УДК 517.925

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-ГО ПОРЯДКА С ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В. М. Евтухов, А. Г. Дорошенко

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова
ул. Дворянская, 2, Одесса, 65026, Украина

We establish conditions for the existence of some classes of solutions of the nonautonomous differential equations of the nth order with regularly varying nonlinearities and asymptotic representations of these solutions and their derivatives up to order $n-1$ inclusively as $t \uparrow \omega$ $(\omega \leq +\infty)$.

Встановлюються умови існування деяких класів розв'язків неавтономного диференціального рівняння n-го порядку з правильно змінними нелінійностями, а також асимптотичні при $t \uparrow \omega$ $(\omega \leq +\infty)$ зображення для таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно.

1. Введение. Рассматривается уравнение

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}\left(y^{(j)}\right), \tag{1.1}$$

где $\alpha_k \in \{-1; 1\}$, $k = \overline{1,m}$, $p_k\colon [a,\omega[\to]0,+\infty[$, $k = \overline{1,m}$, — непрерывные функции, $\varphi_{kj}\colon \triangle Y_j \to]0,+\infty[$, $k = \overline{1,m}$, $j = \overline{0,n-1}$, — непрерывные и правильно меняющиеся при $y^{(j)} \to Y_j$ функции порядков σ_{kj}, $-\infty < a < \omega \leq +\infty^*$, $\triangle Y_j$ — односторонняя окрестность Y_j, Y_j равно либо 0, либо $\pm\infty$.

Определение 1.1. *Непрерывная функция $\varphi\colon \Delta_Y \to]0,+\infty[$, где Y равно либо нулю, либо $\pm\infty$ и Δ_Y — односторонняя окрестность Y, называется правильно меняющейся при $y \to Y$, если существует число $\sigma \in \mathbb{R}$ такое, что*

$$\lim_{\substack{y\to Y \\ y\in\Delta Y}} \frac{\varphi(\lambda y)}{\varphi(y)} = \lambda^\sigma \quad \textit{для любого} \quad \lambda > 0.$$

При этом число σ называется порядком функции φ.

Частным случаем уравнения (1.1) является уравнение

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \varphi(y),$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p\colon [a,\omega[\to]0,+\infty[$ — непрерывная функция, а $\varphi\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0,+\infty[$ — непрерывная и правильно меняющаяся при $y \longrightarrow Y_0$ функция порядка σ, Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_0} — односторонняя окрестность Y_0. Для такого уравнения в работе В. М. Евтухова и А. М. Самойленко [1] изучалась асимптотика так называемых $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений. Результаты данного исследования в работах В. М. Евтухова и А. М. Клопота [2–4] частично распространены на случай уравнения вида (1.1).

---

*Считаем, что $a > 1$ при $\omega = +\infty$ и $\omega - 1 < a < \omega$ при $\omega < +\infty$.

Определение 1.2. *Решение уравнения (1.1) будем называть $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\lambda_0)$-решением, где $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0,\omega[\, \subset [a,\omega[$ и удовлетворяет условиям*

$$y^{(j)}(t) \in \Delta_{Y_j} \quad \textit{при} \quad t \in [t_0,\omega[, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(j)}(t) = Y_j, \quad j = \overline{0,n-1}, \tag{1.2}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left[y^{(n-1)}(t)\right]^2}{y^{(n)}(t)y^{(n-2)}(t)} = \lambda_0.$$

В [2–4] исследовалась ситуация, когда правая часть уравнения (1.1) на каждом из возможных типов $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\lambda_0)$-решений эквивалентна одному слагаемому, т. е. когда для некоторого $s \in \{1,\ldots,m\}$ справедливо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_k(t)\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(y^{(j)}(t))}{p_s(t)\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{sj}(y^{(j)}(t))} = 0 \quad \text{при} \quad k \in \{1,\ldots,m\}\setminus\{s\}.$$

Целью настоящей работы является распространение некоторых из этих результатов на случай, когда на изучаемом классе решений в правой части такого уравнения имеется несколько главных слагаемых, т. е. когда для некоторого $s \in \{1,\ldots,m\}$ и не пустого множества $\Gamma \subset \{1,\ldots,m\}$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_k(t)\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(y^{(j)}(t))}{p_s(t)\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{sj}(y^{(j)}(t))} = 0 \quad \text{при} \quad k \in \{1,\ldots,m\}\setminus\Gamma, \tag{1.3}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_k(t)\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(y^{(j)}(t))}{p_s(t)\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{sj}(y^{(j)}(t))} = c_{ks} = \mathrm{const} \ne 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{k} \in \Gamma. \tag{1.4}$$

При этом будут исследованы $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\lambda_0)$-решения, для которых

$$\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$$

и $\lambda_0 = 1$.

Выберем числа $b_j \in \Delta_{Y_j}$, $j = \overline{0,n-1}$, такими, чтобы выполнялись неравенства

$$|b_j| < 1 \quad \text{при} \quad Y_j = 0, \qquad b_j > 1 \ (b_j < -1) \quad \text{при} \quad Y_j = +\infty \ (Y_j = -\infty)$$

и в дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что

$$\Delta_{Y_j} = \begin{cases} [b_j, Y_j[, & \text{если} \quad \Delta_{Y_j} \quad \text{— левая окрестность} \quad Y_j, \\ ]Y_j, b_j], & \text{если} \quad \Delta_{Y_j} \quad \text{— правая окрестность} \quad Y_j, \end{cases} \qquad j = \overline{0,n-1}.$$

Из определения $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\lambda_0)$-решения уравнения (1.1) и выбора b_j, $j=\overline{0,n-1}$, ясно, что каждое такое решение и все его производные до порядка $n-1$ включительно отличны от нуля на промежутке $[t_0,\omega[$, причем на этом промежутке $(j+1)$-я производная данного решения положительна ($j\in\{0,\ldots,n-1\}$), если Δ_{Y_j} — левая окрестность Y_j, и отрицательна в противном случае. Учитывая этот факт, введем числа

$$\nu_{0j}=\operatorname{sign} b_j,$$
$$\nu_{1j}=\begin{cases}1, & \text{если}\quad \Delta_{Y_j}\quad \text{— левая окрестность}\quad Y_j,\\ -1, & \text{если}\quad \Delta_{Y_j}\quad \text{— правая окрестность}\quad Y_j,\end{cases}\qquad j=\overline{0,n-1}, \tag{1.5}$$

определяющие соответственно знаки j-й и $(j+1)$-й производных $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\lambda_0)$-решения. При этом заметим, что для $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\lambda_0)$-решения уравнения (1.1) выполняются условия

$$\nu_{0j}\nu_{1j}<0,\quad \text{если}\quad Y_j=0,\qquad \nu_{0j}\nu_{1j}>0,\quad \text{если}\quad Y_j=\pm\infty\quad j=\overline{0,n-2}. \tag{1.6}$$

2. Вспомогательные утверждения. В работе потребуются некоторые известные факты (см. [5]) из теории правильно меняющихся функций.

