УДК 517.9

ВИРОДЖЕНІ НЕТЕРОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ*

О. А. Бойчук

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3
e-mail: boichuk@imath.kiev.ua

Л. М. Шегда

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64

We obtain a criterion for existence of solutions of degenerate nonhomogeneous Noetherian boundary-value problems for a system of ordinary differential equations in the assumption that the degenerate system of differential equations can be reduced to the central canonical form. The results are illustrated with examples.

Получен критерий существования решений вырожденных неоднородных нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в предположении, что вырожденная система дифференциальных уравнений приводится к центральной канонической форме. Результаты проиллюстрированы на примерах.

1. Постановка задачі. Розглядається задача про знаходження умов існування розв'язку $x(t) \in C^1[a;b]$ виродженої лінійної неоднорідної крайової задачі

$$B(t)\,\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + f(t), \qquad t \in [a;b], \tag{1}$$

$$l\,x(\cdot) = \alpha, \qquad \alpha \in R^m, \tag{2}$$

де $A(t)$, $B(t)$ — $(n \times n)$-вимірні матриці, компоненти яких є дійсними неперервними на $[a;b]$ функціями: $A(t), B(t) \in C[a;b]$; $\det B(t) = 0$; $f(t)$ — n-вимірний вектор-стовпець із простору $C[a;b]$; α — m-вимірний вектор-стовпець констант; l — лінійний векторний функціонал, визначений на просторі n-вимірних неперервних на $[a;b]$ вектор-функцій: $l = \mathrm{col}\,(l_1, ..., l_m) : C[a;b] \to R^m$, $l_i : C[a;b] \to R$ [1].

Будемо вважати систему (1) такою, що невиродженим лінійним перетворенням зводиться до центральної канонічної форми [2].

Водночас з неоднорідною крайовою задачею (1), (2) розглянемо однорідну крайову задачу

$$B(t)\,\frac{dx}{dt} = A(t)\,x, \tag{3}$$

$$l\,x(\cdot) = 0. \tag{4}$$

* Частково підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України, № 14.1/007.

Згідно з [3, с. 62; 4] загальний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь (1) має вигляд

$$x\,(t,\ c) = X_{n-s}\,(t)\ c + \tilde{x}\,(t) \qquad \forall\, c \in R^{n-s}, \tag{5}$$

де $X_{n-s}\,(t)$ — фундаментальна матриця розміру $n\ \times\ (n-s)$, складена з $n-s$ лінійно незалежних розв'язків відповідної однорідної системи (3); c — $(n-s)$-вимірний вектор довільних дійсних сталих; $\tilde{x}\,(t)$ — деякий частинний розв'язок неоднорідної диференціальної системи (1), який можна знайти за формулою [3, с. 64]

$$\tilde{x}\,(t) = \int\limits_a^t X_{n-s}\,(t)\,Y^*_{n-s}\,(\tau)\,f\,(\tau)\,d\tau - \Phi\,(t)\sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{I}^k\frac{d^k}{dt^k}\left[\Psi^*\,(t)\,L\Phi\,(t)\right]^{-1}\Psi^*\,(t)\,f\,(t)\,,$$

в якій $Y_{n-s}\,(t)$ — фундаментальна матриця розміру $n \times (n-s)$, складена з $n-s$ лінійно незалежних розв'язків спряженої до (3) системи:

$$\frac{d}{dt}B^*(t)y = -A^*(t)y, \quad t \in [a;b];$$

$L\,(t) = A\,(t) - B\,(t)\,\dfrac{d}{dt}$ — оператор, що діє в унітарному просторі n-вимірних вектор-функцій класу $C^1\,[a;b]$; $\operatorname{rank} B(t) = n - r = \mathrm{const} \quad \forall t \in [a;b]$; матриця $B\,(t)$ має на відрізку $[a;b]$ повний жорданів набір векторів відносно оператора $L\,(t)$, який складається з r ланцюжків завдовжки $s_i,\ i = \overline{1,r}$; $q = \max s_i$; $\Phi\,(t)\,, \Psi\,(t)$ – $(n\ \times\ s)$-матриці, складені з векторів, які утворюють жорданові набори матриці $B\,(t)$ відносно оператора $L\,(t)$ і матриці $B^*\,(t)$ відносно оператора $L^*\,(t)$ $\left(L^*\,(t) = A^*\,(t) + \dfrac{d}{dt}B^*\,(t)\right)$:

