $\varphi(t)$ — задана на $[a-\tau, a]$ неперервна функція. Розв'язком початкової задачі для системи (1) будемо називати [6] неперервну на $[a-\tau, T]$ функцію $x(t)$, яка збігається з $\varphi(t)$ на $[a-\tau, a]$, задовольняє (1) на $[a, T]$ і різниця $x(t) - \sum_{i=1}^{p} A_i(t)x(t-\tau_i)$ є диференційовною.

2. Апроксимація елемента запізнення. Розглянемо m елементів запізнення, що породжені деякою вхідною функцією $x(t)$ і послідовно з'єднані між собою:

$$y_1(t) = x\left(t - \frac{\tau}{m}\right),\ y_2(t) = x\left(t - \frac{2\tau}{m}\right), \dots,\ y_m(t) = x(t-\tau),\ x \in R^n,\ t \in [a, T].$$

Поставимо їм у відповідність послідовність аперіодичних ланок, що описуються системою звичайних диференціальних рівнянь вигляду [2]

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_1(t)}{dt} + z_1(t) = x(t),\ \frac{\tau}{m}\frac{dz_i(t)}{dt} + z_i(t) = z_{i-1}(t),\ i = \overline{2, m},\ t \in [a, T], \tag{2}$$

$$z_i(a) = x\left(a - \frac{i\tau}{m}\right),\ i = \overline{1, m}, \tag{3}$$

де $x(t)$ — вхідна функція першого елемента запізнення. Будемо досліджувати відхилення між функціями $y_i(t)$ та $z_i(t), t \in [a, T], i = \overline{1, m}$, в залежності від гладкості функції $x(t)$.

Зазначимо, що систему (2), (3) досліджено в [2] у випадку, коли функція $x(t)$ скалярна і задовольняє умову Ліпшиця або має обмежену сталою M похідну на $[a-\tau, T]$. При цьому

$$|z_i(t) - y_i(t)| \le \frac{2M\tau}{\sqrt{m}},\ t \in [a, T],\ i = \overline{1, m}. \tag{4}$$

Випадок, коли $x(t) \in C[a-\tau, T]$, розглянуто в роботах [3, 4]. Там встановлено, що в цьому випадку справджуються нерівності

$$|z_i(t) - y_i(t)| \le 2\left(\frac{K\tau}{\sqrt{m}} + \omega\left(x, \frac{\tau}{m}\right)\right),\ t \in [a, T],\ i = \overline{1, m},$$

де стала $K > 0$ не залежить від m, а $\omega\left(x, \frac{\tau}{m}\right) = \max_{|t'-t''|<\frac{\tau}{m}, t', t'' \in [a-\tau, T]} |x(t') - x(t'')|$ — модуль неперервності функції $x(t)$ на $[a-\tau, T]$ [7].

Дослідимо точність апроксимації елементів запізнення у випадку, коли вхідна функція $x : [a-\tau, T] \to R^n$ в системі (2), (3) є неперервною та кусково-неперервною.

Нехай $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)), z_i(t) = (z_{i1}(t), \ldots, z_{in}(t)),\ i = \overline{1,m}$. Тоді система (2), (3) в координатній формі має вигляд

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1j}(t)}{dt} + z_{1j}(t) = x_j(t),$$

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ij}(t)}{dt} + z_{ij}(t) = z_{i-1,j}(t),\ i = \overline{2,m},\ j = \overline{1,n},\ t \in [a, T],$$

$$z_{ij}(a) = x_j\left(a - \frac{i\tau}{m}\right),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Розглянемо спочатку випадок, коли вхідна функція $x(t),\ t \in [a-\tau, T]$, є кусково-неперервною. Введемо згладжені функції

$$x_{hj}(t) = \frac{1}{2h}\int\limits_{t-h}^{t+h} x_j(s)ds,\ t \in [a-\tau, T],\ j = \overline{1,n}$$

(функції $x_j(t)$ продовжуємо нулем поза $[a-\tau, T]$). Відомо [7], що якщо $q \geq 1$ і $x(t) \in$ $\in L_q[a-\tau, T]$, то

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{a-\tau}^{T} |x_{hj}(t) - x_j(t)|^q dt = 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Позначимо

$$\alpha_j(h) = \int\limits_{a-\tau}^{T} |x_{hj}(t) - x_j(t)| dt, \quad j = \overline{1,n}.$$

Із співвідношень (5) випливає, що $\alpha_j(h) \to 0,\ j = \overline{1,n}$, при $h \to 0$.