Определение 2.1. *Правильно меняющаяся при $y\to Y$ функция $L\colon \Delta_Y\longrightarrow\,]0,+\infty[$, где Y равно либо 0, либо $\pm\infty$ и Δ_Y — односторонняя окрестность Y, порядка $\sigma=0$ называется медленно меняющейся функцией.*

В силу определений 1.1 и 2.1 правильно меняющаяся при $y\to Y$ функция φ порядка σ представима в виде
$$\varphi(y)=|y|^\sigma L(y),$$
где $L(y)$ — медленно меняющаяся функция при $y\to Y$.

Из результатов, представленных в монографии [5, с. 9 – 24] (гл. 1, пп. 1, 3, 5), вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть $L\colon\Delta_Y\longrightarrow\,]0,+\infty[$ — медленно меняющаяся функция при $y\to Y$, где Y равно либо 0, либо $\pm\infty$. Тогда:*

1) для любого $\lambda>0$
$$\lim_{\substack{y\to Y\\ y\in\Delta_Y}}\frac{L(\lambda y)}{L(y)}=1$$
и это предельное соотношение выполняется равномерно по λ на любом промежутке $[c,d]\subset\subset]0,+\infty[$;

2) существует непрерывно дифференцируемая медленно меняющаяся при $y\to Y$ функция $L_0\colon\Delta_Y\longrightarrow]0,+\infty[$ такая, что

$$\lim_{\substack{y\to Y\\ y\in\Delta_Y}}\frac{L(y)}{L_0(y)}=1\qquad \text{и}\qquad \lim_{\substack{y\to Y\\ y\in\Delta_Y}}\frac{yL_0'(y)}{L_0(y)}=0; \tag{2.1}$$

3) справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\substack{y\to Y\\ y\in\Delta_y}}\frac{\ln L(y)}{\ln|y|}=0. \tag{2.2}$$

Определение 2.2 [4, с. 54]. *Будем говорить, что медленно меняющаяся при $y \to Y$ функция $L\colon \Delta_Y \to]0,+\infty[$ (Y равно либо 0, либо $\pm\infty$, Δ_Y — односторонняя окрестность Y) удовлетворяет условию S, если*

$$L\left(\nu e^{[1+o(1)]\ln|y|}\right) = L(y)[1+o(1)] \quad \textit{при} \quad y \to Y \quad (y \in \Delta_Y),$$

где $\nu = \operatorname{sign} y$.

Замечание 2.1 [1, с. 56]. Если функция $L\colon \Delta_Y \longrightarrow]0,+\infty[$ удовлетворяет условию S, а функция $y\colon [t_0,\omega[\longrightarrow \Delta_Y$ непрерывно дифференцируема и такова, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y, \qquad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\,[r+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

где r — отличная от нуля вещественная постоянная, ξ — непрерывно дифференцируемая в некоторой левой окрестности ω вещественная функция, для которой $\xi'(t) \neq 0$, то

$$L(y(t)) = L\left(\nu_0|\xi(t)|^r\right)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega \quad (\nu_0 = \operatorname{sign} y(t)).$$

Для того чтобы описать априорные свойства исследуемых типов $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\lambda_0)$-решений, положим

$$a_{0i} = (n-i)\lambda_0 - (n-i-1), \quad i = 1,\ldots,n, \quad \text{при} \quad \lambda_0 \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty. \end{cases} \tag{2.4}$$

Лемма 2.2 [1]. *Пусть $y\colon [t_0,\omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}$ — произвольное $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\lambda_0)$-решение уравнения (1.1). Тогда:*

1) если $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$, то при $t\uparrow\omega$ имеют место асимптотические соотношения

$$y^{(j)}(t) \sim \frac{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{\prod_{i=j+1}^{n-1} a_{0i}}\, y^{(n-1)}(t), \quad j = 0,1,\ldots,n-2, \qquad y^{(n)}(t) \sim \frac{y^{(n-1)}(t)}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}; \tag{2.5}$$

2) если $\lambda_0 = 1$, то

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{y''(t)}{y'(t)} \sim \cdots \sim \frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \quad \textit{при} \quad t\uparrow\omega \quad \textit{и} \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \pm\infty. \tag{2.6}$$

Наряду с понятиями и свойствами правильно меняющихся функций, в работе будут также использоваться некоторые известные результаты о существовании исчезающих решений системы квазилинейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dv_i}{dt} = h(t)\left[f_i(t,v_1,\ldots,v_n) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j + V_i(t,v_1,\ldots,v_n)\right], \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.7}$$

в которой $a_{ij} \in R$, $i,j = \overline{1,n}$, $h\colon [t_0,\omega[\to R$, $i,j = \overline{1,n}$, — непрерывная функция и f_i, $V_i\colon [t_0,\omega[\times R^n_c \to R$, $i = \overline{1,n}$, — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t\uparrow\omega} f_i(t,v_1,\ldots,v_n) = 0, \quad i=\overline{1,n}, \quad \text{равномерно по} \quad (v_1,\ldots,v_n)\in R^n_c,$$

$$\lim_{|v_1|+\cdots+|v_n|\to 0} \frac{V_i(t,v_1,\ldots,v_n)}{|v_1|+\cdots+|v_n|} = 0, \quad i=\overline{1,n}, \quad \text{равномерно по} \quad t\in[t_0,\omega[,$$

где

$$-\infty < t_0 < \omega \le +\infty, \qquad R^n_c = \left\{(v_1,\ldots,v_n)\in R^n\colon |v_i|\le c,\ i=1,\ldots,n\right\}, \quad c>0.$$

В работе В. М. Евтухова и А. М. Самойленко [6] установлен следующий результат.

Лемма 2.3. *Пусть $h\colon [t_0,\omega[\to R$ — непрерывная функция такая, что*

$$h(t)\ne 0 \quad \textit{при} \quad t\in[t_0,\omega[, \qquad \int\limits_{t_0}^{\omega} h(t)dt = \pm\infty.$$

Пусть, кроме того, матрица $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ не имеет собственных значений с нулевой действительной частью. Тогда система дифференциальных уравнений (2.7) имеет хотя бы одно решение $(v_i)_{i=1}^n\colon [t_1,+\infty[\to R^n_c$ ($t_1\in[t_0,\omega[$), стремящееся к нулю при $t\uparrow\omega$, причем таких решений существует m-параметрическое семейство, если среди собственных значений матрицы A имеется m собственных значений (с учетом кратных), действительные части которых имеют знак, противоположный знаку функции h на промежутке $[t_0,\omega[$.

