УДК 517.956

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

В. А. Літовченко

Чернівец. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича
вул. Коцюбинського, Чернівці, 58012, Україна
e-mail: v.litovchenko@chnu.edu.ua

We define a class of parabolic systems of equations with partial derivatives and substantiate their $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-parabolicity. We investigate the properties of the spacial behavior of the fundamental solution to the Cauchy problem for $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-parabolic systems with time-dependent coefficients and give examples of such systems.

Определен один класс параболических систем уравнений с частными производными и обоснована их $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболичность. Исследованы свойства относительно пространственной переменной фундаментального решения задачи Коши для $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболических систем с зависимыми от времени коэффициентами, а также приведены примеры таких систем.

Вступ. У [1] Г. Є. Шилов сформулював нове означення параболічності систем рівнянь із частинними похідними, яке узагальнює поняття параболічності за Г. І. Петровським [2] і приводить до істотного розширення класу Петровського систем вигляду

$$\partial_t u(t;x) = P(t; i\partial_x)u(t;x), \qquad (t;x) \in \Pi_{(\tau;T]} := (\tau;T] \times \mathbb{R}^n, \quad \tau \in [0;T), \tag{1}$$

де u — невідома вектор-функція вимірності m, а $P(t;i\partial_x)$ — матричний диференціальний вираз порядку $p \in \mathbb{N}$ із залежними від часу t коефіцієнтами.

У випадку, коли коефіцієнти системи (1) сталі, тобто $P(t;i\partial_x) \equiv P(i\partial_x)$, параболічність за Шиловим означується подібно до параболічності за Петровським — шляхом накладання умов на дійсні частини характеристичних чисел $\lambda_j(\cdot)$ матричного символу $P(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{C}^n$, диференціального виразу системи (1):

$$\exists h > 0 \quad \exists \delta_0 > 0 \quad \exists \delta_1 \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n\colon \max_{j \in \mathbb{N}_m} \mathrm{Re}\lambda_j(\xi) \leq -\delta_0 \|\xi\|^h + \delta_1, \tag{2}$$

де h — показник параболічності системи (1), $0 < h \leq p$, $\mathbb{N}_m\colon = \{1; 2; \ldots; m\}$, $\|\cdot\| := (\cdot,\cdot)^{1/2}$, а $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток у $\mathbb{R}^n$.

Якщо ж коефіцієнти системи (1) залежать від t (неперервно), то, на відміну від параболічності за Петровським, параболічність за Шиловим цієї системи з показником параболічності h означає виконання наступної оцінки для матриціанта $\Theta_\tau^t(\cdot)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, відповідної двоїстої за Фур'є системи [3, с. 133]:

$$|\Theta_\tau^t(\xi)| \leq c(1 + (t-\tau)\|\xi\|^p)^{m-1} e^{-\delta(t-\tau)\|\xi\|^h}, \quad (t;\xi) \in \Pi_{(\tau;T]}. \tag{3}$$

Зазначимо, що для параболічних за Петровським систем (1) умова (3) — характерна властивість, яка є прямим наслідком із відповідної умови параболічності типу (2). Для параболічних систем (1) із залежними від t коефіцієнтами при $p \neq h$ підтвердити цей факт класичними засобами теорії параболічних систем, взагалі кажучи, не вдається. Тому важливою є інформація про багатство класу Шилова систем із коефіцієнтами, залежними від t, зокрема, про приклади таких систем, які не є параболічними за Петровським.

Специфіка означення параболічності як за Петровським, так і за Шиловим не передбачає індивідуальних характеристик параболічності системи окремо за кожною компонентою її просторової змінної x: система характеризується за сукупністю компонент у цілому, шляхом їх урівноваження. Таке абстрагування, з одного боку, позбавляє можливості одержати точні результати на рівні кожної, окремо взятої, компоненти, а з іншого — звужує клас систем із характерними властивостями для класичного рівняння теплопровідності. У зв'язку з цим у [4] запропоновано узагальнення параболічності за Шиловим — так звану $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболічність. У системах з такою параболічністю диференціювання за різними компонентами просторової змінної мають, взагалі кажучи, різну вагу відносно диференціювання за змінною t, при цьому кожній такій компоненті відповідає свій показник параболічності. У [4] також обґрунтовано, що клас $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболічних систем повністю охоплює клас Шилова систем.