Якщо в системі (2), (3) вважати, що $x_j(t) = x_j^{(1)}(t) + x_j^{(2)}(t)$, де $x_j^{(1)}(t) = x_{hj}(t), j = \overline{1,n}$, то внаслідок її лінійності розв'язок буде сумою функцій, які є розв'язками таких систем:

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1j}^{(1)}(t)}{dt} + z_{1j}^{(1)}(t) = x_j^{(1)}(t),$$

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ij}^{(1)}(t)}{dt} + z_{ij}^{(1)}(t) = z_{i-1,j}^{(1)}(t),\ i = \overline{2,m},\ j = \overline{1,n},\ t \in [a, T],$$

$$z_{ij}^{(1)}(a) = x_j\left(a - \frac{i\tau}{m}\right), \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n};$$

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1j}^{(2)}(t)}{dt}+z_{1j}^{(2)}(t)=x_j^{(2)}(t),$$

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ij}^{(2)}(t)}{dt}+z_{ij}^{(2)}(t)=z_{i-1,j}^{(2)}(t),\ i=\overline{2,m},\ j=\overline{1,n},\ t\in[a,T],$$

$$z_{ij}^{(2)}(a)=0,\quad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Таким чином, враховуючи зображення функції $x(t)$ у вигляді суми двох доданків, маємо

$$\int\limits_a^T|z_{ij}(t)-y_{ij}(t)|dt\le\int\limits_a^T|z_{ij}^{(1)}(t)+z_{ij}^{(2)}(t)-y_{ij}^{(1)}(t)-y_{ij}^{(2)}(t)|dt\le$$

$$\le\int\limits_a^T|z_{ij}^{(1)}(t)-y_{ij}^{(1)}(t)|dt+\int\limits_a^T|z_{ij}^{(2)}(t)|dt+\int\limits_a^T|y_{ij}^{(2)}(t)|dt,\tag{6}$$

$$i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Для оцінки величини $|z_{ij}^{(1)}(t)-y_{ij}^{(1)}(t)|$ можна застосувати нерівність (4), оскільки $x_j^{(1)}(t)$, $j=\overline{1,n}$, — неперервні функції. Для другого і третього доданків у правій частині нерівності (6), як і в праці [8], використовуючи співвідношення (5), легко отримати оцінки

$$\int\limits_a^T|z_{ij}^{(2)}(t)|dt\le\alpha_j(h)\quad\text{і}\quad\int\limits_a^T|y_{ij}^{(2)}(t)|dt\le\alpha_j(h),\quad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Отже, при $h=\dfrac{\tau}{m}$ маємо

$$\int\limits_a^T|z_{ij}(t)-y_{ij}(t)|dt\le 2(T-a)\left(\frac{K_j\tau}{\sqrt{m}}+\omega\left(x_j^{(1)},\frac{\tau}{m}\right)\right)+2\alpha_j\left(\frac{\tau}{m}\right),\tag{7}$$

$$i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Додаючи нерівності (7) та позначаючи

$$\overline{K}=\max_j K_j,\quad \overline{\omega}\left(\frac{\tau}{m}\right)=\max_j\omega\left(x_j^{(1)},\frac{\tau}{m}\right),\quad \alpha\left(\frac{\tau}{m}\right)=\max_j\alpha_j\left(\frac{\tau}{m}\right),$$

дістаємо

$$\sum_{j=1}^n\int\limits_a^T|z_{ij}(t)-y_{ij}(t)|dt\le 2n(T-a)\left(\frac{\overline{K}\tau}{\sqrt{m}}+\overline{\omega}\left(\frac{\tau}{m}\right)+\alpha\left(\frac{\tau}{m}\right)\right),\ i=\overline{1,m}.$$

Зазначимо, що оскільки функції $x_j^{(1)}(t)$, $j = \overline{1,n}$, $t \in [a-\tau, T]$ є неперервними, то згідно з теоремою Кантора [7] $\lim_{m\to\infty} \varpi\left(\frac{\tau}{m}\right) = 0.$ із останньої нерівності одержуємо оцінки апроксимації елемента запізнення для кусково-неперервної вхідної функції.

Якщо ж вхідна функція $x : [a-\tau, T] \to R^n$ є неперервною, то аналогічно можна дістати оцінку

$$\sum_{j=1}^{n} |z_{ij}(t) - y_{ij}(t)| \le 2n\left(\frac{\overline{K}\tau}{\sqrt{m}} + \varpi\left(\frac{\tau}{m}\right)\right), \ i = \overline{1,m}, \quad t \in [a,T].$$

Підсумуємо наведені вище міркування про апроксимацію елементів запізнення у вигляді такого твердження.