3. Основные результаты. Для формулировки первого основного результата, относящегося к случаю $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\ldots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}$, учитывая (2.3) и (2.4), введем следующие обозначения для $k=\overline{1,m}$:

$$\gamma_k = 1-\sum_{j=0}^{n-1}\sigma_{kj}, \qquad \mu_{kn} = \sum_{j=0}^{n-2}\sigma_{kj}(n-j-1),$$

$$C_k = \prod_{j=0}^{n-2}\left|\frac{(\lambda_0-1)^{n-j-1}}{\prod_{i=j+1}^{n-1}a_{0i}}\right|^{\sigma_{kj}}, \qquad J_{kn}(t) = \int\limits_{A_{kn}}^{t} p_k(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\mu_{kn}}\,d\tau,$$

где

$$A_{kn} = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \int\limits_a^\omega p_k(t)|\pi_\omega(t)|^{\mu_{kn}}\,dt = +\infty,\\ \omega, & \text{если} \quad \int\limits_a^\omega p_k(t)|\pi_\omega(t)|^{\mu_{kn}}\,dt < +\infty.\end{cases}$$

Теорема 3.1. *Пусть $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{1}{2},\ldots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}$. Пусть, кроме того, для некоторого $s\in\{1,\ldots,m\}$ выполняется неравенство $\gamma_s\ne 0$ и для непустого множества $\Gamma\subset\{1,\ldots,m\}$*

медленно меняющиеся составляющие $L_{kj}(y)$ функций φ_{kj} удовлетворяют условию S для каждого $k \in \Gamma$ и $j \in \{0, \ldots, n-1\}$. Тогда для существования $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-решения уравнения (1.1), для которого выполняется (1.3), (1.4) и $\sum_{k\in\Gamma} \alpha_k c_{ks} \neq 0$, необходимо, чтобы наряду с (1.6) выполнялись неравенства

$$\nu_{0j}\nu_{1j}a_{0j+1}(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) > 0, \quad j = \overline{0, n-2},$$
$$\nu_{0n-1}\gamma_s \left(\sum_{k\in\Gamma} \alpha_k c_{ks}\right) J_{sn}(t) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a, \omega[, \tag{3.1}$$

а также условия

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{sn}(t)}{J_{sn}(t)} = \frac{\gamma_s}{\lambda_0 - 1}, \tag{3.2}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}\left(Y_j(t)\right)}{p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}\left(Y_j(t)\right)} = 0 \quad \textit{при} \quad k \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{s\}, \tag{3.3}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}\left(Y_j(t)\right)}{p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}\left(Y_j(t)\right)} = c_{ks} \quad \textit{при} \quad k \in \Gamma, \tag{3.4}$$

где

$$Y_j(t) = \nu_{0n-1} \frac{[(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{\prod_{k=j+1}^{n-1} a_{0k}} |Y(t)|^{1/\gamma_s},$$

$$Y(t) = \gamma_s C_s \left(\sum_{k\in\Gamma} \alpha_k c_{ks}\right) J_{sn}(t) \prod_{j=0}^{n-1} L_{sj}\left(\nu_{0j} |\pi_\omega(t)|^{\frac{a_{0j+1}}{\lambda_0 - 1}}\right).$$

Более того, для каждого такого решения при $t \uparrow \omega$ имеют место асимптотические представления

$$y^{(j-1)}(t) = Y_{j-1}(t)[1 + o(1)], \quad j = \overline{1, \ldots, n}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Пусть $y \colon [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}$ является $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-решением уравнения (1.1), для которого выполняются условия (1.3), (1.4) и $\sum_{k\in\Gamma} \alpha_k c_{ks} \neq 0$. Тогда, как было указано ранее, справедливы неравенства (1.6) и в силу леммы 2.2 имеют место асимптотические соотношения (2.5), из которых следует, что

$$\frac{y^{(j+1)}(t)}{y^{(j)}(t)} = \frac{a_{0j+1}}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}[1 + o(1)], \quad j = \overline{0, n-1}, \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

откуда с учетом (1.5) выполняются первые из неравенств (3.1).

Учитывая условия (1.3), (1.4) из (1.1), получаем

$$y^{(n)}(t) = \left(\sum_{k\in\Gamma} \alpha_k c_{ks}\right) p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(y^{(j)}(t))\,[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Отсюда с учетом представления правильно меняющихся функций через медленно меняющиеся и асимптотических соотношений (2.5) имеем

$$\frac{y^{(n)}(t)\left|y^{(n-1)}(t)\right|^{\gamma_s-1}}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{sj}(y^{(j)}(t))} = C_s\left(\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\right) p_s(t)|\pi_\omega(t)|^{\mu_{sn}}\,[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.6}$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от t_0 до t, если $A_{sn}=a$, и на промежутке от t до ω, если $A_{sn}=\omega$, получаем

$$\int\limits_{A_{sn}}^{t} \frac{y^{(n)}(\tau)\left|y^{(n-1)}(\tau)\right|^{\gamma_s-1}}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{sj}(y^{(j)}(\tau))}\,d\tau = C_s\left(\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\right) J_{sn}(t)\,[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.7}$$

В силу леммы 2.1 существуют непрерывно дифференцируемые функции $L_{0kj}\colon \Delta_{Y_j} \to$ $\to]0,+\infty[$ такие, что при $k=\overline{1,m}$, $j=\overline{0,n-1}$

$$L_{kj}\left(y^{(j)}\right) \sim L_{0kj}(y^{(j)}) \quad \text{при} \quad y^{(j)}\to Y_j, \qquad \lim_{y^{(j)}\to Y_j} \frac{y^{(j)}L'_{0kj}\left(y^{(j)}\right)}{L_{0kj}\left(y^{(j)}\right)} = 0. \tag{3.8}$$

