

## СЦЕНАРИИ ПЕРЕХОДОВ К ГИПЕРХАОСУ В НЕИДЕАЛЬНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

**А. Ю. Швец, В. А. Сиренко**

*Нац. техн. ун-т Украины “КПИ им. И. Сикорского”  
пр. Победы, 37, Киев, 03056, Украина  
e-mail: alex.shvets@bigmir.net*

A class of nonideal oscillating (by Sommerfeld–Kononenko) dynamical systems is considered. We establish the existence of two types of hyperchaotic attractors in these systems. We describe scenarios of transitions from regular attractors to chaotic ones and scenarios of transitions between chaotic attractors of different types.

Розглянуто клас неідеальних коливних (за Зоммерфельдом – Кононенком) динамічних систем. Встановлено існування двох типів гіперхаотичних атракторів у таких системах. Описано сценарії переходів від регулярних атракторів до хаотичних, а також сценарії переходів між різними типами хаотичних атракторів.

**1. Введение.** При исследовании возникновения детерминированного хаоса в динамических системах большое внимание уделяется описанию сценариев переходов от регулярных режимов к хаотическим. Несмотря на большое количество математических моделей динамических систем сценарии переходов к хаосу в таких системах можно разбить на три группы. К первой группе принадлежит сценарий Фейгенбаума, при реализации которого происходит переход к хаосу через бесконечный каскад бифуркаций удвоения периодов предельных циклов [1, 2]. Ко второй группе принадлежат сценарии переходов к хаосу через перемежаемость по Пома – Манневиллю [3, 4]. Наконец, к третьей группе принадлежат сценарии, описывающие переход к хаосу через разрушение инвариантных торов [5].

В последнее время были описаны сценарии переходов к хаосу, представляющие собой различные обобщения сценариев Пома – Манневилля [6–8], а также сценарии, которым присущи как каскады бифуркаций удвоения периодов, так и различные типы перемежаемостей [9, 10]. Однако многие вопросы, касающиеся возможных сценариев переходов к хаосу, остаются не выясненными.

**2. Постановка задачи и математическая модель.** Любая колебательная система состоит из двух основных подсистем, источника возбуждения колебаний и собственно колебательной нагрузки. Если мощность источника возбуждения сравнима с мощностью, потребляемой колебательной нагрузкой, то такая система называется неидеальной по Зоммерфельду – Кононенко [11]. Если же мощность источника возбуждения значительно превышает мощность, потребляемую колебательной нагрузкой, то такая система называется идеальной.

Задачи глобального энергосбережения вынуждают максимально минимизировать мощности применяемых источников возбуждения колебаний. В связи с этим большинство реальных современных колебательных систем являются неидеальными. При математическом моделировании неидеальных систем обязательно следует учитывать обратное влияние колебательной нагрузки на функционирование источника возбуждения колебаний.

Это приводит к тому, что дифференциальные уравнения движения неидеальной системы содержат дополнительные уравнения по сравнению с идеальным случаем. Заметим, что пренебрежение влиянием колебательной нагрузки на источник возбуждения может привести к утрате информации о реально существующих как регулярных, так и хаотических установившихся режимах колебаний [6, 7].

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{d\tau} &= \alpha p_1 - \left[ \beta + \frac{A}{2} (p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] q_1 + B(p_1 q_2 - p_2 q_1) p_2, \\ \frac{dq_1}{d\tau} &= \alpha q_1 + \left[ \beta + \frac{A}{2} (p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] p_1 + B(p_1 q_2 - p_2 q_1) q_2 + 1, \\ \frac{d\beta}{d\tau} &= N_3 + N_1 \beta - \mu_1 q_1, \\ \frac{dp_2}{d\tau} &= \alpha p_2 - \left[ \beta + \frac{A}{2} (p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] q_2 - B(p_1 q_2 - p_2 q_1) p_1, \\ \frac{dq_2}{d\tau} &= \alpha q_2 + \left[ \beta + \frac{A}{2} (p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] p_2 - B(p_1 q_2 - p_2 q_1) q_1,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $p_1, q_1, \beta, p_2, q_2$  — фазовые координаты,  $\tau$  — время,  $A, B, \alpha, N_1, N_3, \mu_1$  — некоторые параметры.