$$\Phi\,(t) = \left[\varphi_1^{(1)}\,(t)\,, ..., \varphi_1^{(s_1)}\,(t)\,; \varphi_2^{(1)}\,(t)\,, ..., \varphi_2^{(s_2)}\,(t)\,; ...; \varphi_r^{(1)}\,(t)\,, ..., \varphi_r^{(s_r)}\,(t)\right],$$

$$\Psi\,(t) = \left[\psi_1^{(s_1)}\,(t)\,, ..., \psi_1^{(1)}\,(t)\,; \psi_2^{(s_2)}\,(t)\ , ...,\ \psi_2^{(1)}\,(t)\,; ...; \psi_r^{(s_r)}\,(t)\,, ..., \psi_r^{(1)}\,(t)\right].$$

2. Основний результат. Для того щоб загальний розв'язок (5) диференціальної системи (1) задовольняв крайову умову (2), необхідно і достатньо, щоб була розв'язною алгебраїчна відносно $c\ \in\ R^{n-s}$ система з $(m \times (n-s))$-вимірною матрицею $Q\ := l\,X_{n-s}\,(\cdot)$:

$$Qc = \alpha - l\,\tilde{x}\,(\cdot)\,, \tag{6}$$

де

$$l\tilde{x}(\cdot) = l\left(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y^*_{n-s}(\tau)f(\tau)d\tau - \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1}I^k\frac{d^k}{dt^k}[\Psi^*(t)L\Phi(t)]^{-1}\right](\cdot)\,\Psi^*(\cdot)f(\cdot)\right).$$

Визначимо умови, при яких система (6), а отже і крайова задача (1), (2), є розв'язною. Нехай $\operatorname{rank} Q = n_1\ \leq\ \min\ (m,\ n-s)$. Система (6), згідно з [1, с. 91], є розв'язною тоді і тільки тоді, коли її вільний член $[\alpha - l\,\tilde{x}]$ належить ортогональному доповненню $N^{\perp}(Q^*) = R(Q)$ підпростору $N(Q^*)$, тобто коли

$$P_{Q^*}\left[\alpha - l\tilde{x}\right] = 0,$$

де P_{Q^*} – $(m \times m)$-вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір R^m на нуль-простір $N\left(Q^*\right)$ матриці Q^*:

$$P_{Q^*} : R^m \longrightarrow N\left(Q^*\right), \quad N\left(Q^*\right) = P_{Q^*} R^m.$$

Оскільки $\operatorname{rank} P_{Q^*} = m - n_1 = d$, то матрицю P_{Q^*} можна замінити $(d \times m)$-вимірною матрицею $P_{Q^*_d}$, яка складається з d лінійно незалежних рядків матриці P_{Q^*}. Отже, необхідною і достатньою умовою розв'язності системи (6) є d лінійно незалежних умов

$$P_{Q^*_d}\left[\alpha - l\tilde{x}\right] = 0.$$

Якщо ця умова виконується, то розв'язок системи (6) має вигляд

$$c = Q^+(\alpha - l\tilde{x}) + P_{Q_{r_1}} c_{r_1} \quad \forall\, c_{r_1} \in R^{r_1}, \quad r_1 = (n - s) - n_1,$$

