УДК 517.9

МАТРИЧНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*

С. М. Чуйко, Д. В. Сысоев

Донбас. гос. пед. ун-т
ул. Генерала Батюка, 19, Славянск Донецкой обл., 84116, Украина
e-mail: chujko-slav@ukr.net

We obtain necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of the liner matrix periodic boundary-value problem for a system of differential equations with concentrated delay in the critical case. We derive conditions for the existence of the best solution (in the sense of the least-squares method) of the liner matrix periodic boundary-value problem for the system of differential equations with concentrated delay and find this solution.

Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язків лінійної матричної періодичної задачі для системи диференціальних рівнянь із зосередженим запізненням у критичному випадку. Отримано умови існування та зображення найкращого (у сенсі методу найменших квадратів) розв'язку лінійної матричної періодичної задачі для системи диференціальних рівнянь із зосередженим запізненням.

Постановка задачи. Исследована задача о построении T-периодических решений

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[0,T] := \mathbb{C}^1[0,T] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

системы дифференциальных уравнений с запаздыванием [1 – 5]

$$dZ(t)/dt = A(t)Z(t) + Z(t-\Delta)B(t) + F(t), \tag{1}$$

где

$$A(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\alpha}[0,T], \qquad B(t) \in \mathbb{C}^1_{\beta\times\beta}[0,T], \qquad F(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[0,T]$$

— непрерывные T-периодические матрицы. Вообще говоря, предполагаем $\alpha \neq \beta$. Матричная дифференциальная периодическая задача для уравнения (1) с сосредоточенным запаздыванием обобщает традиционные постановки задач как для матричных дифференциальных уравнений [6 – 8], так и для дифференциальных уравнений с запаздыванием [1 – 5]. Обозначим через $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},\ j = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta$, естественный базис [9] пространства $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$. При этом задача о нахождении решений уравнения (1) приводит к задаче о нахождении вектора $z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\beta}[0;T]$, компоненты которого $z_j(t) \in \mathbb{C}^1[0;T]$ определяют разложение матрицы

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \Xi^{(j)} z_j(t), \qquad z_j(t) \in \mathbb{C}^1[a;b], \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta,$$

* Выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований. Номер государственной регистрации 0115U003182.

по векторам $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$. Определим оператор $\mathcal{M}[A]\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to$ $\to \mathbb{R}^{m\cdot n}$ как оператор, который ставит в соответствие матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор-столбец $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы A, а также обратный оператор [10]

$$\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}]\colon \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

который ставит в соответствие вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Произведение $A(t)Z(t)$ представимо в виде

$$A(t)Z(t) := A(t)\sum_{k=1}^{\alpha\beta}\Xi^{(k)}z_k(t), \qquad \mathcal{M}\big[A(t)Z(t)\big] = M(t)\cdot z(t),$$

где

$$M(t) := \big[M_k(t)\big]_{k=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{C}_{\alpha\beta\times\alpha\beta}[0,T], \qquad M_k(t) = \mathcal{M}\big[A(t)\Xi^{(k)}\big], \quad k = 1,2,\ldots,\alpha\cdot\beta.$$

Аналогично

$$\mathcal{M}\big[Z(t-\Delta)B(t)\big] = N(t)\cdot z(t-\Delta), \qquad N(t) := \big[N_k(t)\big]_{k=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta},$$

где

$$N_j(t) = \mathcal{M}\big[\Xi^{(k)}B(t)\big], \quad k = 1,2,\ldots,\alpha\cdot\beta.$$

Таким образом, задача о построении решений матричного дифференциального уравнения (1) приведена к задаче о нахождении решений $z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\beta}[0;T]$ традиционного дифференциального уравнения с запаздыванием [1 – 5, 11]

$$z'(t) = M(t)\cdot z(t) + N(t)\cdot z(t-\Delta) + f(t), \quad f(t) := \mathcal{M}\big[F(t)\big]. \tag{2}$$

Как известно [1], решение функционально-дифференциального уравнения с запаздыванием (2)

$$z(t,c) = X(t)c + k\big[f(s)\big](t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