Теорема 1. *Нехай вхідна функція $x(t), t \in [a-\tau, T]$, в системі (2) є кусково-неперервною. Тоді для розв'язків задачі Коші (2), (3) справджуються нерівності*

$$\int_a^T \sum_{j=1}^{n} |z_{ij}(t) - y_{ij}(t)| dt \le 2n(T-a)\left(\frac{\overline{K}\tau}{\sqrt{m}} + \varpi\left(\frac{\tau}{m}\right) + \alpha\left(\frac{\tau}{m}\right)\right), \quad i = \overline{1,m}.$$

Якщо ж вхідна функція $x(t), t \in [a-\tau, T]$, є неперервною, то

$$||z_i(t) - y_i(t)|| \le 2n\left(\frac{\overline{K}\tau}{\sqrt{m}} + \varpi\left(\frac{\tau}{m}\right)\right), \quad i = \overline{1,m}, \ t \in [a,T].$$

3. Схема апроксимації системи нейтрального типу. При виконанні припущень 1, 2 розв'язок системи (1) з неперервною на $[a-\tau, a]$ початковою функцією $\varphi(t)$ існує і єдиний [6], однак його знаходження в аналітичному вигляді можливе лише у найпростіших випадках, а для наближеного знаходження немає ефективних алгоритмів. Розглянемо схему знаходження його наближень за допомогою розв'язків задачі Коші для послідовності систем звичайних диференціальних рівнянь.

Нехай $m \in N$. Визначимо функції $z_j(t)$, $j = \overline{0,m}$, як розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[z_0(t) - \sum_{i=1}^{p} A_i(t) z_{l_i}(t)\right] = f(t, z_0(t), z_{l_1}(t), \ldots, z_{l_p}(t)), \\ &\frac{dz_j(t)}{dt} = \frac{m}{\tau}(z_{j-1}(t) - z_j(t)), \quad j = \overline{1,m}, \ t \in [a,T], \end{aligned} \tag{8}$$

з початковими умовами

$$z_j(a) = \varphi\left(a - \frac{\tau j}{m}\right), \quad j = \overline{0,m}, \tag{9}$$

де індекси l_j однозначно визначаються нерівностями

$$\frac{\tau l_j}{m} \le \tau_j < \frac{\tau}{m}(l_j + 1).$$

Будемо говорити, що система звичайних диференціальних рівнянь (8) апроксимує систему рівнянь нейтрального типу (1), якщо виконуються співвідношення

$$\left\| x\left(t - \frac{\tau j}{m}\right) - z_j(t) \right\| \to 0, \quad j = \overline{0, m},\ t \in [a, T], \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

де $|| \cdot ||$ — норма у просторі R^n.

Розглянемо питання про близькість розв'язків початкової задачі для системи нейтрального типу (1) та розв'язків задачі Коші (8), (9).

Нехай

$$N_j(t) = \max_{a \le s \le t} \sum_{i=1}^{n} \left| x_i\left(s - \frac{\tau j}{m}\right) - z_{ji}(s) \right|, \quad j = \overline{0, m}.$$

Подамо $z_{ij}(t)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, у вигляді суми $z_{ij}^{(1)}(t) + z_{ij}^{(2)(t)}$, де $z_{ij}^{(1)}(t)$ і $z_{ij}^{(2)}(t)$ є розв'язками таких задач Коші:

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1j}^{(1)}(t)}{dt} + z_{1j}^{(1)}(t) = x_j(t),$$

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ij}^{(1)}(t)}{dt} + z_{ij}^{(1)}(t) = z_{i-1,j}^{(1)}(t), \quad i = \overline{2, m},\ j = \overline{1, n},$$

$$z_{ij}^{(1)}(a) = x_j\left(a - \frac{i\tau}{m}\right), \quad i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n};$$

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1j}^{(2)}(t)}{dt} + z_{1j}^{(2)}(t) = z_{i0}(t) - x_j(t),$$

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ij}^{(2)}(t)}{dt} + z_{ij}^{(2)}(t) = z_{i-1,j}^{(2)}(t), \quad i = \overline{2, m}, j = \overline{1, n},$$

$$z_{ij}^{(2)}(a) = 0, \quad i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}.$$

Тоді, як і в [3, 9], можна показати, що виконуються нерівності

$$N_j(t) \le \beta\left(\frac{\tau}{m}\right) + N_0(t), \quad j = \overline{1, m}, \tag{10}$$

де $\beta\left(\frac{\tau}{m}\right) = nK\omega\left(\frac{\tau}{m}\right), \quad \omega\left(\frac{\tau}{m}\right) = \max\limits_{j}\omega\left(x_j, \frac{\tau}{m}\right), \quad K > 0.$