де Q^+ — єдина псевдообернена за Муром – Пенроузом до Q матриця [1], P_Q – $((n-s) \times (n-s))$-вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір R^{n-s} на нуль-простір $N\left(Q\right)$ матриці Q:

$$P_Q : R^{n-s} \longrightarrow N\left(Q\right), \quad N\left(Q\right) = P_Q R^{n-s}.$$

Оскільки $\operatorname{rank} P_Q = r_1$, то матрицю P_Q можна замінити $((n-s) \times r_1)$-вимірною матрицею $P_{Q_{r_1}}$, яка складається з r_1 лінійно незалежних стовпців матриці P_Q. Підставимо знайдену константу в (5) та отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (1), (2) у вигляді

$$x\left(t,\ c_{r_1}\right) = X_{n-s}\left(t\right) P_{Q_{r_1}} c_{r_1} + \left(Gf\right)\left(t\right) + X_{n-s}\left(t\right) Q^+ \alpha \quad \forall\, c_{r_1} \in R^{r_1},$$

де $\left(Gf\right)\left(t\right)$ — узагальнений оператор Гріна виродженої крайової задачі (1), (2), який діє на довільну вектор-функцію $f\left(t\right)$ з $C\ \ [a,\ b]$ таким чином:

$$(Gf)(t) = -X_{n-s}(t) Q^+ l \left(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot) Y^*_{n-s}(\tau) f(\tau) d\tau - \right.$$

$$\left. - \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\left[\Psi^*(\cdot) L \Phi(\cdot)\right]^{-1}\right](\cdot)\Psi^* n(\cdot) f(\cdot) \right) + \int\limits_a^t X_{n-s}(t) Y^*_{n-s}(\tau) f(\tau) d\tau -$$

$$- \Phi(t) \sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\left[\Psi^*(t) L \Phi(t)\right]^{-1} \Psi^*(t) f(t). \tag{7}$$

Отже, доведено наступне твердження.

Теорема 1. *Крайова задача (1), (2) для виродженої лінійної системи (1) розв'язна тоді і тільки тоді, коли неоднорідності $f(t) \in C[a, b]$ в диференціальній системі та $\alpha \in \in R^m$ у крайовій умові задовольняють d лінійно незалежних умов*

$$P_{Q_d^*}\left(\alpha - l\left(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)f(\tau)d\tau - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \; \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\left[\Psi^*(t)L\Phi(t)\right]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)f(\cdot)\right)\right) = 0, \quad d = m - n_1, \tag{8}$$

при цьому задача (1), (2) має r_1-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$x(t, c_{r_1}) = X_{n-s}(t)P_{Q_{r_1}}c_{r_1} + (Gf)(t) + X_{n-s}(t)Q^+\alpha \quad \forall\, c_{r_1} \in R^{r_1}, \tag{9}$$

де $(Gf)(t)$ — узагальнений оператор Гріна, який діє на довільну вектор-функцію $f(t)$ з $C[a, b]$ згідно з (7).

Якщо $B(t) \equiv E$, то маємо невироджену нетерову крайову задачу для систем звичайних диференціальних рівнянь [1, с. 169; 5].

3. Наслідок. Як ілюстрацію до доведеної теореми розглянемо наступну задачу. Знайдемо умову на $\alpha \in R^m$, при якій крайова задача (1), (2) буде розв'язною при довільних неоднорідностях $f(t) \in C[a, b]$. Цей підхід можна розглядати як задачу керування за допомогою вектора-констант α, при якому нерозв'язну крайову задачу (1), (2) можна зробити завжди розв'язною. Використаємо необхідну і достатню умову (6) розв'язності системи (6) доведеної теореми 1:

$$P_{Q_d^*}[\alpha - l\tilde{x}] = 0.$$

Відповідно до доведеної теореми з умови (8) маємо алгебраїчну відносно α систему з $(d \times \times m)$-вимірною матрицею $P_{Q_d^*} := D$:

$$D\alpha = Dl\tilde{x}. \tag{10}$$

Система (10) згідно з [1, с. 91] є розв'язною тоді і тільки тоді, коли

$$P_{D^*}Dl\tilde{x} = 0. \tag{11}$$

Ця умова виконується завжди, оскільки за визначенням ортопроектора маємо $P_{D^*}D = = [P_{D^*}]^*D = [D^*P_{D^*}]^* = 0$.