представимо с помощью оператора Грина задачи Коши

$$k\big[f(s)\big](t) := \int_0^T K(t,s)f(s)\,ds,$$

где $K(t,s)$ — матрица Коши, представляющая при каждом фиксированном s решение матричной задачи Коши

$$K'_t(t,s) - M(t)\cdot K(t,s) - N(t)\cdot K(t-\Delta,s), \quad s,t \in [0,T].$$

Фундаментальная матрица однородной части функционально-дифференциального уравнения с запаздыванием (2) имеет вид [1]

$$X(t) = K(t,0) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\beta\times\alpha\beta}[0,T].$$

Подставляя решение функционально-дифференциального уравнения с запаздыванием (2) в условие периодичности, приходим к задаче о нахождении решений матричного уравнения

$$Q\,c + \ell k\big[f(s)\big](\cdot) = 0, \qquad \ell k\big[f(s)\big](\cdot) := k\big[f(s)\big](0) - k\big[f(s)\big](T). \tag{3}$$

2. Условие разрешимости. В критическом случае $(P_{Q^*} \neq 0)$ уравнение (3) разрешимо тогда и только тогда, когда [1]

$$P_{Q^*_r}\,\ell k\big[f(s)\big](\cdot) = 0, \tag{4}$$

при этом уравнение (3) имеет семейство решений

$$c = P_{Q_r} c_r - Q^+ \ell k\big[f(s)\big](\cdot), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь P_{Q^*} — $(\alpha\beta \times \alpha\beta)$-матрица-ортопроектор:

$$P_{Q^*}\colon \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(Q^*), \qquad Q := X(0) - X(T),$$

Q^+ — псевдообратная (по Муру – Пенроузу) матрица; матрица P_{Q_r} составлена из r линейно-независимых столбцов $(\alpha\beta \times \alpha\beta)$-матрицы-ортопроектора

$$P_Q\colon \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(Q).$$

Матрица $P_{Q^*_r}$ составлена из r линейно независимых строк ортопроектора P_{Q^*}. В критическом случае, при условии (4), периодическое решение функционально-дифференциального уравнения с запаздыванием (2) имеет вид

$$z(t, c_r) = X_r(t) c_r + G\big[f(s)\big](t), \qquad X_r(t) := X(t) P_{Q_r}, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

где

$$G\big[f(s)\big](t) := k\big[f(s)\big](t) - X(t) Q^+ \ell k\big[f(s)\big](\cdot).$$

Таким образом, в критическом случае, при условии (4), периодическое решение матричного функционально-дифференциального уравнения с запаздыванием (1) имеет вид

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + \mathcal{M}^{-1}\Big[G\big[f(s)\big](t)\Big], \qquad W(t, c_r) := \mathcal{M}^{-1}\big[X_r(t) c_r\big], \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. *В критическом случае* $(P_{Q^*} \neq 0)$ *периодическая задача для уравнения (1) разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (4); при этом общее решение* T*-периодической задачи для уравнения (1) имеет вид*

$$Z(t, c_r) = W_r(t, c_r) + G\big[F(s)\big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

где

$$G\big[F(s)\big](t) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{G\big[f(s)\big](t)\Big\}$$

— обобщенный оператор Грина T*-периодической задачи для уравнения (1),* $W_r(t, c_r)$ *— общее* T*-периодическое решение однородной части системы (1).*

В критическом случае [3, с. 33], а в случае постоянных матриц $M(t) \equiv M$ и $N(t) \equiv N$ — и при наличии чисто мнимых корней $\lambda_j = \pm\, i\, k_j T,\ i := \sqrt{-1},\ j \in \mathbb{Z}$, характеристического уравнения

$$\det\Big[M + N e^{-\lambda\Delta} - \lambda\, I_{\alpha\cdot\beta}\Big] = 0,$$

сопряженная система [3, с. 30]

$$dy(t)/dt = -M^*(t) y(t) - N^*(t) y(t + \Delta)$$

имеет семейство T-периодических решений вида

$$y(t, c_r) = H_r(t)c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Периодическая задача для уравнения (2) разрешима тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^T H_r^*(t)f(t)\,dt = 0. \tag{5}$$

Здесь $H_r(t)$ — $(\alpha\beta \times r)$-матрица, составленная из r линейно-независимых T-периодических решений сопряженной системы [3, с. 33]. Таким образом, условие (5) равносильно условию (4). Заметим, что в качестве значения $G[f(s)](t)$ обобщенного оператора Грина T-периодической задачи для уравнения (2) может быть принято любое частное решение периодической задачи для этого уравнения. Для построения частного решения T-периодической задачи для уравнения (2) можно воспользоваться эффективным методом наименьших квадратов [12].