У даній роботі наводиться один клас систем рівнянь із частинними похідними, коефіцієнти яких залежать від t; обґрунтовується їх $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболічність та будується і досліджується фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) для $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболічних систем із неперервно залежними від часу коефіцієнтами. Зазначений клас систем характеризує багатство як $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболічного класу, так і класу Шилова систем із залежними від t коефіцієнтами.

Дослідження властивостей ФРЗК для параболічних за Шиловим систем із сталими коефіцієнтами проводились у працях [3 – 9], а з коефіцієнтами, залежними від t — у [10, 11].

1. Основні поняття, означення. Нехай $\overrightarrow{p} := (p_1, \ldots, p_n)$ — вектор з натуральними координатами, $\overrightarrow{h} := (h_1, \ldots, h_n)$, $0 < h_j \leq p_j$, $j \in \mathbb{N}_n$, i — уявна одиниця, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ — відповідно дійсний і комплексний простори розмірності n, $\mathbb{R} := \mathbb{R}^1$, $\mathbb{Z}_+^n$ — множина всіх n-вимірних мультиіндексів;

$$|x+iy| := (x^2+y^2)^{1/2}, \quad \{x, y\} \subset \mathbb{R}, \qquad \left|(a_{lj})_{l,j=1}^m\right| := \max_{\{l,j\} \subset \mathbb{N}_m} |a_{lj}|;$$

$$z^l := z_1^{l_1} \ldots z_n^{l_n}, \qquad |z|^l := |z_1|^{l_1} \ldots |z_n|^{l_n},$$

якщо

$$z := (z_1; \ldots; z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad l := (l_1; \ldots; l_n) \in \mathbb{Z}_+^n; \quad \overrightarrow{0} := (0; \ldots 0), \quad \overrightarrow{1} := (1; \ldots 1).$$

Просторові точки та мультиіндекси, як вектори, позначатимемо традиційно — без стрілочки зверху; запис $\overrightarrow{\alpha} \mho \overrightarrow{\beta}$, де $\mho$ – деяке відношення, означатиме, що це відношення виконується для всіх відповідних координат векторів $\overrightarrow{\alpha}$ і $\overrightarrow{\beta}$, при цьому, якщо $q := (q_1; \ldots; q_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $\{\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}\} \subset \mathbb{R}^n$, то $q^{q\overrightarrow{\beta}} := q_1^{q_1\beta_1} \ldots q_n^{q_n\beta_n}$, $|\overrightarrow{\alpha}|_+^{\overrightarrow{\beta}} := |\alpha_1|^{\beta_1} + \ldots + |\alpha_n|^{\beta_n}$, $|\overrightarrow{\alpha}|_+ := |\overrightarrow{\alpha}|_+^{\overrightarrow{1}}$ — скалярні величини.

Розглянемо систему (1) з матричним диференціальним виразом

$$P(t; i\partial_x) = \left(\sum_{|k/\overrightarrow{p}|_+ \leq 1} a_k^{lj}(t) i^{|k|_+} \partial_x^k \right)_{l,j=1}^m$$

векторного порядку $\vec{p}$. У випадку, коли коефіцієнти системи (1) сталі, говоритимемо, що ця система є $\{\vec{p}, \vec{h}\}$-параболічною на множині $\Pi_{(\tau;T]}$ [4], якщо існують такі сталі $\delta_0 > 0$ і $\delta_1 \geq 0$, що для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ виконується оцінка

$$\max_{j \in \mathbb{N}_m} \operatorname{Re} \lambda_j(\xi) \leq -\delta_0 |\xi|_+^{\vec{h}} + \delta_1. \tag{4}$$

Тут $\lambda_j(\cdot)$ — характеристичні числа матричного символу $P(\cdot)$, тобто розв'язки рівняння

$$\det(P(\sigma) - \lambda E) = 0, \quad \sigma \in \mathbb{C}^n,$$

де E — одинична матриця порядку m.