Как установлено в работах [6, 7, 12–16], система уравнений (1) используется для описания колебаний жидкости в цилиндрических баках, моделирования колебаний тонкостенных оболочек, изучения маятниковых систем с вибрирующей точкой подвеса и ряда других актуальных задач нелинейной динамики. В зависимости от рассматриваемой прикладной задачи параметры  $A, B, \alpha, N_1, N_3, \mu_1$  имеют различный физический или геометрический смысл. В свою очередь, фазовые переменные  $p_1, q_1, p_2, q_2$  являются обобщенными координатами колебательной подсистемы, фазовая переменная  $\beta$  описывает функционирование источника возбуждения колебаний [6, 7].

Система уравнений (1) — нелинейная детерминированная динамическая система с пятимерным фазовым пространством. В работах [6–10] установлено, что существует несколько типов регулярных и хаотических аттракторов этой системы и описан ряд сценариев перехода к хаосу, обобщающих классические сценарии Помо – Манневилля и Фейгенбаума. Цель данной работы — выявление и описание новых сценариев перехода к детерминированному хаосу в динамических системах типа (1). Мы рассмотрим как сценарии перехода от регулярных аттракторов к хаотическим, так и сценарии переходов между различными типами хаотических аттракторов.

**3. Идентификация и описание сценариев перехода к гиперхаосу.** Так как система уравнений (1) является нелинейной, то в общем случае детальное и всестороннее исследование ее динамики может быть проведено только с использованием различных численных, численно-аналитических и компьютерных методов [5, 17]. В пространстве параметров системы (1) был проведен большой цикл компьютерных расчетов, целью которых являлось выявление регулярных, хаотических и гиперхаотических аттракторов, а также новых сценариев перехода к гиперхаосу. Методика проведения таких расчетов разработана и описана в [7, 18].

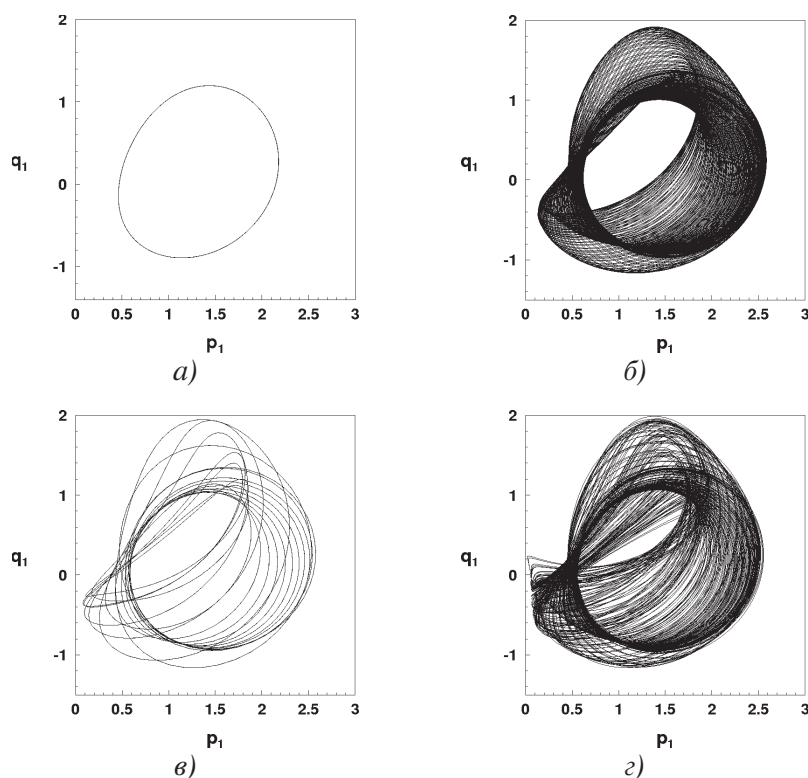


Рис. 1. Проекция фазовых портретов предельных циклов при а)  $\alpha = -0.025$ ; в)  $\alpha = -0.0352$ ; б) квазипериодического аттрактора при  $\alpha = -0.03$  и г) хаотического аттрактора при  $\alpha = -0.0384$ .