Для оцінки різниці $||x(t) - z_0(t)||$ запишемо рівняння (1) та (8) у еквівалентній інтегральній формі

$$\left[x(t) - \sum_{i=1}^{p} A_i(t)x(t-\tau_i)\right] - \left[x(a) - \sum_{i=1}^{p} A_i(a)x(a-\tau_i)\right] =$$

$$= \int\limits_a^t f(s, x(s), x(s-\tau_1), \ldots, x(s-\tau_p))ds, \;\; t \in [a, T],$$

$$\left[z_0(t) - \sum_{i=1}^{p} A_i(t)z_{l_i}(t)\right] - \left[z_0(a) - \sum_{i=1}^{p} A_i(a)z_{l_i}(a)\right] =$$

$$= \int\limits_a^t f(s, z_0(s), z_{l_1}(s), \ldots, z_{l_p}(s))ds, \;\; t \in [a, T].$$

Враховуючи властивість 2, нерівність (10) та теорему 1, для $t \in [a, T]$ маємо

$$||x(t) - z_0(t)|| \le \sum_{i=1}^{p} ||A_i(t)||||x(t-\tau_i) - z_{l_i}(t)||+$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} ||A_i(a)|| \left\| x(a-\tau_i) - \varphi\left(a - \frac{l_i\tau}{m}\right)\right\| +$$

$$+ \int\limits_a^t ||f(s, x(s), x(s-\tau_1), \ldots, x(s-\tau_p)) - f(s, z_0(s), z_{l_1}(s), \ldots, z_{l_p}(s))||ds \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{p} ||A_i(t)|| \left(N_0(t) + \beta\left(\frac{\tau}{m}\right) + n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right)\right) + \sum_{i=1}^{p} ||A_i(a)||n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right) +$$

$$+ \int\limits_a^t \left[L_0N_0(s) + \sum_{i=1}^{p}\left(L_iN_0(s) + \beta\left(\frac{\tau}{m}\right) + n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right)\right)\right] ds \le$$

$$\le N_0(t)r + \left(\beta\left(\frac{\tau}{m}\right) + 2n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right)\right) r + p(T-a)\left(\beta\left(\frac{\tau}{m}\right) + n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right)\right) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{p} L_i \int\limits_a^t N_0(s)ds.$$

На підставі властивості 1 отримуємо

$$N_0(t) \le \beta^* \left(\frac{\tau}{m}\right) + L^* \int_a^t N_0(s)ds,$$

де

$$\beta^* \left(\frac{\tau}{m}\right) = \frac{1}{1-r} \left(\left(\beta\left(\frac{\tau}{m}\right) + 2n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right) \right) r + p(T-a) \left(\beta\left(\frac{\tau}{m}\right) + n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right) \right) \right),$$

$$L^* = \frac{1}{1-r} \sum_{i=0}^{p} L_i.$$

Застосовуючи нерівність Гронуолла, одержуємо

$$N_0(t) \le \beta^* \left(\frac{\tau}{m}\right) e^{L^*}, \; t \in [a, T],$$

де $\lim\limits_{m\to\infty} \beta^* \left(\frac{\tau}{m}\right) = 0.$

Звідси дістаємо наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай для системи (1) справджуються умови 1, 2. Тоді розв'язок задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (8), (9) апроксимує розв'язок початкової задачі для системи диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу (1) при* $m \to \infty$ *і* $t \in [a, T]$.

1. *Красовский Н. Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регулятора в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. — 1964. — **28**, № 4. — С. 716 – 725.
2. *Репин Ю. М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями // Там же. — 1965. — **29**, № 2. — С. 226 – 245.
3. *Піддубна Л. А., Черевко І. М.* Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 1999. — № 1. — С. 42 – 50.
4. *Матвій О. В., Черевко І. М.* Апроксимація систем диференціально- різницевих та різницевих рівнянь з багатьма запізненнями // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Математика. — 2002. — Вип. 150. — С. 50 – 54.
5. *Оболенский А. Ю., Чернецкая Л. Н.* Об одном способе исследования функционально-дифференциальных моделей в задачах электродинамики // Электрон. моделирование. — 1993. — **15**, № 4. — С. 8 – 13.
6. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.
7. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
8. *Черевко І. М.* Про наближену заміну різницевих і диференціально-різницевих рівнянь звичайними диференціальними рівняннями // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Математика. — 2002. — Вип. 134. — С. 107 – 111.
9. *Матвій О. В., Черевко І. М.* Апроксимація крайових задач для диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями // Там же. — 2001. — Вип. 111. — С. 85 – 89.

Одержано 23.03.2007