Якщо коефіцієнти системи (1) залежать від t, то аналогічно до означення параболічності за Шиловим називатимемо цю систему $\{\vec{p}, \vec{h}\}$-параболічною на $\Pi_{(\tau;T]}$, якщо справджується нерівність

$$|\Theta_\tau^t(\xi)| \leq c(1 + |\xi|_+^{\vec{\gamma}})^{m-1} e^{-\delta(t-\tau)|\xi|_+^{\vec{h}}}, \qquad (t;\xi) \in \Pi_{(\tau;T]}, \quad \tau \in [0;T), \tag{5}$$

де $c > 0$ і $\delta > 0$ не залежать від t і ξ, $\vec{\gamma} := \vec{p} - \vec{h}$, а $\Theta_\tau^t(\cdot)$ — матрицант відповідної двоїстої за Фур'є системи, тобто [12]

$$\Theta_\tau^t(\xi) = E + \sum_{r=1}^{\infty} \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \ldots \int_\tau^{t_{r-1}} \left(\prod_{j=1}^r P(t_j;\xi) \right) dt_r \ldots dt_2 dt_1. \tag{6}$$

Безпосередньо з твердження теореми 1 із [3, с. 77], умови параболічності (4) та структури матрицанта $\Theta_\tau^t(\cdot) = e^{(t-\tau)P(\cdot)}$ випливає виконання оцінки (5) для системи (1) і у випадку сталих коефіцієнтів.

За умови неперервності коефіцієнтів системи (1) на $[0;T]$ дістаємо оцінку

$$|P(t;\sigma)| \leq c(1 + |\sigma|_+^{\vec{p}}), \qquad 0 \leq t \leq T, \quad \sigma \in \mathbb{C}^n,$$

завдяки якій із (6) знаходимо, що

$$|\Theta_\tau^t(\sigma)| \leq c_2 e^{\delta_2 (t-\tau)|\sigma|_+^{\vec{p}}}, \qquad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \sigma \in \mathbb{C}^n \tag{7}$$

(тут c_2 і δ_2 — додатні сталі, незалежні від τ, t і σ).

Точний експоненціальний порядок зростання матрицанта $\Theta_\tau^t(\cdot)$ у просторі $\mathbb{C}^n$ назвемо зведеним порядком системи (1) і позначимо через $\vec{p_0}$. Очевидно, що $\vec{p_0} \leq \vec{p}$.

Урахувавши тепер оцінки (5) і (7), а також відповідні твердження теорем типу Фрагмена – Ліндельофа з [13, с. 285] одержуємо існування векторів $\vec{\nu}$ таких, що в області

$$\mathbb{K}_{\vec{\nu}} := \left\{ (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}^n \colon |\eta_j| \leq c_j (1 + |\xi_j|)^{\nu_j},\ c_j > 0,\ j \in \mathbb{N}_n \right\}$$

виконується оцінка

$$|\Theta_\tau^t(\xi + i\eta)| \leq c_3 (1 + |\xi|_+^{\vec{\gamma}})^{m-1} e^{-\delta_3 (t-\tau)|\xi|_+^{\vec{h}}}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T,$$

з оціночними сталими c_3 і δ_3, незалежними від τ, t, ξ і η. Вектор $\vec{\mu}$ з координатами $\mu_j := \sup \nu_j$, $j \in \mathbb{N}_n$, назвемо родом системи (1). Із досліджень, проведених у [13], випливає, що $\vec{1} - (\vec{p_0} - \vec{h}) \leq \vec{\mu} \leq \vec{1}$.

2. Один клас параболічних систем. Розглянемо систему рівнянь

$$\partial_t u(t;x) = \{P_0(i\partial_x) + P_1(t;i\partial_x)\}u(t;x), \qquad (t;x) \in \Pi_{(\tau;T]}, \quad \tau \in [0;T), \tag{8}$$

порядку $\overrightarrow{p}$, у якій $u := \mathrm{col}\,(u_1, \ldots, u_m)$,

$$P_0(i\partial_x) := \left(\sum_{|k/\overrightarrow{p}|_+ \le 1} a_k^{lj} i^{|k|_+} \partial_x^k \right)_{l,j=1}^m, \qquad P_1(t;i\partial_x) := \left(\sum_{|k/\overrightarrow{p_1}|_+ \le 1} a_k^{lj}(t) i^{|k|_+} \partial_x^k \right)_{l,j=1}^m.$$