Пример 1. Исследуем задачу о нахождении 2π-периодических решений матричного уравнения с запаздыванием

$$dZ(t)/dt = A(t)Z(t) + Z(t-\Delta)B(t) + F(t), \quad \Delta := \frac{\pi}{2}, \tag{6}$$

где

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad F(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4\sin 3t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача о построении решений матричного дифференциального уравнения (6) приводится к задаче о нахождении решений $z(t) \in \mathbb{C}_9^1[0;2\pi]$ традиционного дифференциального уравнения с запаздыванием (2) посредством матриц

$$M = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&-1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&-1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&-1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-1 \end{pmatrix},$$

при этом характеристическое уравнение имеет кроме простого корня $\lambda_1 = 1$ четырехкратный корень $\lambda_2 = 0$ и двукратные чисто мнимые корни $\lambda_{3,4} = \pm i$. Матрица, составленная из 8 линейно-независимых 2π-периодических решений системы (2) имеет вид

$$X_r(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos t & \sin t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Периодическая задача для уравнения (6) представляет критический случай, поскольку $P_{Q^*} \neq 0$. При этом выполнено условие (5), следовательно, периодическая задача для уравнения (6) разрешима; здесь

$$H_r(t) = X_r(t) := X(t)P_{Q_r}, \qquad P_Q = P_{Q^*} = \operatorname{diag}\big(1 - e^{2\pi} \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0\big),$$

кроме того

$$P_{Q_r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение периодической задачи для уравнения (6) имеет вид

$$Z(t, c_r) = W_r(t, c_r) + G\big[F(s)\big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^8,$$

где

$$G\big[F(s)\big](t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 3t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— обобщенный оператор Грина периодической задачи для уравнения (6),

$$W_r(t, c_r) = \begin{pmatrix} 0 & c_3 & c_6 \\ c_1 & c_4 \cos t & c_7 \sin t \\ c_2 & -c_5 \sin t & c_8 \cos t \end{pmatrix}, \quad c_r \in \mathbb{R}^8,$$

— общее 2π-периодическое решение однородной части системы (6).

Утверждение доказанной теоремы является обобщением соответствующих утверждений [1 – 5] на случай матричной периодической задачи для уравнения (1) с запаздыванием.

В некритическом случае $(P_{Q^*} = 0)$, при отсутствии T-периодических решений однородной части системы (2), а в случае постоянных матриц $M(t) \equiv M$ и $N(t) \equiv N$ — и при отсутствии чисто мнимых корней характеристического уравнения, система (3) разрешима для любых функций $f(t)$. Следовательно, периодическая задача для уравнения (1) разрешима для любых функций $F(t)$. Заметим, что для квадратной матрицы Q условие $P_{Q^*} = 0$ влечет за собой $P_Q = 0$ и равносильно традиционному требованию $\det Q \neq 0$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Следствие. *В некритическом случае* $(P_{Q^*} = 0)$ *периодическая задача для уравнения (1) разрешима для любых функций* $F(t)$, *при этом решение* T*-периодической задачи для уравнения (1) единственно и имеет вид*

$$Z(t) = G\big[F(s)\big](t),$$

где

$$G\big[F(s)\big](t) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{k\big[f(s)\big](t) - X(t)Q^{-1}\ell k\big[f(s)\big](\cdot)\Big\}$$

— обобщенный оператор Грина T*-периодической задачи для уравнения (1).*

Утверждение доказанного следствия является обобщением соответствующих утверждений [1 – 5] на случай матричной периодической задачи для уравнения (1) с запаздыванием.

Пример 2. Исследуем задачу о нахождении 2π-периодических решений матричного уравнения с запаздыванием

$$dZ(t)/dt = A(t)Z(t) + Z(t-\Delta)B(t) + F(t), \quad \Delta := \frac{\pi}{2}, \tag{7}$$

где

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(t) := -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача о построении решений матричного дифференциального уравнения (7) приводится к задаче о нахождении решений $z(t) \in \mathbb{C}^1_9[0; 2\pi]$ традиционного дифференциального уравнения с запаздыванием (2) посредством матриц $M = I_9$ и

$$N = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix},$$

при этом характеристическое уравнение имеет девятикратный корень $\lambda_1 = 1$. Нормальная $(X(0) = I_9)$ фундаментальная матрица однородной части системы (2) имеет вид