Учитывая условия леммы 2.1, с использованием правила Лопиталя находим

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\dfrac{\left|y^{(n-1)}(t)\right|^{\gamma_s}}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{0sj}(y^{(j)}(t))}}{\displaystyle\int_{B_{sn}}^{t} \frac{y^{(n)}(\tau)\left|y^{(n-1)}(\tau)\right|^{\gamma_s-1}}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{sj}(y^{(j)}(\tau))}\,d\tau} =$$

$$= \operatorname{sign} y^{(n-1)}(t) \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\prod_{j=0}^{n-1} L_{sj}(y^{(j)}(t))}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{0sj}(y^{(j)}(t))}\times$$

$$\times\left[\gamma_s - \frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n)}(t)} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{y^{(j)}(t)L'_{osj}\left(y^{(j)}(t)\right)}{L_{osj}(y^{(j)}(t))}\,\frac{y^{(j+1)}(t)}{y^{(j)}(t)}\right] =$$

$$= \nu_{0n-1}\gamma_s.$$

В силу этого предельного соотношения из (3.7) с учетом (3.8) следует, что

$$\frac{\left|y^{(n-1)}(t)\right|^{\gamma_s}}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{sj}(y^{(j)}(t))} = \nu_{0n-1}\gamma_s C_s\left(\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\right) J_{sn}(t)\,[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \tag{3.9}$$

откуда, в частности, вытекает выполнение второго из неравенств (3.1).

Так как функции L_{sj} удовлетворяют условию S, то с учетом замечания 2.1 выполнено равенство

$$L_{sj}(y_j(t)) = L_{sj}\left(\nu_{0j}|\pi_\omega(t)|^{\frac{a_{0j+1}}{\lambda_0-1}}\right)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \quad j=\overline{0,n-1},$$

поэтому из (3.9) получим

$$y^{(n-1)}(t) = \nu_{0n-1}\left|\prod_{j=0}^{n-1} L_{sj}(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{\frac{a_{0j+1}}{\lambda_0-1}})\gamma_s C_s J_{sn}(t)\left(\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\right)\right|^{1/\gamma_s}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Отсюда вытекают представления (3.5), и из (3.9), (3.6) находим, что

$$\frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \frac{p_s(t)|\pi_\omega(t)|^{\mu_{sn}}}{\gamma_s J_{sn}(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Поэтому в силу последнего из предельных соотношений (2.5) выполняется условие (3.2).

Теорема 3.1 доказана.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и наряду с (1.6), (3.2)–(3.4) алгебраическое относительно ρ уравнение*

$$\sum_{m=0}^{n-1} B_m \prod_{i=m+1}^{n-1} a_{0i}\prod_{j=1}^{m}(a_{0j}+\rho) = \prod_{j=1}^{n}(a_{0j}+\rho), \tag{3.10}$$

где

$$B_m = \frac{\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\sigma_{km}}{\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}}, \tag{3.11}$$

не имеет корней с нулевой действительной частью. Тогда дифференциальное уравнение (1.1) имеет $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\lambda_0)$-решение вида (3.5), причем существует l-параметрическое семейство решений с такими представлениями в случае, когда среди корней алгебраического уравнения (3.10) имеется l (с учетом кратных) корней, действительные части которых имеют знак, противоположный знаку функции $\pi_\omega(t)(\lambda_0-1)$.

Доказательство. Применим к уравнению (1.1) преобразование

$$y^{(i-1)}(t) = \nu_{0n-1}\,|Y_0(t)|^{1/\gamma_s}\,\frac{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-i}}{\prod_{k=i}^{n-1}a_{0k}}[1+v_i(\tau)], \quad i=\overline{1,n}, \qquad \tau=\beta\ln|\pi_\omega(t)|, \tag{3.12}$$

где

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \omega=+\infty, \\ -1, & \text{если} \quad \omega<+\infty, \end{cases}$$

и

$$Y_0(t) = \gamma_s C_s J_{sn}(t)\prod_{j=0}^{n-1} L_{0sj}\left(\nu_{0j}|\pi_\omega(t)|^{\frac{a_{0j+1}}{\lambda_0-1}}\right)\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}.$$

В результате преобразования получим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} v_i' = \dfrac{\beta}{\lambda_0 - 1}\left[a_{0i}(1 + v_{i+1}) - ((n-i)(\lambda_0 - 1) + h(\tau))(1 + v_i)\right], \quad i = \overline{1, n-2}, \\ v_{n-1}' = \dfrac{\beta}{\lambda_0 - 1}\left[a_{0n-1}(1 + v_n) - ((\lambda_0 - 1) + h(\tau))(1 + v_{n-1})\right], \\ v_n' = \dfrac{\beta}{\lambda_0 - 1}\left[G(\tau, v_1, \ldots, v_n) - h(\tau)[1 + v_n]\right], \end{cases} \tag{3.13}$$

в которой

$$G(\tau(t), v_1, \ldots, v_n) = \frac{\nu_{0n-1}(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}{|Y_0(t)|^{1/\gamma_s}} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}\left(Y_j^0(t)[1 + v_{j+1}]\right),$$

где

$$Y_j^0(t) = \nu_{0n-1} \frac{[(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{\prod_{k=j+1}^{n-1} a_{0k}} |Y_0(t)|^{1/\gamma_s},$$

и

$$h(\tau(t)) = \frac{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) Y_0'(t)}{\gamma_s Y_0(t)}.$$

Правые части этой системы непрерывны на множестве $[\tau_0, +\infty[\, \times \mathbb{R}^n_{1/2}$, где

$$\mathbb{R}^n_{1/2} = \left\{(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n;\ |v_i| \le \frac{1}{2},\ i = \overline{1, n}\right\}, \quad \tau_0 = \beta \ln |\pi_\omega(a)|.$$

Кроме того, в силу условия (3.2) и (3.8)

$$\lim_{\tau \to +\infty} h(\tau(t)) = \lim_{t \uparrow \omega} h(t) = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)(\lambda_0 - 1) Y_0'(t)}{\gamma_s Y_0(t)} = 1. \tag{3.14}$$

Далее, получим удобное для дальнейшего использования представление функции G. В силу представления правильно меняющейся функции через медленно меняющуюся, условия 1 леммы 2.1 и соотношения (3.12), получаем

$$\varphi_{kj}\big(Y_j^0(t)(1 + v_{j+1})\big) = |Y_j^0(t)(1 + v_{j+1})|^{\sigma_{kj}} L_{kj}(Y_j^0(t)(1 + v_{j+1})) =$$

$$= |1 + v_{j+1}|^{\sigma_{kj}}[1 + r_{kj}(t)]\varphi_{kj}(Y_j^0(t)), \tag{3.15}$$

где $k = \overline{1, m}$, $j = \overline{0, n-1}$, функции r_{kj} таковы, что $\lim\limits_{t \uparrow \omega} r_{kj}(t, v_{j+1}) = 0$ равномерно по $(v_{j+1}) \in \mathbb{R}^2_{1/2}$.