Припускатимемо, що відповідна система

$$\partial_t u(t;x) = P_0(i\partial_x)u(t;x), \quad (t;x) \in \Pi_{(\tau;T]}, \tag{9}$$

на множині $\Pi_{(\tau;T]}$ є $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболічною зі сталими коефіцієнтами, а коефіцієнти диференціального виразу $P_1(t;i\partial_x)$ — неперервні комплекснозначні функції, визначені на $[0;T]$, при цьому вектори $\overrightarrow{p} = (p_1, \ldots p_n)$, $\overrightarrow{h} = (h_1, \ldots h_n)$ і $\overrightarrow{p_1} = (p_{11}, \ldots p_{1n})$ задовольняють умову (A):

$$0 \le p_{1j} + (p_l - h_l)(m-1) < \min\{h_j, h_l\} \quad \forall \{l,j\} \subset \mathbb{N}_n.$$

Прикладом системи (8) із умовою (A) є система

$$\begin{cases} \partial_t u_1 = -\left\{a\partial_{x_1}^4 + b\partial_{x_2}^4 + c_1(t)\partial_{x_1}\partial_{x_2} + c_2(t)\right\} u_1 + \left\{\partial_{x_1}^5 + 2i\partial_{x_1}^2\partial_{x_2}^2 + c_3(t)\partial_{x_2}\right\} u_2, \\ \partial_t u_2 = \left\{\partial_{x_1}^5 + i\partial_{x_1}^2\partial_{x_2}^2 + c_4(t)\partial_{x_2}^2\right\} u_1 - \left\{a\partial_{x_1}^4 - i\partial_{x_1}^2\partial_{x_2}^2 + b\partial_{x_2}^4 + c_5(t)\partial_{x_1}^2\right\} u_2, \end{cases}$$

при $m = n = 2$, $a > 0$ і $b > 0$, якщо $c_j(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}_5$, — неперервні на $[0;T]$ функції.

Дійсно, поклавши

$$P_0(i\partial_x) = \begin{pmatrix} -a\partial_{x_1}^4 - b\partial_{x_2}^4 & \partial_{x_1}^5 + 2i\partial_{x_1}^2\partial_{x_2}^2 \\ \partial_{x_1}^5 + i\partial_{x_1}^2\partial_{x_2}^2 & -a\partial_{x_1}^4 + i\partial_{x_1}^2\partial_{x_2}^2 + b\partial_{x_2}^4 \end{pmatrix},$$

$$P_1(t;i\partial_x) = \begin{pmatrix} c_1(t)\partial_{x_1}\partial_{x_2} + c_2(t) & c_3(t)\partial_{x_2} \\ c_4(t)\partial_{x_2}^2 & c_5(t)\partial_{x_1}^2 \end{pmatrix},$$

переконуємося, що відповідна система (9) є $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболічною з $\overrightarrow{p} = (5;4)$ і $\overrightarrow{h} = (4;4)$, а $\overrightarrow{p_1} = (2;2)$ — порядок диференціального виразу $P_1(t;i\partial_x)$. Для зазначених векторів $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{h}$ і $\overrightarrow{p_1}$, очевидно, виконується умова (A).

Теорема 1. *Нехай (8) — система з неперервними коефіцієнтами, для якої виконується умова (A). Тоді для матриціанта* $\Theta_\tau^t(\cdot)$ *відповідної двоїстої за Фур'є системи на множині* $\Pi_{(\tau;T]}$, $\tau \in [0;T)$, *справджується оцінка (5).*

Доведення. Випишемо відповідну двоїсту за Фур'є систему до (8):

$$\partial_t v(t;\xi) = \{P_0(\xi) + P_1(t;\xi)\}v(t;\xi), \quad (t;\xi) \in \Pi_{(\tau;T]}. \tag{10}$$

За умови неперервності коефіцієнтів, матриціант $\Theta_\tau^t(\cdot)$ є єдиним розв'язком задачі Коші для системи (10) із початковою умовою

$$v(t;\cdot)\,|_{t=\tau} = E. \tag{11}$$

Тоді правильною є рівність

$$\partial_t \Theta_\tau^t(\xi) = P_0(\xi)\Theta_\tau^t(\xi) + Q(\tau, t; \xi), \tag{12}$$