Пусть параметры системы (1) имеют следующие значения:

$$A = 1.12, \quad B = -1.531, \quad N_3 = -1, \quad N_1 = -1, \quad \mu_1 = 4.125.$$

Проведем исследование существующих в системе аттракторов и сценариев перехода типов “регулярный режим – хаос” и “хаос – хаос” при изменении значения параметра  $\alpha$ . Заметим, что выбор таких значений параметров произведен на основании карт динамических режимов этой системы, построенных в работах [8, 9]. Особое внимание при этом уделим гиперхаотическим аттракторам и особенностям их возникновения.

При  $-0.0254 < \alpha < -0.0102$  в системе существует устойчивый однитактный предельный цикл. Проекция фазового портрета предельного цикла такого типа приведена на рис. 1 а. Сигнатура спектра ляпуновских характеристических показателей (ЛХП) таких предельных циклов имеет вид  $\langle 0, -, -, -, - \rangle$ . При уменьшении значения параметра  $\alpha$ , при  $\alpha = -0.0254$ , существующий предельный цикл теряет устойчивость, и в системе в результате бифуркации Неймарка возникает устойчивый инвариантный тор [19]. На рис. 1 б приведена проекция фазового портрета инвариантного тора, построенного при  $\alpha = -0.03$ . Сигнатура спектра ЛХП инвариантного тора имеет вид  $\langle 0, 0, -, -, - \rangle$ .

При дальнейшем уменьшении значения параметра  $\alpha = -0.0352$  происходит разрушение тора и возникновение резонансного цикла на торе (рис. 1 в). Но уже при значении  $\alpha = -0.0382$  существующий резонансный предельный цикл исчезает и в системе возникает хаотический аттрактор (рис. 1 г). Сигнатура спектра ЛХП хаотического аттрактора имеет

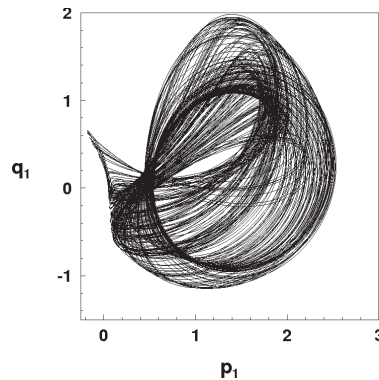


Рис. 2. Проекция фазового портрета “малого” гиперхаотического аттрактора при  $\alpha = -0.0388$ .

вид  $\langle +, 0, -, -, - \rangle$ . Полученный хаотический аттрактор (рис. 1 г) существует на достаточно малом интервале изменения параметра, и уже при  $\alpha = -0.0388$  наблюдается бифуркация “хаос – гиперхаос”, в результате которой возникает гиперхаотический аттрактор (рис. 2) с сигнатурой спектра ЛХП  $\langle +, +, 0, -, - \rangle$ . Проекция фазового портрета возникшего гиперхаотического аттрактора (рис. 2) визуально незначительно отличается от проекции хаотического аттрактора (рис. 1 г). Но существенная разница между этими аттракторами заключается в том, что спектр ЛХП гиперхаотического аттрактора содержит два положительных ляпуновских показателя, а спектр ЛХП хаотического аттрактора — только один положительный ляпуновский показатель. Следовательно, в фазовом пространстве гиперхаотического аттрактора существуют два направления, по которым разбегаются близкие фазовые траектории, принадлежащие аттрактору.

При дальнейшем уменьшении параметра  $\alpha$ , при  $\alpha = -0.0402$ , происходит бифуркация “гиперхаос – гиперхаос”. Гиперхаотический аттрактор (рис. 2) исчезает и в системе возникает гиперхаотический аттрактор нового типа. Проекция фазового портрета такого аттрактора приведены на рис. 3. Причем на рис. 3 б приведен увеличенный фрагмент рис. 3 а. Прежде всего следует заметить, что по сравнению с гиперхаотическим аттрактором, приведенным на рис. 2, значительно увеличивается объем области локализации аттрактора в фазовом пространстве. Соответственно заметно растут амплитуды колебаний фазовых переменных. Кроме того, у возникшего гиперхаотического аттрактора приблизительно в три раза возрастает величина старшего ляпуновского показателя, что свидетельствует об увеличении скорости разбегания близких фазовых траекторий, принадлежащих аттрактору. Также следует обратить внимание на качественное подобие фрагмента проекции возникшего гиперхаотического аттрактора (рис. 3 б) всей проекции исчезнувшего гиперхаотического аттрактора (рис. 2).