Учитывая соотношения (3.15), получаем

$$\frac{\nu_{0n-1}\pi_\omega(t)}{|Y_0(t)|^{1/\gamma_s}} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}\left(Y_j^0(t)[1 + v_{j+1}]\right) =$$

$$= \frac{\nu_{0n-1}\pi_\omega(t)}{|Y_0(t)|^{1/\gamma_s}} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} |Y_j^0(t)|^{\sigma_{kj}} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_{kj}} L_{kj}\left(Y_j^0(t)\right)[1 + r_{kj}(t, v_{j+1})] =$$

$$= \frac{\nu_{0n-1}\pi_\omega(t)}{|Y_0(t)|^{1/\gamma_s}} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t) \left(\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}\left(Y_j^0(t)\right) |1+v_{j+1}|^{\sigma_{kj}} \right) [1+r_k(t,v_1,\ldots,v_n)],$$

где $\lim\limits_{t\uparrow\omega} r_k(t,v_1,\ldots,v_n) = 0$ равномерно по $(v_1,\ldots,v_n) \in \mathbb{R}^n_{1/2}$.

Таким образом, с учетом предельных соотношений (3.3) и (3.4) имеем

$$\frac{\nu_{0n-1}\pi_\omega(t)}{|Y_0(t)|^{\frac{1}{\gamma_s}}} p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(Y_j^0(t)) \times$$

$$\times \left[\sum_{k\in\Gamma} \frac{\alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(Y_j^0(t))[1+r_k(1,v_1,\ldots,v_n)] \prod_{j=0}^{n-1} |1+v_{j+1}|^{\sigma_{kj}}}{p_s(t)\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(Y_j^0(t))} \right] +$$

$$+ \frac{\nu_{0n-1}\pi_\omega(t)}{|Y_0(t)|^{\frac{1}{\gamma_s}}} p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(Y_j^0(t)) \times$$

$$\times \left[\sum_{k\in\{1,\ldots,m\}\setminus\Gamma} \frac{\alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(Y_j^0(t))[1+r_k(1,v_1,\ldots,v_n)] \prod_{j=0}^{n-1} |1+v_{j+1}|^{\sigma_{kj}}}{p_s(t)\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(Y_j^0(t))} \right] =$$

$$= \frac{\nu_{0n-1}\pi_\omega(t)}{|Y_0(t)|^{\frac{1}{\gamma_s}}} p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(Y_j^0(t)) \left[\sum_{k\in\Gamma} \alpha_k c_{ks} \prod_{j=0}^{n-1} |1+v_{j+1}|^{\sigma_{kj}} + R_k(t,v_1,\ldots,v_n) \right].$$

С учетом предельных соотношений (3.3) и (3.4) получаем

$$\frac{\nu_{0n-1}\pi_\omega(t)}{|Y_0(t)|^{1/\gamma_s}} p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(Y_j^0(t)) \left[\sum_{k\in\Gamma} \alpha_k c_{ks} \prod_{j=0}^{n-1} |1+v_{j+1}|^{\sigma_{kj}} + R_k(t,v_1,\ldots,v_n) \right],$$

где $\lim\limits_{t\uparrow\omega} R_k(t,v_1,\ldots,v_n) = 0$, равномерно по $(v_1,\ldots,v_n) \in \mathbb{R}^n_{1/2}$. Здесь, в силу (3.8) множитель перед скобкой имеет вид

$$\frac{\nu_{0n-1}\pi_\omega(t)}{|Y_0(t)|^{1/\gamma_s}} p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}\left(Y_j^0(t)\right) = \frac{\nu_{0n-1}\pi_\omega(t)}{|Y_0(t)|^{1/\gamma_s}} p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \left|Y_j^0(t)\right|^{\sigma_{sj}} L_{0sj}\left(Y_j^0(t)\right) =$$

$$= \frac{\nu_{0n-1}\pi_\omega(t) p_s(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_{sn}} C_s \prod_{j=0}^{n-1} L_{0sj}(Y_j^0(t))}{\left| \gamma_s C_s J_{sn}(t) \prod_{j=0}^{n-1} L_{0sj}\left(\nu_{0j} |\pi_\omega(t)|^{\frac{a_{0j+1}}{\lambda_0 - 1}} \right) \sum_{k\in\Gamma} \alpha_k c_{ks} \right|} \sim$$

$$\sim \frac{\nu_{0n-1}\pi_\omega(t) p_s(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_{sn}} C_s \prod_{j=0}^{n-1} L_{sj}(Y_j^0(t))}{\left| \gamma_s C_s J_{sn}(t) \prod_{j=0}^{n-1} L_{sj}\left(\nu_{0j} |\pi_\omega(t)|^{\frac{a_{0j+1}}{\lambda_0 - 1}} \right) \sum_{k\in\Gamma} \alpha_k c_{ks} \right|} \quad \text{при} \quad t \to \omega.$$

Принимая во внимание эти соотношения, второе из неравенств (3.1) и то, что функции L_{sj} удовлетворяют условию S, последнее уравнение системы дифференциальных уравнений запишем в виде

$$v_n' = -\frac{\beta}{\lambda_0 - 1}(1+\xi(\tau))(1+v_n) + \frac{\beta}{\lambda_0-1}\frac{1}{\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}}\times$$

$$\times\left(\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\prod_{j=0}^{n-1}|1+v_{j+1}|^{\sigma_{kj}}(1+\widetilde{R}_k(\tau,v_1,\ldots,v_n)) + \widetilde{\widetilde{R}}_k(\tau,v_1,\ldots,v_n)\right).$$

Исходя из предыдущих преобразований, в силу (3.14) система дифференциальных уравнений (3.13) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} v_i' = \dfrac{\beta}{\lambda_0-1}\left[f_i(\tau,v_1,\ldots,v_n) + a_{0i}(1+v_{i+1}) - a_{0i}(1+v_i)\right], \quad i=\overline{1,n-2}, \\ v_{n-1}' = \dfrac{\beta}{\lambda_0-1}\left[f_{n-1}(\tau,v_1,\ldots,v_n) + a_{0n-1}(1+v_n) - a_{0n-1}(1+v_{n-1})\right], \\ v_n' = \dfrac{\beta}{\lambda_0-1}\left[f_n(\tau,v_1,\ldots,v_n) - (1+v_n) + \dfrac{1}{\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}}\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\prod_{j=0}^{n-1}|1+v_{j+1}|^{\sigma_{kj}}\right], \end{cases}$$