у якій

$$Q(\tau, t; \xi) := P_1(t; \xi)\Theta_\tau^t(\xi).$$

Розв'язавши задачу Коші (12), (11), одержимо таке зображення:

$$\Theta_\tau^t(\xi) = e^{(t-\tau)P_0(\xi)} + \int\limits_\tau^t e^{(t-\beta)P_0(\xi)} Q(\tau, \beta; \xi)d\beta, \qquad (t; \xi) \in \Pi_{(\tau;T]}, \quad \tau \in [0; T).$$

Звідси, урахувавши виконання оцінки (5) для $e^{(t-\tau)P_0(\cdot)}$, оскільки $e^{(t-\tau)P_0(\cdot)}$ — матрицант двоїстої за Фур'є системи до (9), а також нерівність

$$|Q(\tau, t; \xi)| \le c_0(1 + |\xi|_+^{\overrightarrow{p}_1})|\Theta_\tau^t(\xi)|, \qquad (t; \xi) \in \Pi_{(\tau;T]}, \quad \tau \in [0; T)$$

(тут додатна стала c_0 не залежить від τ, t і ξ), одержуємо оцінку

$$\left|\Theta_\tau^t(\xi)\right| \le c\left(1 + |\xi|_+^{\overrightarrow{\gamma}}\right)^{m-1} e^{-\delta(t-\tau)|\xi|_+^{\overrightarrow{h}}} +$$

$$+ c_1\left(1 + |\xi|_+^{\overrightarrow{\gamma}}\right)^{m-1}\left(1 + |\xi|_+^{\overrightarrow{p_1}}\right) \int\limits_\tau^t e^{-\delta(t-\beta)|\xi|_+^{\overrightarrow{h}}} \left|\Theta_\tau^\beta(\xi)\right| d\beta,$$

з якої приходимо до співвідношення

$$\frac{|\Theta_\tau^t(\xi)| e^{\delta(t-\tau)|\xi|_+^{\overrightarrow{h}}}}{\big(1 + |\xi|_+^{\overrightarrow{\gamma}}\big)^{m-1}} \le c + c_1\big(1 + |\xi|_+^{\overrightarrow{\gamma}}\big)^{m-1}\big(1 + |\xi|_+^{\overrightarrow{p_1}}\big) \int\limits_\tau^t \frac{|\Theta_\tau^\beta(\xi)| e^{\delta(\beta-\tau)|\xi|_+^{\overrightarrow{h}}}}{\big(1 + |\xi|_+^{\overrightarrow{\gamma}}\big)^{m-1}} d\beta.$$

Скориставшись тепер лемою Гронуолла [14, с. 39], одержимо

$$|\Theta_\tau^t(\xi)| \le c\left(1 + |\xi|_+^{\overrightarrow{\gamma}}\right)^{m-1} e^{-(t-\tau)\left(\delta|\xi|_+^{\overrightarrow{h}} - c_1(1+|\xi|_+^{\overrightarrow{\gamma}})^{m-1}(1+|\xi|_+^{\overrightarrow{p_1}})\right)}, \qquad (t; \xi) \in \Pi_{(\tau;T]}, \quad \tau \in [0; T).$$

Звідси, зваживши на умову (А), приходимо до існування додатних сталих c і δ, з якими для всіх $(t; \xi) \in \Pi_{(\tau;T]}$, $\tau \in [0; T)$, виконується оцінка

$$\left|\Theta_\tau^t(\xi)\right| \le c\left(1 + |\xi|_+^{\overrightarrow{\gamma}}\right)^{m-1} e^{-\delta(t-\tau)|\xi|_+^{\overrightarrow{h}}}.$$

Теорему 1 доведено.

Наслідок. *Система (8) із умовою (А) є $\left\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\right\}$-параболічною системою із коефіцієнтами, залежними від t.*

3. Властивості ФРКЗ. Розглядатимемо тут $\left\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\right\}$-параболічну систему (1) із коефіцієнтами, неперервно залежними від t на множині $[0; T]$. Розв'язуючи цю систему методом перетворення Фур'є, одержуємо таке зображення фундаментального розв'язку її задачі Коші:

$$G(\tau, t; \cdot) = F^{-1}[\Theta_\tau^t(\xi)](\tau, t; \cdot), \quad 0 \le \tau < t \le T$$

(тут $F^{-1}[\cdot]$ — обернене перетворення Фур'є, а $\Theta_\tau^t(\cdot)$ — відповідний матрицант (6)).