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&e^t&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&e^t&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&e^t&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&e^t&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&e^t&0&0&0 \\ 0&0&0&t\,e^{t-1}&0&0&e^t&0&0 \\ 0&0&0&0&t\,e^{t-1}&0&0&e^t&0 \\ 0&0&0&0&0&t\,e^{t-1}&0&0&e^t \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\det Q = 1 - 9\,e + 36\,e^2 - 84\,e^3 + 126\,e^4 - 126\,e^5 + 84\,e^6 - 36\,e^7 + 9\,e^8 - e^9 \neq 0,$$

постольку в задаче о нахождении 2π-периодических решений матричного уравнения с запаздыванием (7) имеет место некритический случай, следовательно, периодическая задача для уравнения (7) разрешима для данной функции $F(t)$; здесь

$$Q = \begin{pmatrix} 1-e&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1-e&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1-e&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1-e&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1-e&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1-e&0&0&0 \\ 0&0&0&-1&0&0&1-e&0&0 \\ 0&0&0&0&-1&0&0&1-e&0 \\ 0&0&0&0&0&-1&0&0&1-e \end{pmatrix}.$$

Единственное решение периодической задачи для уравнения (7) имеет вид

$$Z(t) = G\big[F(s)\big](t),$$

где

$$G\big[F(s)\big](t) := \mathcal{M}^{-1}\big\{k\big[f(s)\big](t)\big\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— обобщенный оператор Грина периодической задачи для уравнения (6).

3. Наилучшее по методу наименьших квадратов решение матричной дифференциальной краевой задачи с запаздыванием. Пусть $\psi_1(t),\ \psi_2(t), \ldots, \psi_k(t), \ldots$ — система линейно независимых непрерывно дифференцируемых вектор-функций. Обозначим $(\alpha \cdot \beta \times k)$-матрицу

$$\psi(t) := \big[\psi_1(t)\psi_2(t)\ldots\psi_k(t)\big].$$

Приближение к решению функционально-дифференциального уравнения с запаздыванием (2) ищем в виде

$$z(t) := \mathcal{M}\big[Z(t)\big] = \psi(t) \cdot c, \quad c \in \mathbb{R}^k.$$

Потребуем выполнения условий

$$F(c) := \big\|z'(t) - M(t)z(t) - N(t)z(t-\Delta) - f(t)\big\|^2_{\mathbb{L}^2[0,T]} + \big\|z(0) - z(T)\big\|^2_{\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}} \to \min$$

для фиксированной матрицы $\psi(t)$. Обозначим через

$$\check{\Xi}^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}, \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha \cdot \beta,$$

базис пространства $\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$ и через $c_j,\ j = 1, 2, \ldots, \alpha \cdot \beta,$ — константы, определяющие разложение вектора

$$c = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \check{\Xi}^{(j)} c_j, \qquad c_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha \cdot \beta,$$

по векторам $\check{\Xi}^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$. Заметим, что

$$\psi'(t) \cdot c - M(t)\psi(t) \cdot c - N(t)\psi(t-\Delta) \cdot c =$$

$$= \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Big\{\psi'(t) \cdot \check{\Xi}^{(j)} - M(t)\psi(t) \cdot \check{\Xi}^{(j)} - N(t)\psi(t-\Delta) \cdot \check{\Xi}^{(j)}\Big\} c_j = \check{\Phi}(t)c,$$

где

$$\check{\Phi}(t) := \big[\check{\Phi}_1(t)\check{\Phi}_2(t)\ldots\check{\Phi}_k(t)\big], \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha \cdot \beta,$$

— $(\alpha \cdot \beta \times k)$-матрица,

$$\check{\Phi}_j(t) := \big[\psi'(t) - M(t)\psi(t) - N(t)\psi(t-\Delta)\big] \cdot \check{\Xi}^{(j)}, \quad c \in \mathbb{R}^k.$$

Аналогично,

$$z(0) - z(T) = \Psi c, \qquad \Psi := \big[\Psi_1\Psi_2\ldots\Psi_k\big] \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times k},$$