где функции f_i, $i=\overline{1,n}$, непрерывны на множестве $[\tau_0,+\infty[\times\mathbb{R}^n_{1/2}$ и таковы, что

$$\lim_{\tau\to+\infty} f_i(\tau,v_1,\ldots,v_n) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad (v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{1/2}. \tag{3.16}$$

Выделим в последнем слагаемом системы (3.13) линейную часть:

$$\prod_{j=0}^{n-1}|1+v_{j+1}|^{\sigma_{kj}} = 1 + \sum_{j=0}^{n-1}\sigma_{kj}v_{j+1} + V_k(v_1,\ldots,v_n), \tag{3.17}$$

где

$$V_k = \prod_{j=0}^{n-1}|1+v_{j+1}|^{\sigma_{kj}} - 1 - \sum_{j=0}^{n-1}\sigma_{kj}v_{j+1}.$$

Здесь

$$\lim_{|v_1|+\ldots+|v_n|\to 0}\frac{\partial V_k(v_1,\ldots,v_n)}{\partial v_i} = 0, \quad i=\overline{1,n}, \qquad V_k(0,\ldots,0)=0. \tag{3.18}$$

Используя (3.17), получаем

$$v_n' = \frac{\beta}{\lambda_0-1}\left[f(\tau,v_1,\ldots,v_n) - v_n + \frac{\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\sigma_{kj}\right)v_{j+1}}{\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}} + \frac{\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}V_k}{\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}}\right]$$

$$v_n' = \frac{\beta}{\lambda_0-1}\left[f(\tau,v_1,\ldots,v_n) + \frac{\sum_{j=0}^{n-2}\left(\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\sigma_{kj}\right)v_{j+1}}{\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}} + \right.$$

$$+\left(\frac{\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\sigma_{kn-1}}{\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}}-1\right)v_n+V_n(v_1,\ldots,v_n)\Bigg].$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений (3.13) приобретает вид

$$\begin{cases} v_i'=\dfrac{\beta}{\lambda_0-1}\left[f_i(\tau,v_1,\ldots,v_n)+a_{0i}(1+v_{i+1})-a_{0i}(1+v_i)\right], \quad i=\overline{1,n-2},\\[2mm] v_{n-1}'=\dfrac{\beta}{\lambda_0-1}\left[f_{n-1}(\tau,v_1,\ldots,v_n)+a_{0n-1}(1+v_n)-a_{0n-1}(1+v_{n-1})\right],\\[2mm] v_n'=\dfrac{\beta}{\lambda_0-1}[f_n(\tau,v_1,\ldots,v_n)+\dfrac{\sum_{j=0}^{n-2}\left(\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\sigma_{kj}\right)v_{j+1}}{\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}}+\\[2mm] \qquad+\left(\dfrac{\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\sigma_{kn-1}}{\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}}-1\right)v_n+V_n(v_1,\ldots,v_n)]. \end{cases} \tag{3.19}$$

Матрицей коэффициентов, стоящих при линейной части в системе (3.19), является

$$A=\begin{pmatrix} -a_{01} & a_{01} & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & -a_{02} & a_{02} & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -a_{03} & \ldots & 0 & 0\\ - & - & - & \ldots & - & -\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_{n-1} & a_{0n-1}\\ B_0 & B_1 & B_2 & \ldots & B_{n-2} & -a_{0n}+B_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Запишем характеристическое уравнение этой матрицы:

$$\begin{vmatrix} -a_{01}-\rho & a_{01} & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & -a_{02}-\rho & a_{02} & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -a_{03}-\rho & \ldots & 0 & 0\\ - & - & - & \ldots & - & -\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_{n-1}-\rho & a_{0n-1}\\ B_0 & B_1 & B_2 & \ldots & B_{n-2} & -a_{0n}-\rho+B_{n-1} \end{vmatrix}=0.$$

Отсюда следует, что характеристическим уравнением матрицы является уравнение (3.10), которое в силу условий теоремы не имеет корней с нулевой действительной частью.

Ввиду этого факта и (3.16), (3.18) для системы дифференциальных уравнений (3.19) выполнены все условия леммы 2.3. Согласно этой лемме у системы дифференциальных уравнений (3.19) существует хотя бы одно решение $(v_i)_{i=1}^n\colon [\tau_1,+\infty[\,\to\mathbb{R}^n$, $\tau_1\ge\tau_0$, стремящееся к нулю при $\tau\to+\infty$. Более того, когда среди корней характеристического уравнения (3.10) имеется l корней (с учетом кратных), действительные части которых имеют знак, противоположный знаку числа $\beta(\lambda_0-1)$, тогда таких решений существует l-параметрическое семейство. Каждому такому решению в силу замен (3.12) и условий (3.8) соответствует решение дифференциального уравнения (1.1), допускающее при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления

$$y^{(i-1)}(t)=\nu_{0n-1}\,|Y_0(t)|^{1/s}\;\frac{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-i}}{\prod_{k=i}^{n-1}a_{0k}}[1+o(1)],\quad i=1,\dots,n.$$

Поскольку в силу условия 2 леммы 2.1 $Y_0(t)\sim Y(t)$, то данные представления эквивалентны представлениям (3.5).

Теорема 3.2 доказана.

Замечание 3.1. Алгебраическое уравнение (3.10) заведомо не имеет корней с нулевой действительной частью, если $\sum_{m=0}^{n-2}|B_m|<|B_{n-1}-1|$.

Замечание 3.2. Покажем, что указанные в теореме условия (1.3) заведомо будут выполнены, если справедливы неравенства

$$\limsup_{t\uparrow\omega}\frac{\ln p_k(t)-\ln p_s(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||}<\frac{\beta}{\lambda_0-1}\sum_{j=0}^{n-1}(\sigma_{sj}-\sigma_{kj})a_{0j+1}\quad \text{при всех}\quad k\in\{1,\dots,m\}\setminus\Gamma. \tag{3.20}$$

Действительно, поскольку каждая из функций φ_{kj}, $k\in\{1,\dots,m\}$, $j\in\{0,1,\dots,n-1\}$, является правильно меняющейся порядка σ_{kj} при $y^{(j)}\to Y_j$ и выражается через медленно меняющуюся, то из определения правильно меняющейся функции следует, что

$$\varphi_{kj}\left(y^{(j)}(t)\right)=|y^{(j)}(t)|^{\sigma_{kj}}L_{kj}\left(y^{(j)}(t)\right),\qquad k=\overline{1,m},\quad j=\overline{0,n-1}, \tag{3.21}$$

где $L_{kj}\colon\Delta_{Y_j}\to]0,+\infty[$, $k\in\{1,\dots,m\}$, $j\in\{0,n-1\}$), — непрерывная медленно меняющаяся функция при $y^{(j)}\to Y_j$.