Правильне таке твердження.

Теорема 2. *Нехай система (1) є* $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$*-параболічною з неперервно залежними від* t *коефіцієнтами. Тоді ФРЗК для цієї системи є нескінченно диференційовною функцією за просторовою змінною на множині* $\mathbb{R}^n$, *причому*

$$\exists\{c, B, \delta\} \subset (0; +\infty) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \quad \forall \tau \in [0; T) \quad \forall t \in (\tau; T] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n:$$

$$\left|\partial_x^k G(\tau, t; x)\right| \le c(t-\tau)^{-\left|(\overrightarrow{1}+k)/\overrightarrow{h}\right|_+} \left(\sum_{j=1}^n (t-\tau)^{-\gamma_j/h_j}\right)^{m-1} B^{|k|_+} k^{k/\overrightarrow{h}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\delta \sum_{j=1}^n \left(|x_j|/(t-\tau)^{\alpha_j}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_j}}\right\},$$

де

$$\overrightarrow{\alpha} := \overrightarrow{\mu}/\overrightarrow{\nu}, \qquad \text{а} \qquad \overrightarrow{\nu} := \begin{cases} \overrightarrow{p_0}, & \overrightarrow{\mu} > \overrightarrow{0}, \\ \overrightarrow{h}, & \overrightarrow{\mu} \le \overrightarrow{0}. \end{cases}$$

Доведення. Розглянемо допоміжну матричну функцію

$$\varphi_{\tau,t}^k(x) := (t-\tau)^{\left|k/\overrightarrow{h}\right|_+} \left(\sum_{j=1}^n (t-\tau)^{-\gamma_j/h_j}\right)^{1-m} x^k \Theta_\tau^t(x),$$

$$k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \le \tau < t \le T,$$

яка, очевидно, продовжується в комплексний простір $\mathbb{C}^n$ до цілої аналітичної функції при кожному фіксованому k, t і τ.

Безпосередньо з оцінки (5) одержуємо, що

$$|\varphi_{\tau,t}^k(x)| \le c\left(\prod_{j=1}^n \left((t-\tau)|x_j|^{h_j}\right)^{k_j/h_j}\right)\left(\left(\sum_{j=1}^n (t-\tau)^{-\gamma_j/h_j}\right)^{-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{|x_1|^{\gamma_1} + \ldots + |x_n|^{\gamma_n}}{(t-\tau)^{-\gamma_1/h_1} + \ldots + (t-\tau)^{-\gamma_n/h_n}}\right)^{m-1} e^{-\delta(t-\tau)|x|_+^{\overrightarrow{h}}} \le$$

$$\le c\left(\prod_{j=1}^n \sup_{\xi_j \ge 0}\left\{\xi_j^{k_j/h_j} e^{-\frac{\delta}{4}\xi_j}\right\}\right) \times$$

$$\times \left(\left(\sum_{j=1}^n (t-\tau)^{-\gamma_j/h_j}\right)^{-1} + \sum_{j=1}^n \sup_{\xi_j \ge 0}\left\{\xi_j^{\gamma_j/h_j} e^{-\frac{\delta}{4}\xi_j}\right\}\right)^{m-1} e^{-\frac{\delta}{2}(t-\tau)|x|_+^{\overrightarrow{h}}}.$$

Звідси, врахувавши оцінку

$$\left(\sum_{j=1}^n (t-\tau)^{-\gamma_j/h_j}\right)^{-1} \le \left(\max\{1; T\}\right)^{\max\limits_{j\in\mathbb{N}_n}\{\gamma_j/h_j\}}, \quad 0 \le \tau < t \le T, \tag{13}$$

а також рівність

$$\sup_{\xi \geq 0} \left\{ \xi^{\beta} e^{-\delta \xi} \right\} = \left(\frac{\beta}{e\delta} \right)^{\beta}, \qquad \beta > 0, \quad \delta > 0, \tag{14}$$