где
$$\check{\Psi}_j := \big[\psi(0) - \psi(T)\big] \cdot \check{\Xi}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha \cdot \beta.$$
Необходимое условие минимизации функции $F(c)$ приводит к уравнению
$$\big[\Gamma\big(\psi(\cdot)\big) + \check{\Gamma}\big(\psi(\cdot)\big)\big] \cdot c = \int\limits_a^b \check{\Phi}^*(t)\, f(t)\, dt,$$
разрешимому относительно вектора
$$c = \big[\Gamma\big(\psi(\cdot)\big) + \check{\Gamma}\big(\psi(\cdot)\big)\big]^+ \int\limits_a^b \check{\Phi}^*(t)\, f(t)\, dt$$
при условии
$$\mathcal{P}_\psi \int\limits_a^b \check{\Phi}^*(t)\, f(t)\, dt = 0, \tag{8}$$
в частности, в случае невырожденности суммы $(k \times k)$-матриц Грама [13]
$$\Gamma\big(\psi(\cdot)\big) := \int\limits_0^T \check{\Phi}^*(t)\check{\Phi}(t)dt, \qquad \check{\Gamma}\big(\psi(\cdot)\big) := \check{\Psi}^*\check{\Psi}.$$
Здесь
$$\mathcal{P}_\psi := P_{[\Gamma(\psi(\cdot))+\check{\Gamma}(\psi(\cdot))]^*} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{N}\Big[\Gamma\big(\psi(\cdot)\big) + \check{\Gamma}\big(\psi(\cdot)\big)\Big]^*$$
— $(k \times k)$-матрица-ортопроектор. Таким образом, найдено наилучшее по методу наименьших квадратов решение
$$z(t, \psi) = \psi(t)c, \qquad c = \Big[\Gamma\big(\psi(\cdot)\big) + \check{\Gamma}\big(\psi(\cdot)\big)\Big]^+ \int\limits_a^b \check{\Phi}^*(t)\, f(t)\, dt$$
матричной периодической задачи для функционально-дифференциального уравнения с запаздыванием (2), условия существования которого определяет следующая лемма.

Лемма. *Для фиксированной матрицы $\psi(t)$ при условии (8) наилучшее по методу наименьших квадратов решение матричной периодической задачи для функционально-дифференциального уравнения с запаздыванием (1) имеет вид*
$$Z(t, \psi) = \mathcal{M}^{-1}\big[\psi(t)c\big], \qquad c = \Big[\Gamma\big(\psi(\cdot)\big) + \check{\Gamma}\big(\psi(\cdot)\big)\Big]^+ \int\limits_a^b \check{\Phi}^*(t)\, f(t)\, dt.$$

Заметим, что в случае $\psi(0) - \psi(T) = 0$ вид наилучшего по методу наименьших квадратов решения матричной периодической задачи для функционально-дифференциального уравнения с запаздыванием (2) существенно упрощается:
$$Z(t, \varphi) = \mathcal{M}^{-1}\big[\psi(t)c\big], \qquad c = \Big[\Gamma\big(\psi(\cdot)\big)\Big]^+ \int\limits_a^b \check{\Phi}^*(t)\, f(t)\, dt.$$

В случае разрешимости матричной периодической задачи для функционально-дифференциального уравнения с запаздыванием при надлежащем выборе матрицы $\psi(t)$ наилучшее по методу наименьших квадратов решение $Z(t,\varphi)$ матричной периодической задачи для функционально-дифференциального уравнения с запаздыванием (1) является точным решением. Утверждение доказанной леммы является обобщением соответствующих утверждений [14] на случай матричной периодической задачи для функционально-дифференциального уравнения с сосредоточенным запаздыванием (1).

Пример 3. Найдем наилучшее по методу наименьших квадратов решение матричной периодической задачи для функционально-дифференциального уравнения с запаздыванием (6).

Обозначим (9×27)-мерную матрицу

$$\psi(t) := I_9 \otimes (1 \sin 3t \cos 3t).$$

Поскольку $\psi(0)-\psi(T)=0,$ условие (8) определяет матрицу Грама

$$\Gamma\big(\psi(\cdot)\big) = \pi \mathrm{diag}\big(2 \quad 640 \quad 10 \quad 0 \quad 9 \quad 9 \quad 0 \quad 9 \quad 9 \quad 0 \quad 17 \\ 17 \quad 2 \quad 16 \quad 16 \quad 2 \quad 16 \quad 16 \quad 0 \quad 17 \quad 17 \quad 2 \quad 16 \quad 16 \quad 2 \quad 16 \quad 16\big) \in \mathbb{R}^{27\times 27},$$