Следуя терминологии, введенной для хаотических аттракторов в работах [8, 9], будем называть гиперхаотические аттракторы типа, представленного на рис. 3, “большими”, а гиперхаотические аттракторы типа, приведенного на рис. 2, — “малыми”.

Как показали проведенные исследования, переход “гиперхаос – гиперхаос” происходит по сценарию обобщенной перемежаемости, который был детально описан в работах [7, 9, 18] для переходов типа “хаос – хаос”. Здесь сценарий обобщенной перемежаемости реализуется для переходов “гиперхаос – гиперхаос”. В соответствии с таким сценарием движение по траекториям “большого” гиперхаотического аттрактора состоит из двух фаз.

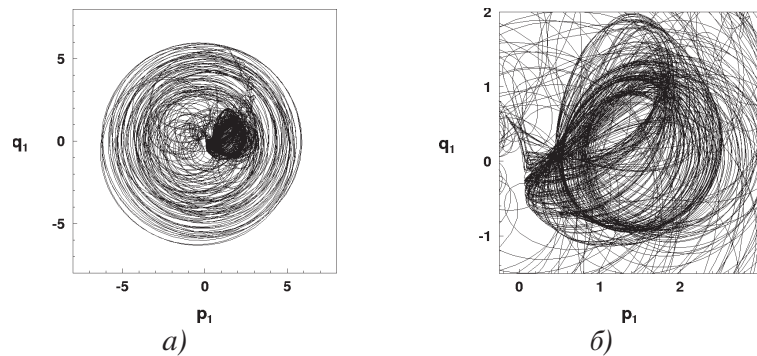


Рис. 3. Проекция фазового портрета “большого” гиперхаотического аттрактора при  $\alpha = -0.0402$ .

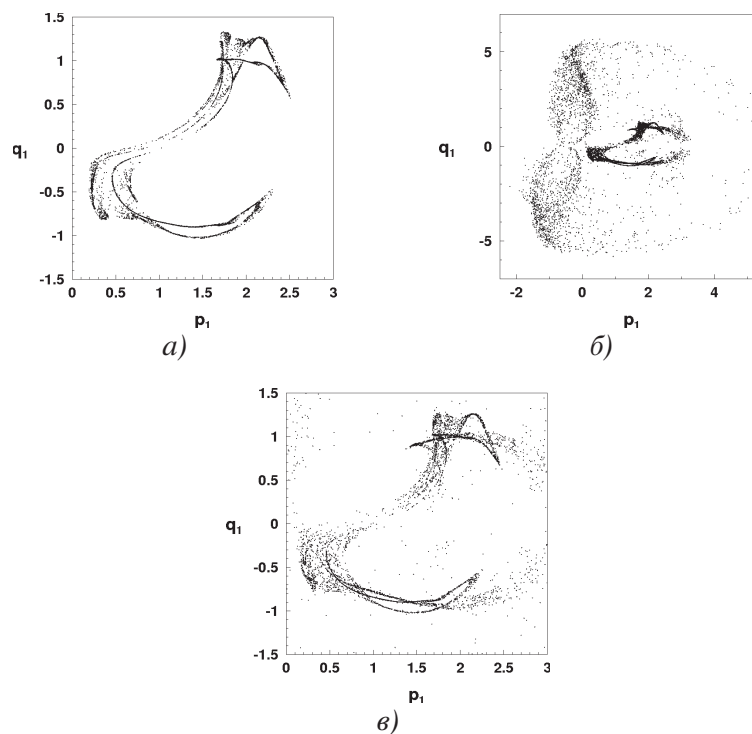


Рис. 4. Проекция сечения Пуанкаре гиперхаотических аттракторов при а)  $\alpha = -0.0388$ ; б), в)  $\alpha = -0.0402$ .