приходимо до існування таких додатних сталих $c_1,\ B_1$ і δ_1, що для всіх $x \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{Z}_+^n$, $\tau \in [0;T)$ і $t \in (\tau;T]$ виконується нерівність

$$\left|\varphi_{\tau,t}^{k}(x)\right| \leq c_1 B_1^{|k|_+} k^{k/\overrightarrow{h}} e^{-\delta_1 (t-\tau)|x|_+^{\overrightarrow{h}}}.$$

Подібним способом, зважаючи на означення роду $\overrightarrow{\mu}$ параболічної системи (1), одержимо таку оцінку матричної функції $\varphi_{\tau,t}^{k}(\cdot)$ у відповідній області $\mathbb{K}_{\overrightarrow{\mu}} \subset \mathbb{C}^n$:

$$\left|\varphi_{\tau,t}^{k}(x+iy)\right| \leq c_2 B_2^{|k|_+} k^{k/\overrightarrow{h}} e^{-\delta_2 (t-\tau)|x|_+^{\overrightarrow{h}}}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad 0 \leq \tau < t \leq T \tag{15}$$

(тут додатні сталі $c_2,\ B_2$ і δ_2 не залежать від $k,\ x,\ y,\ \tau$ і t). Крім цього, використовуючи оцінки (7) і (13) та рівність (14), також одержуємо нерівність

$$\left|\varphi_{\tau,t}^{k}(z)\right| \leq c_3 B_3^{|k|_+} k^{k/\overrightarrow{h}} e^{\delta_3 (t-\tau)|z|_+^{\overrightarrow{p_0}}}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad 0 \leq \tau < t \leq T,$$

з оціночними сталими, не залежними від $k,\ z,\ \tau$ і t.

Отже, при $\overrightarrow{\mu} > \overrightarrow{0}$ для функції $\varphi_{\tau,t}^{k}(\cdot)$ виконуються всі умови теореми 2 з [13, с. 256, 284]. Тоді, згідно з твердженням цієї теореми,

$$\exists\{c_0, B_0, \delta_0, \delta_1\} \subset (0;+\infty) \quad \forall z = x+iy \in \mathbb{C}^n \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \quad \forall \tau \in [0;T) \quad \forall t \in (\tau;T]:$$

$$\left|\varphi_{\tau,t}^{k}(z)\right| \leq c_0 B_0^{|k|_+} k^{k/\overrightarrow{h}} e^{-(t-\tau)\left(\delta_0 |x|_+^{\overrightarrow{h}} - \delta_1 |y|_+^{\overrightarrow{p_0}/\overrightarrow{\mu}}\right)}.$$

Звідси, розмірковуючи так само, як і при доведенні теореми 3 з [13, с. 259], виділяючи при цьому скрізь залежність від $t,\ \tau$ і k, приходимо до таких оцінок похідних на $\mathbb{R}^n$ матричної функції $\varphi_{\tau,t}^{k}(\cdot)$ при $\overrightarrow{\mu} > \overrightarrow{0}$:

$$\left|\partial_x^q \varphi_{\tau,t}^{k}(x)\right| \leq c(t-\tau)^{\left|q\overrightarrow{\mu}/\overrightarrow{p_0}\right|_+} A^{|q|_+} B^{|k|_+} k^{k/\overrightarrow{h}} q^{q\left(\overrightarrow{1}-\overrightarrow{\mu}/\overrightarrow{p_0}\right)} e^{-\delta(t-\tau)|x|_+^{\overrightarrow{h}}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{16}$$

де $\{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+^n,\ \tau \in [0;T)$ і $t \in (\tau;T]$, а додатні сталі $c,\ A,\ B$ і δ не залежать від $t,\ \tau,\ x$, k і q.