а также ее ортопроектор

$$\mathcal{P}_\psi := P_{[\Gamma(\psi(\cdot))]^*} = \mathrm{diag}\big(0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\big) \in \mathbb{R}^{27\times 27}.$$

Поскольку условия (5) и (8) выполнены, находим наилучшее по методу наименьших квадратов решение матричной периодической задачи для уравнения (6) с запаздыванием $Z(t,\psi)$, являющееся периодичным и совпадающее с частным решением $G[F(s)](t)$, ранее полученным в примере 1.

Предложенная в статье схема исследования матричной периодической задачи для функционально-дифференциального уравнения с запаздыванием аналогично [15 – 19] может быть перенесена на дифференциально-алгебраические краевые задачи. С другой стороны, полученные в статье результаты могут быть аналогично [1, 20 – 24] перенесены на матричные краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений в абстрактных пространствах.

Авторы выражают сердечную благодарность академику НАН Украины А. М. Самойленко за обсуждение полученных результатов, положенных в основу данной статьи.

Література

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. 2th ed. – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 p.
2. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздыванием. – М.: Гостехиздат, 1951. – 256 с.
3. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Лекции по теории колебаний систем с запаздыванием. – К.: Изд-во Киев. ун-та, 1969. – 309 с.
4. *Рубаник В. П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. – М.: Наука, 1969. – 287 с.
5. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Периодические решения нелинейных автономных систем с запаздыванием в критических случаях // Докл. АН Украины. – 1991. – № 9. – С. 9 – 13.

6. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
7. *Бойчук А. А., Кривошея С. А.* Критическая периодическая краевая задача для матричного уравнения Риккати // Дифференц. уравнения. – 2001. – **37**, № 4. – С. 439 – 445.
8. *Чуйко С. М.* Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения // Динам. системы. – 2014. – **4** (**32**), № 1-2. – С. 101 – 107.
9. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 318 с.
10. *Чуйко С. М.* Обобщенный оператор Грина нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения. – 2016. – **60**, № 8. – С. 74 – 83.
11. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф.* Построение решений краевых задач для дифференциальных систем с запаздыванием в критических случаях // Докл. АН УССР. Сер А. – 1990, № 6. – С. 3 – 7.
12. Чуйко С. М., Чуйко А. С. Про наближене розв’язання періодичних крайових задач з запізненням методом найменших квадратів у критичному випадку // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, № 3. – С. 419 – 433.
13. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с.
14. *Чуйко С. М., Чуйко А. С.* Про наближене розв’язування крайових задач методом найменших квадратів // Нелінійні коливання. – 2008. – **11**, № 4. – С. 554 – 573.
15. *Campbell S. L.* Singular systems of differential equations. – San Francisco; London; Melbourne: Pitman Adv. Publ. Program, 1980. – 178 p.
16. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. – К.: Вища шк., 2000. – 296 с.
17. *Власенко Л. А., Перестюк Н. А.* Оценки скорости сходимости в обыкновенных дифференциальных уравнениях, находящихся под воздействием случайных процессов с быстрым временем // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 4. – С. 458 – 468.
18. *Boichuk A. A., Pokutnyi A. A., Chistyakov V. F.* Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations // Comput. Math. Math. Phys. – 2013. – **53**. – № 6. – P. 777 – 788.
19. *Чуйко С. М.* Обобщенное матричное дифференциально-алгебраическое уравнение // Укр. мат. вісн. – 2015. – **12**, № 1. – С. 11 – 26.
20. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 277 с.
21. *Чуйко С. М.* Оператор Грина обобщенной матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи // Сиб. мат. журн. – 2015. – **56**, № 4. – С. 942 – 951.
22. *Панасенко Е. В., Покутный А. А.* Краевые задачи для уравнения Ляпунова в банаховом пространстве // Нелінійні коливання. – 2016. – **19**, № 2. – С. 240 – 246.
23. *Чуйко С. М.* Линейная краевая задача для матричного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. – 2016. – **52**, № 11. – С. 1578 – 1579.
24. *Chuiko S. M.* On the solvability of a matrix boundary-value problem // J. Math. Sci. – 2018. – **232**, № 5. – P. 794 – 798.

Получено 07.10.17