В одной из них, грубо-ламинарной по классификации работ [7, 18], происходит хаотическое движение траекторий в области локализации исчезнувшего “малого” гиперхаотического аттрактора (рис. 3 б). В другой фазе, турбулентной, происходят непредсказуемые уходы траекторий в отдаленные области фазового пространства (рис. 3 а).

Подобные закономерности, характерные для перемежаемости, наблюдаются и при анализе сечений Пуанкаре. На рис. 4 приведены проекции сечений Пуанкаре “малого” (рис. 4 а) и “большого” (рис. 4 б, в) гиперхаотических аттракторов. В качестве секущей выбиралась плоскость  $\beta = -1.2$ . Заметим, что рис. 4 в является увеличенным фрагментом центральной части рис. 4 б. Построенные сечения представляют собой развитые хаотические множества точек. Внимательное изучение этих рисунков позволяет заметить каче-

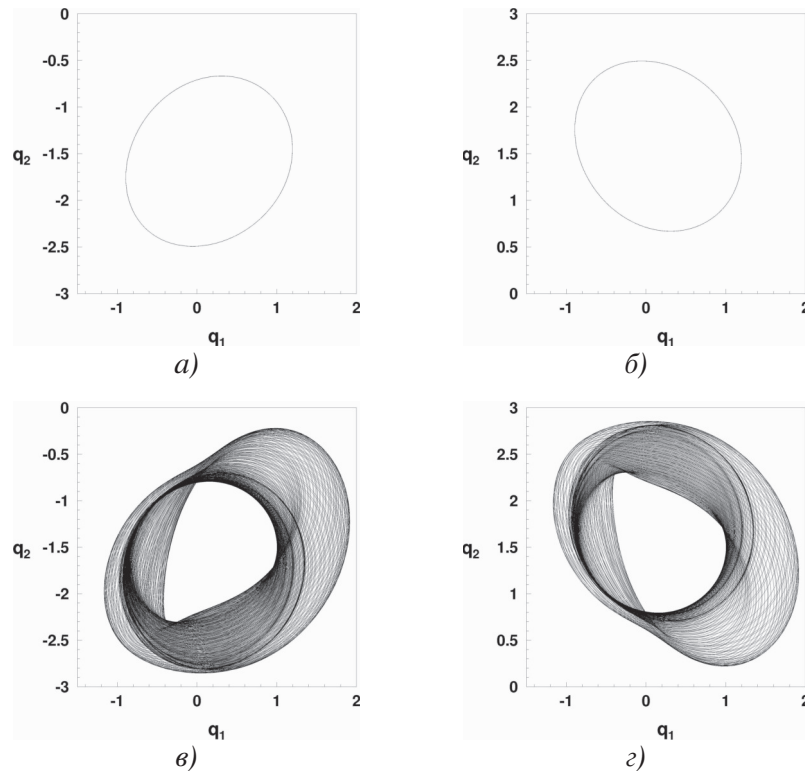


Рис. 5. Проекция фазовых портретов симметричных предельных циклов при а), б)  $\alpha = -0.02$  и квазипериодических аттракторов в), г) при  $\alpha = -0.027$ .

ственное подобие сечения Пуанкаре “малого” гиперхаоса с густо затемненной центральной частью сечения Пуанкаре “большого” гиперхаоса. Фактически сечение Пуанкаре “малого” гиперхаоса является подмножеством соответствующего сечения “большого” гиперхаоса. Это еще раз подчеркивает перемежаемость аттракторов. Грубо-ламинарной фазе перемежаемости отвечают точки, расположенные в густо затемненной центральной части рис. 4 б. Соответственно точки, расположенные на более светлых участках этого рисунка, принадлежат турбулентной фазе перемежаемости.

Положим  $\mu_1 = 4.024$ . При этом не будем изменять значения остальных параметров системы (1). В результате проведения большого количества численных компьютерных экспериментов удалось обнаружить и описать достаточно сложную цепочку сценариев перехода от регулярных аттракторов к хаотическим.