Якщо при $\overrightarrow{\mu} \leq \overrightarrow{0}$ діяти, як і при доведенні теореми 4 з [13, с. 264], використовуючи при цьому оцінку (15) та виділяючи скрізь залежність від $t,\ \tau,\ x,\ k$ і q, то приходимо до існування додатних сталих $c,\ A,\ B$ і δ таких, що для всіх $\{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+^n,\ x \in \mathbb{R}^n,\ \tau \in [0;T)$ і $t \in (\tau;T]$ виконується оцінка

$$\left|\partial_x^q \varphi_{\tau,t}^{k}(x)\right| \leq c(t-\tau)^{|q\overrightarrow{\mu}/\overrightarrow{h}|_+} A^{|q|_+} B^{|k|_+} k^{k/\overrightarrow{h}} q^{q(\overrightarrow{1}-\overrightarrow{\mu}/\overrightarrow{h})} e^{-\delta(t-\tau)|x|_+^{\overrightarrow{h}}}. \tag{17}$$

Безпосередньо з оцінок (16), (17) та означення матричної функції $\varphi_{\tau,t}^{k}(\cdot)$, а також із рівності

$$(ix)^q \partial_x^k G(\tau,t;x) = (-i)^{|k|_+} (2\pi)^{-n} (t-\tau)^{-|k/\overrightarrow{h}|_+} \times$$

$$\times \left(\sum_{j=1}^{n} (t-\tau)^{-\gamma_j/h_j} \right)^{m-1} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_\xi^q \varphi_{\tau,t}^{k}(\xi) e^{-i(x,\xi)} d\xi$$

одержуємо, що

$$\left|\partial_x^k G(\tau,t;x)\right| \le c_0(t-\tau)^{-\left|\left(\overrightarrow{1}+k\right)/\overrightarrow{h}\right|_+}\left(\sum_{j=1}^{n}(t-\tau)^{-\gamma_j/h_j}\right)^{m-1} B^{|k|_+}k^{k/\overrightarrow{h}}\times$$

$$\times\left(\prod_{j=1}^{n}\inf_{q_j}\left\{(t-\tau)^{q_j\mu_j/\nu_j}A^{q_j}q_j^{q_j(1-\mu_j/\nu_j)}|x_j|^{-q_j}\right\}\right)\le$$

$$\le c(t-\tau)^{-\left|(\overrightarrow{1}+k)/\overrightarrow{h}\right|_+}\left(\sum_{j=1}^{n}(t-\tau)^{-\gamma_j/h_j}\right)^{m-1} B^{|k|_+}k^{k/\overrightarrow{h}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\delta\sum_{j=1}^{n}\left(|x_j|/(t-\tau)^{\alpha_j}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_j}}\right\},\qquad k\in\mathbb{Z}_+^n,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad 0\le\tau<t\le T,$$

при цьому оціночні сталі $c,\ B$ і δ не залежать від $t,\ \tau,\ k$ і x.

Теорему 2 доведено.

Література

1. *Шилов Г. Е.* Об условиях корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Успехи мат. наук. – 1955. – **10**, № 4. – С. 89 – 100.
2. *Petrowsky I. G.* Über das Cauchyche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen // Мат. сб. – 1937. – **2**, № 5. – С. 815 – 870.
3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
4. *Литовченко В. А.* Задача Коши для $\{\overrightarrow{p};\overrightarrow{h}\}$-параболических уравнений с коэффициентами, зависящими от времени // Мат. заметки. – 2005. – **77**, № 3. – С. 395 – 411.
5. *Житомирский Я. И.* Задача Коши для некоторых типов параболических по Г. Е. Шилову систем линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1959. – **23.** – С. 925 – 932.
6. *Эйдельман С. Д., Ивасишен С. Д., Порпер Ф. О.* Теоремы Лиувилля для параболических в смысле Шилова систем // Изв. вузов. Математика. – 1961. – № 6. – С. 169 – 179.
7. *Городецкий В. В.* Некоторые теоремы о стабилизации решений задачи Коши для параболических по Шилову систем в классах обобщенных функций // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 1. – С. 43 – 48.
8. *Литовченко В. А.* Задача Коши для параболических по Шилову уравнений // Сиб. мат. журн. – 2004. – **45**, № 4. – С. 809 – 821.
9. *Litovchenko V. A., Dovzhytska I. M.* The fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem for a class of parabolic systems of the Shilov type with variable coefficients // J. Math. Sci. – 2011. – **175**, № 4. – P. 450 – 476.
10. *Івасишен С. Д., Літовченко В. А.* Задача Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з додатним родом // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 8. – С. 1066 – 1087.
11. *Івасишен С. Д., Літовченко В. А.* Задача Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з недодатним родом // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 10. – С. 1330 – 1350.
12. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – 4-е изд. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
13. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
14. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.

Одержано 14.02.2017