Отже, система (10) завжди має розв'язок у вигляді

$$\alpha = D^+Dl\tilde{x} + P_{D_{r_2}}c_{r_2} \qquad \forall\, c_{r_2} \in R^{r_2},$$

де D^+ — єдина псевдообернена за Муром – Пенроузом до D матриця, P_D — $(m \times m)$-вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір R^m на нуль-простір $N(D)$ матриці D:

$$P_D : R^m \longrightarrow N(D), \quad N(D) = P_DR^m.$$

Оскільки $\operatorname{rank} P_D = r_2$, то матрицю P_D можна замінити $(m \times r_2)$-вимірною матрицею $P_{D_{r_2}}$, яка складається з r_2 лінійно незалежних стовпців матриці P_D.

Теорема 2. *Задача (1), (2) буде розв'язною при довільних неоднорідностях* $f(t) \in C[a,b]$ *тоді і тільки тоді, коли неоднорідність в крайовій умові (2) має вигляд*

$$\alpha = D^+ Dl \left(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot) Y_{n-s}^*(\tau) f(\tau) d\tau - \right.$$

$$\left. -\Phi(\cdot) \left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k} \left[\Psi^*(t) L \Phi(t) \right]^{-1} \right] (\cdot) \Psi^*(\cdot) f(\cdot) \right) + P_{D_{r_2}} c_{r_2} \qquad \forall\, c_{r_2} \in R^{r_2}.$$

Зауважимо, що не скрізь розв'язну вироджену нетерову крайову задачу можна зробити розв'язною і за допомогою збурень, як в диференціальній системі, так і в крайовій умові [6].

4. Приклад. Покажемо застосування теореми 1 на прикладі крайової задачі

$$\begin{pmatrix} \sin 2t - 1 & \cos 2t \\ -\cos 2t & \sin 2t + 1 \end{pmatrix} \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + f(t), \tag{12}$$

$$lx(\cdot) = x(0) - x(2\pi) = \alpha \in R^2. \tag{13}$$

Дослідимо однорідну крайову задачу (12):

$$\begin{pmatrix} \sin 2t - 1 & \cos 2t \\ -\cos 2t & \sin 2t + 1 \end{pmatrix} \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x, \tag{14}$$

$$lx(\cdot) = x(0) - x(2\pi) = 0. \tag{15}$$

Фундаментальна матриця системи (14) має вигляд [3, с. 72]:

$$X_{n-s}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Матриця Q, ортопроектори P_Q, P_{Q^*} на ядро та коядро матриці Q і псевдообернена матриця Q^+ мають вигляд

$$Q = \begin{pmatrix} 1 - e^{-2\pi} \\ -1 + e^{-2\pi} \end{pmatrix}, \qquad Q^+ = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2(1-e^{-2\pi})} & -\dfrac{1}{2(1-e^{-2\pi})} \end{pmatrix},$$

$$P_{Q^*} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_Q = 0.$$

Використовуючи формулу [3, с. 64] (в даному випадку $n = 2,\, r = 1,\, s = 1,\, q = 1$), частинний розв'язок виродженої системи рівнянь (12) записуємо у вигляді [3, с. 72]

$$\tilde{x}\,(t) = X_1\,(t)\int\limits_0^t Y_1^*\,(\tau)\,f\,(\tau)\,d\tau - \Phi\,(t)\,[\Psi^*\,(t)\,L\,(t)\,\Phi\,(t)]^{-1}\Psi^*\,(t)\,f\,(t)\,,$$

де

$$X_1(t) = X_{n-s}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} e^{-t},$$

$Y_1\,(t) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} e^{-t}$, — фундаментальна матриця спряженої до (14) системи