Установлено, что при  $-0.026 < \alpha < -0.01$  в системе существуют симметричные относительно оси  $q_1 = 0$  одноктные предельные циклы. Проекция фазовых портретов предельных циклов такого типа приведены на рис. 5 а, б. Каждый из предельных циклов существует отдельно и характеризуется своим бассейном притяжения. При уменьшении значения параметра  $\alpha$ , при  $\alpha = -0.027$ , существующие предельные циклы теряют устойчивость и в системе возникают симметричные инвариантные торы. На рис. 5 в, г приведены проекции фазовых портретов симметричных инвариантных торов, построенных при  $\alpha = -0.034$ . Каждый из построенных инвариантных торов существует отдельно, имеет свой бассейн притяжения и возникает в окрестности соответствующего предельного цикла, “верхнего” или “нижнего”, в результате бифуркации Неймарка [5].

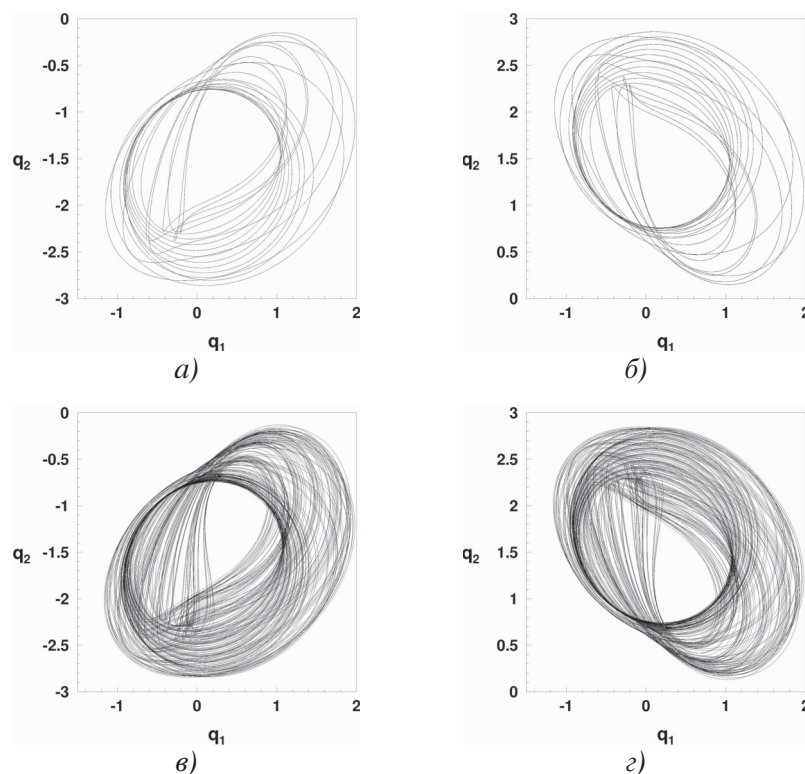


Рис. 6. Проекция фазовых портретов симметричных предельных циклов на торах при а), б)  $\alpha = -0.035$  и хаотических аттракторов в), г) при  $\alpha = -0.0365$ .

При дальнейшем уменьшении значения параметра, при  $\alpha = -0.035$ , происходит разрушение каждого из симметричных торов и возникновение симметричных резонансных циклов на торах (рис. 6 а, б). Каждый из полученных резонансных циклов возникает на соответствующей тороидальной поверхности и характеризуется своим бассейном притяжения. Но уже при значении  $\alpha = -0.0365$  существующие симметричные резонансные предельные циклы исчезают и в системе возникают симметричные хаотические аттракторы (рис. 6 в, г). В спектре ЛХП каждого из полученных хаотических аттракторов присутствует один положительный показатель, что свидетельствует об их хаотичности. Возникновение каждого из хаотических аттракторов происходит по классическому сценарию перемежаемости Помо–Манневилля [3, 4]. Хаотические аттракторы имеют разные бассейны притяжения, не имеющие общих точек.

Хаотические аттракторы (рис. 6 в, г) существуют на достаточно малом интервале изменения параметра  $\alpha$ , и уже при  $\alpha = -0.0405$  наблюдается бифуркация “хаос – гиперхаос”, в результате которой происходит разрушение каждого из хаотических аттракторов и возникновение соответствующих гиперхаотических аттракторов (рис. 7 а, б). Сигнатура спектра ЛХП каждого гиперхаотического аттрактора имеет вид  $\langle +, +, 0, -, - \rangle$ . Проекция фазовых портретов (рис. 7 а, б) построенных гиперхаотических аттракторов незначительно визуально отличаются от соответствующих хаотических (рис. 6 в, г). Но существенная разница между ними заключается в том, что спектр ЛХП гиперхаотического аттрактора имеет два положительных ляпуновских показателя, в то время как спектр ЛХП хаотического аттрактора имеет только один положительный ляпуновский показатель.