Из (3.21) с учетом (2.2) и соотношений (2.5) следует, что

$$\ln\varphi_{kj}\left(y^{(j)}(t)\right)=\sigma_{kj}\ln|y^{(j)}(t)|+\ln L_{kj}(y^{(j)}(t)=\ln|y^{(j)}(t)|[\sigma_{kj}+o(1)]=$$

$$=\frac{a_{0j+1}}{\lambda_0-1}\ln|\pi_\omega(t)|[\sigma_{kj}+o(1)]\quad k=\overline{1,m},\quad j=\overline{0,n-1},\quad \text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

Тогда для любого $k\in\{1,\dots,m\}\setminus\Gamma$

$$\ln\left[\frac{p_k(t)\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(y^{(j)}(t))}{p_s(t)\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{sj}(y^{(j)}(t))}\right]=\ln\frac{p_k(t)}{p_s(t)}+\sum_{j=0}^{n-1}\Big[\ln\varphi_{kj}(y^{(j)}(t))-\ln\varphi_{sj}(y^{(j)}(t))\Big]=$$

$$=\ln\frac{p_k(t)}{p_s(t)}+\frac{\ln|\pi_\omega(t)|}{\lambda_0-1}\sum_{j=0}^{n-1}[a_{0j+1}(\sigma_{kj}-\sigma_{sj})+o(1)]=$$

$$=\beta\ln|\pi_\omega(t)|\left[\frac{\ln p_k(t)-\ln p_s(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||}+\frac{\beta}{\lambda_0-1}\sum_{j=0}^{n-1}(\sigma_{kj}-\sigma_{sj})a_{0j+1}+o(1)\right]\quad \text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

Поскольку выражение, стоящее в данном соотношении справа, в силу условий (3.20) стремится к $-\infty$ при $t \uparrow \omega$, отсюда вытекает (1.3).

Замечание 3.3. Заметим, что как только хотя бы для одного $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \Gamma$ выполняется

$$\liminf_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{|\ln |\pi_\omega(t)||} > \frac{\beta}{\lambda_0 - 1} \sum_{j=0}^{n-1} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj}) a_{0j+1},$$

то, повторяя рассуждения замечания 3.2, легко показать, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)}(t))}{p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(y^{(j)}(t))} = +\infty,$$

и поэтому условия (1.3) не выполняются.

Для формулировки следующего результата введем вспомогательные обозначения, полагая

$$J_{k0}(t) = \int_{A_{k0}}^{t} p_k(s)\, ds, \qquad J_{k00}(t) = \int_{A_{k00}}^{t} J_{k0}(s)\, ds, \quad k = \overline{1, m},$$

$$J_{kn}(t) = \int_{A_{kn}}^{t} p_k(s) |\pi_\omega(s)|^{\mu_{kn}} \prod_{j=0}^{n-2} L_{kj}\left(\nu_{0j} |\pi_\omega(s)|^{n-j-1}\right) ds, \quad k = \overline{1, m},$$

где каждый из пределов интегрирования A_{km}, A_{kmm}, $m \in \{0, 1\}$, выбирается равным точке $a_0 \in [a, \omega[$ (справа от которой, т. е. при $t \in [a_0, \omega[$, подынтегральная функция непрерывна), если при этом значении предела интегрирования соответствующий интеграл стремится к $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, и равным ω, если при таком значении предела интегрирования он стремится к нулю при $t \uparrow \omega$.

Теорема 3.3. *Пусть для некоторого $s \in \{1, \dots, m\}$ выполняется неравенство $\gamma_s \neq 0$ и для непустого множества $\Gamma \subset \{1, \dots, m\}$ медленно меняющиеся составляющие $L_{kj}(y)$ функций φ_{kj} удовлетворяют условию S для каждого $k \in \Gamma$, $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Пусть, кроме того, существует непрерывная функция $b_s \colon [a, \omega[\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такая, что*

$$\lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t) b_s(t)| = +\infty. \tag{3.22}$$

Тогда для существования $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 1)$-решения дифференциального уравнения (1.1), для которого выполняются условия (1.3), (1.4), $\sum_{k \in \Gamma} \alpha_k c_{ks} \neq 0$ и

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \sim b_s(t) \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{3.23}$$

где $b_s \colon [a, \omega[\to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — непрерывная функция такая, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t) b_s(t)| = +\infty, \tag{3.24}$$

необходимо, а если алгебраическое относительно ρ *уравнение*

$$(1+\rho)^n = \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_{sj}(1+\rho)^j \tag{3.25}$$

не имеет корней с нулевой действительной частью, то и достаточно, чтобы

$$b_s(t) \sim \frac{p_s(t)}{\gamma_s J_{s0}(t)}, \quad \frac{p_s(t)}{J_{s0}(t)} \sim \frac{J_{s0}(t)}{J_{s00}(t)} \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega, \quad \nu_{0j} \lim_{t\uparrow\omega} |J_{s0}(t)|^{1/\gamma_s} = Y_j, \quad j = \overline{0, n-1}, \tag{3.26}$$

выполнялись неравенства (1.6) и следующие неравенства:

$$\sum_{k\in\Gamma} \alpha_k c_{ks} \nu_{0n-1} \gamma_s J_{s0}(t) > 0, \quad \nu_{0j}\nu_{0n-1}\left(\gamma_s J_{s0}(t)\right)^{n-j-1} > 0, \quad j = \overline{0, n-2}, \quad \textit{при} \quad t \in]a, \omega[. \tag{3.27}$$

Более того, для каждого такого решения при $t \uparrow \omega$ *имеют место асимптотические представления*

$$y^{(j)}(t) = \left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)[1+o(1)], \quad j = \overline{0, n-2}, \tag{3.28}$$

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_s}}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{sj}\left(\left(\frac{\gamma_s J_{so0}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right)} = \left(\sum_{k\in\Gamma} \alpha_k c_{ks}\right) \nu_{0n-1}\gamma_s J_{s0}(t) \left|\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s00}(t)}\right|^{\mu_{sn}} [1+o(1)], \tag{3.29}$$

причем решений с такими представлениями существует целое l*-параметрическое семейство, если среди корней алгебраического уравнения (3.25) имеется* l *(с учетом кратных) корней, действительные части которых имеют знак, противоположный знаку* $\nu_{0n-1}\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y\colon [t_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ — произвольное $P_\omega(Y_0, \ldots \ldots, Y_{n-1}, 1)$-решение дифференциального уравнения (1.1), для которого наряду с (1.3), (1.4) и $\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks} \neq 0$ выполняется условие (3.23). Тогда, как было указано ранее, справедливы неравенства (1.6) и в силу леммы 2.2, а также из условий (3.24) имеем