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \sin 2t - 1 & -\cos 2t \\ \cos 2t & \sin 2t + 1 \end{pmatrix} y = -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} y,$$

$$\Phi\,(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}, \qquad \Psi\,(t) = \begin{pmatrix} \sin t + \cos t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix},$$

$$Y_1^*\,(t)\,f\,(t) = \frac{1}{2}\quad e^t \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \end{pmatrix} f\,(t)\,,$$

$$\int\limits_0^t Y_1^*\,(\tau)\,f\,(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_0^t e^\tau \begin{pmatrix} \sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix} f\,(\tau)\,d\tau,$$

$$X_1\,(t)\int\limits_0^t Y_1^*(\tau)f(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\,e^{-t}\begin{pmatrix} (\cos t - \sin t)\displaystyle\int\limits_0^t e^\tau \begin{pmatrix} \sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix} f\,(\tau)\,d\tau \\ -(\cos t + \sin t)\displaystyle\int\limits_0^t e^\tau \begin{pmatrix} \sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix} f\,(\tau)\,d\tau \end{pmatrix},$$

$$L\,(t)\,\Phi\,(t) = A\,(t)\,\Phi\,(t) - B\,(t)\,\Phi'\,(t) = 4\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

$$\Psi^*\,(t)\,L\,(t)\,\Phi\,(t) = 4,$$

$$\Phi(t)\,[\Psi^*(t)\,L(t)\,\Phi(t)]^{-1}\Psi^*(t)\,f(t) = \frac{1}{4}\,\Phi(t)\,\Psi^*(t)\,f(t) =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+\sin 2t & -\cos 2t \\ \cos 2t & \sin 2t - 1 \end{pmatrix} f(t)\,.$$

Отже,

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\begin{pmatrix} (\cos t - \sin t)\displaystyle\int_0^t e^{\tau}\begin{pmatrix} \sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix} f(\tau)\,d\tau \\ -(\cos t + \sin t)\displaystyle\int_0^t e^{\tau}\begin{pmatrix} \sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix} f(\tau)\,d\tau \end{pmatrix} -$$

$$- \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+\sin 2t & -\cos 2t \\ \cos 2t & \sin 2t - 1 \end{pmatrix} f(t)\,,$$

$$l\tilde{x}(\cdot) = \tilde{x}(0) - \tilde{x}(2\pi) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} f(0) -$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2\pi}\begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\tau}\begin{pmatrix} \sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix} f(\tau)\,d\tau \\ -\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\tau}\begin{pmatrix} \sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix} f(\tau)\,d\tau \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} f(2\pi),$$

$$(Gf)(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2(1-e^{-2\pi})} & -\dfrac{1}{2(1-e^{-2\pi})} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} f(0) + \frac{1}{2}e^{-2\pi}\begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\tau}\begin{pmatrix} \sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix} f(\tau)\,d\tau \\ -\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\tau}\begin{pmatrix} \sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix} f(\tau)\,d\tau \end{pmatrix} - \right.$$

$$
\left. - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} f(2\pi) \right) +
$$

$$
+ \frac{1}{2} e^{-t} \begin{pmatrix} (\cos t - \sin t) \int\limits_0^t e^{\tau} \begin{pmatrix} \sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix} f(\tau)\, d\tau \\ -(\cos t + \sin t) \int\limits_0^t e^{\tau} \begin{pmatrix} \sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix} f(\tau)\, d\tau \end{pmatrix} -
$$

$$
- \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+\sin 2t & -\cos 2t \\ \cos 2t & \sin 2t - 1 \end{pmatrix} f(t),
$$

$$
X_{n-s}(t)\, Q^{+}\alpha = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2(1-e^{-2\pi})} & -\frac{1}{2(1-e^{-2\pi})} \end{pmatrix} \alpha,
$$