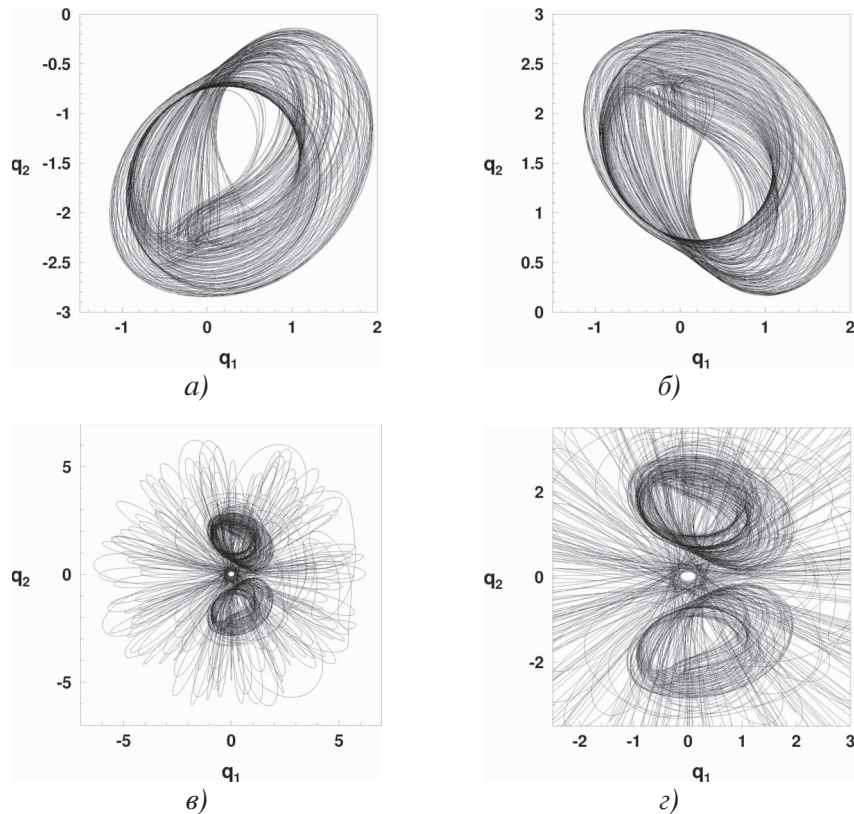


Рис. 7. Проекция фазовых портретов симметричных гиперхаотических аттракторов при а), б)  $\alpha = -0.0405$  и гиперхаотического аттрактора в), г) при  $\alpha = -0.0407$ .

Возникающие симметричные гиперхаотические аттракторы также существуют на небольшом интервале изменения параметра  $\alpha$ , и уже при значении  $\alpha = -0.0407$  в системе происходит бифуркация “гиперхаос – гиперхаос”, в результате которой гиперхаотические аттракторы (рис. 7 а, б) исчезают и в системе возникает гиперхаотический аттрактор нового типа. Проекция фазового портрета такого гиперхаотического аттрактора приведена на рис. 7 в. Данный аттрактор представляет собой “склею” исчезающих, после прохождения точки бифуркации, гиперхаотических аттракторов с симметричными проекциями. На рис. 7 г приведен фрагмент центральной (более темной) части гиперхаотического аттрактора (рис. 7 в). Эта затемненная часть соответствует областям локализации исчезнувших гиперхаотических аттракторов.

Переход “гиперхаос – гиперхаос” здесь происходит по модифицированному сценарию обобщенной перемежаемости. Такая перемежаемость имеет существенные отличия от обобщенной перемежаемости, описанной в [7, 9, 18]. Движение типичной траектории аттрактора состоит из трех фаз. Две из этих фаз представляют хаотические движения траектории в одной из затемненных (верхней или нижней) областей рис. 7 в, г, т. е. в областях локализации исчезнувших гиперхаотических аттракторов (рис. 7 а, б). Такие фазы движения называются грубо-ламинарными. Третья фаза движения представляет собой уходы траектории в отдаленные области фазового пространства. Эта фаза движения называется турбулентной. Таким образом, траектория, начав движение, например, в одной из грубо-



ламинарных фаз, в непредвиденный момент времени срывается в турбулентную фазу. Далее, опять в непредвиденный момент времени возвращается в одну из грубо-ламинарных фаз. Причем, начав движение в верхней затемненной области рис. 7 а, б, траектория после турбулентного всплеска может вернуться как в верхнюю затемненную область, так и перейти в нижнюю. Отметим, что “переключение” траекторий между грубо-ламинарными фазами является непредсказуемым. Такой сложный характер изменения фаз движения траектории повторяется бесконечное число раз. В отличие от описанного в [7, 9, 18] сценария обобщенной перемежаемости здесь присутствуют две грубо-ламинарные фазы движения.

### Литература

1. *Feigenbaum M. J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* – 1978. – **19**, № 1. – P. 25–52.
2. *Feigenbaum M. J.* The universal metric properties of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* – 1979. – **21**, № 6. – P. 669–706.
3. *Manneville P., Pomeau Y.* Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems // *Phys. D.* – 1980. – **1**, № 2. – P. 219–226.
4. *Pomeau Y., Manneville P.* Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems // *Comm. Math. Phys.* – 1980. – **74**, № 2. – P. 189–197.
5. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос. – М.: Физматлит, 2006. – 356 с.
6. *Krasnopol'skaya T. S., Shvets A. Yu.* Chaotic surface waves in limited power — supply cylindrical tank vibrations // *J. Fluids Struct.* – 1994. – **8**, № 1. – P. 1–18.
7. *Krasnopol'skaya T. S., Shvets A. Yu.* Dynamical chaos for a limited power supply for fluid oscillations in cylindrical tanks // *J. Sound Vib.* – 2009. – **322**, № 3. – P. 532–553.
8. *Швец А. Ю., Сиренко В. А.* Особенности перехода к детерминированному хаосу в неидеальной гидродинамической системе “бак с жидкостью–электродвигатель” // *Динам. системы.* – 2011. – **1(29)**, № 1. – С. 113–131.
9. *Швец А. Ю., Сиренко В. А.* Единство и разнообразие сценариев перехода к хаосу при колебаниях жидкости в цилиндрических баках // 36. праць Ін-ту математики НАН України “Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики”. – 2014. – **11**, № 4. – С. 386–398.
10. *Shvets A. Yu., Sirenko V. O.* New ways of transitions to deterministic chaos in non ideal oscillating systems // *Res. Bull. Nat. Techn. Univ. Ukraine “Kyiv Polytechnic Institute”.* – 2015. – **99**, № 1. – P. 45–51.
11. *Кононенко В. О.* Колебательные системы с ограниченным возбуждением. – М.: Наука, 1964. – 256 с.
12. *Луковский И. А.* Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью. – Киев: Наук. думка, 2010. – 407 с.
13. *Рабинович Б. И.* Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1983. – 296 с.
14. *Ibrahim R. A.* Liquid sloshing dynamics: theory and applications. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005. – 970 p.
15. *Швец А. Ю.* Детерминированный хаос сферического маятника при ограниченном возбуждении // *Укр. мат. журн.* – 2007. – **59**, № 4. – С. 534–548.
16. *Krasnopol'skaya T. S., Shvets A. Yu.* Properties of chaotic fluid oscillations in cylindrical basins // *Internat. Appl. Mech.* – 1992. – **28**, № 6. – P. 386–394.
17. *Samoilenko A. M., Ronto N. I.* Numerical-analytic methods of investigating periodic solutions. – Moscow: Mir, 1979.
18. *Krasnopol'skaya T. S., Shvets A. Yu.* Regular and chaotic dynamics of systems with limited excitation. – Moscow – Izhevsk: R&C Dynamics, 2008. – 280 p.
19. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука. – 1987. – 303 с.

Получено 01.11.17