$P_{Q_{r_1}} = 0$, оскільки $P_Q = 0$; $P_{Q_d^*} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, оскільки $P_{Q^*} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

При виконанні умови (8), яка в даному випадку має вигляд

$$
\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \left(\alpha + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} f(0) - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} f(2\pi) \right) = 0, \tag{16}
$$

крайова задача (12), (13) має єдиний розв'язок

$$
x(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2(1-e^{-2\pi})} & -\frac{1}{2(1-e^{-2\pi})} \end{pmatrix} \times
$$

$$
\times \left\{ \alpha + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} f(0) + \frac{1}{2} e^{-2\pi} \begin{pmatrix} \int\limits_0^{2\pi} e^{\tau} \begin{pmatrix} \sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix} f(\tau)\, d\tau \\ -\int\limits_0^{2\pi} e^{\tau} \begin{pmatrix} \sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix} f(\tau)\, d\tau \end{pmatrix} - \right.
$$

$$\left. - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} f(2\pi) \quad \right\} +$$

$$+\frac{1}{2}e^{-t}\begin{pmatrix} (\cos t - \sin t)\int\limits_0^t e^{\tau}\begin{pmatrix} \sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix} f(\tau)\,d\tau \\ -(\cos t + \sin t)\int\limits_0^t e^{\tau}\begin{pmatrix} \sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix} f(\tau)\,d\tau \end{pmatrix} -$$

$$-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+\sin 2t & -\cos 2t \\ \cos 2t & \sin 2t - 1 \end{pmatrix} f(t).$$

Проілюструємо теорему 2, тобто знайдемо чому повинно дорівнювати α, щоб крайова задача (12), (13) була розв'язною при довільних неоднорідностях $f(t) \in C[a;b]$.

Позначимо $P_{Q_d^*} = D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, тоді $\quad D^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$P_{D^*} = 0, \quad P_D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{D_{r_2}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, крайова задача (12), (13) буде розв'язною при довільних неоднорідностях $f(t) \in \in C[a;b]$, якщо

$$\alpha = D^+ Dl\tilde{x}(\cdot) + P_{D_{r_2}} c_{r_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\bar{c} +$$

$$+\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\left(-\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} f(0) + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} f(2\pi)\right) \quad \forall\, \bar{c} \in R.$$

Для всіх періодичних функціій $f(0) = f(2\pi) = f(T)$ при довільних неоднорідностях $f(t) \in C[a;b]$ та $\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\bar{c}$ для будь-якого $\bar{c} \in R$ крайова задача (12), (13) завжди має розв'язок.

Наприклад, якщо, як в [3, с. 59], $f(t) = 4\sqrt{2}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, $\quad \alpha = 0$, то умова (16) виконується і

$$x(t) = (Gf)(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{2\sqrt{2}}{5}(\sin t - \cos t)(\cos 2t + 2\sin 2t) - \sqrt{2}(\sin 2t - \cos 2t)(\sin t + \cos t) \\ \dfrac{2\sqrt{2}}{5}(\cos t + \sin t)(\cos 2t + 2\sin 2t) - \sqrt{2}(\sin 2t - \cos 2t)(\cos t - \sin t) \end{pmatrix}.$$

Одержавний розв'язок збігається з розв'язком, знайденим за допомогою матриці монодромії в [3, с. 78].

1. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.
2. *Campbell S. L., Petzold L. R.* Canonical forms and solvable singular systems of differential equations // SIAM J. Alg. Discrete Methods. — 1983. — № 4. — P. 517 – 521.
3. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
4. *Чистяков В. Ф.* О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах // Функции Ляпунова и их применения. — Новосибирск: Наука, 1986. — С. 231 – 240.
5. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 317 p.
6. *Karandzhulov L.* Critical case for singularly perturbed linear boundary-value problems of ordinary differential equations // Miskolc Math. Notes. — 2006. — **7**, № 1. — P. 27 – 42.

Одержано 28.11.2006