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} \sim b_s(t) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega (k = \overline{1, n}) \qquad \text{и} \qquad \beta\beta_s \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = +\infty. \tag{3.30}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\ln|y^{(k-1)}(t)| \sim \int_a^t b_s(\tau)\, d\tau \to \pm\infty, \quad k = \overline{1, n}, \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.31}$$

В силу условий (1.3) и (1.4) из (1.1) следует, что для данного решения имеет место асимптотическое соотношение

$$y^{(n)}(t) = \left(\sum_{k\in\Gamma} \alpha_k c_{ks}\right) p_s(t)[1+o(1)] \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(y^{(j)}(t)) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.32}$$

Согласно лемме 2.1 существуют непрерывно дифференцируемые правильно меняющиеся при $y^{(j)} \to Y_j$ функции $\varphi_{0sj}\colon \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0,+\infty[$ порядков σ_{sj}, $j=\overline{0,n-1}$, такие, что

$$\varphi_{sj}(y^{(j)}) \sim \varphi_{0sj}(y^{(j)}) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \qquad \lim_{\substack{y^{(j)}\to Y_j\\ y(j)\in\Delta_{Y_j}}} \frac{y^{(j)}\varphi'_{0sj}(y^{(j)})}{\varphi_{0sj}(y^{(j)})} = \sigma_{sj}, \quad j=\overline{0,n-1}. \tag{3.33}$$

В силу (3.33) и (3.30) имеем

$$\left(\frac{y^{(k-1)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{0sj}\left(y^{(j)}(t)\right)}\right)' = \frac{y^{(k)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{0sj}\left(y^{(j)}(t)\right)}$$

$$\times\left[1-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{y^{(k-1)}(t)y^{(j+1)}(t)}{y^{(k)}(t)y^{(j)}(t)}\,\frac{y^{(j)}(t)\varphi'_{0sj}\left(y^{(j)}(t)\right)}{\varphi_{0sj}\left(y^{(j)}(t)\right)}\right] =$$

$$= \frac{y^{(k)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{0sj}\left(y^{(j)}(t)\right)}[\gamma_s+o(1)], \quad k=1,\ldots,n \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.34}$$

Поэтому соотношение (3.32) может быть переписано в виде

$$\left(\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{0sj}\left(y^{(j)}(t)\right)}\right)' = \frac{y^{(n)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{0sj}(y^{(j)}(t))}[\gamma_s+o(1)] =$$

$$= \left(\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\right)\gamma_s p_s(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от t_1 до t, получаем

$$\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{0sj}(y^{(j)}(t))} = C + \left(\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\right)\gamma_s J_{s0}(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega$$

где C — некоторая вещественная постоянная.

В случае, когда в функции J_{s0} предел интегрирования $A_{s0}=a$, тогда $J_{s0}(t)\to+\infty$ при $t\uparrow\omega$ и полученное соотношение представимо в виде

$$\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{0sj}\left(y^{(j)}(t)\right)} = \left(\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\right)\gamma_s J_{s0}(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.35}$$

Покажем, что в случае $A_{s0} = \omega$, когда $J_{s0}(t) \to 0$ при $t \uparrow \omega$, постоянная $C = 0$. Предположим противное, т. е. что в этом случае $C \neq 0$. Тогда

$$\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{0sj}\left(y^{(j)}(t)\right)} = C + o(1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

но этого быть не может, поскольку в силу (3.31)

$$\ln\left|\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{0sj}(y^{(j)}(t))}\right| = \int\limits_a^t b_s(\tau)\, d\tau[\gamma_s + o(1)] \to \pm\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Значит, при $A_{s0} = \omega$ также имеет место представление (3.35).

Аналогично из (3.35) с использованием (3.34) при $k = n-1$ получаем

$$\frac{y^{(n-2)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{0sj}\left(y^{(j)}(t)\right)} = \left(\sum_{k\in\Gamma} \alpha_k c_{ks}\right) \gamma_s^2 J_{s00}(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.36}$$

Из (3.32), (3.35) и (3.36) с учетом (3.33) имеем

$$\frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \frac{p_s(t)}{\gamma_s J_{s0}(t)}[1 + o(1)], \qquad \frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n-2)}(t)} = \frac{J_{s0}(t)}{\gamma_s J_{s00}(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поэтому в силу (2.6) и (3.23) выполняется условия (3.26) и ввиду тождеств

$$y^{(j)}(t) = \frac{y^{(j)}(t)}{y^{(j+1)}(t)} \cdots \frac{y^{(n-2)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} y^{(n-1)}(t), \quad j = \overline{0, n-2},$$

имеют место асимптотические представления (3.28). Кроме того, из (3.35) и (3.28) следует, что выполняются неравенства (3.27).

Используя теперь приведенные выше тождества, представления (3.28) и лемму 2.1, находим

$$\varphi_{0sj}(y^{(j)}(t)) = \left|y^{(j)}(t)\right|^{\sigma_{sj}} L_{0sj}(y^{(j)}(t)) \sim$$

$$\sim \left|\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right|^{\sigma_{sj}} \times$$

$$\times L_{0sj}\left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)[1 + o(1)]\right) \sim$$

$$\sim \left|\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right|^{(n-j-1)\sigma_{sj}} \left|y^{(n-1)}(t)\right|^{\sigma_{sj}} \times$$

$$\times L_{0sj}\left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right), \quad j = \overline{0, n-1} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Ввиду этих соотношений из (3.35) получаем представление

$$\frac{|y^{n-1}(t)|^{\gamma_s}\left|\dfrac{J_{s0}(t)}{\gamma_s J_{s00}(t)}\right|^{\mu_{sn}}}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{0sj}\left(\left(\dfrac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right)} =$$

$$= \left(\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\right)\nu_{0n-1}\gamma_s J_{s0}(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

из которого с учетом первых из соотношений (2.1) вытекает представление (3.29).

Достаточность. Пусть соблюдаются условия (1.6), (3.23), (3.26), (3.27) и алгебраическое уравнение (3.25) не имеет корней с нулевой действительной частью.

Покажем, что в данном случае существуют $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},1)$-решения уравнения (1.1), допускающие при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (3.28), (3.29) и выясним вопрос о количестве таких решений.

Сначала рассмотрим соотношение

$$\frac{|Y|^{\gamma_s}}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{0sj}\left(\left(\dfrac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y\right)} = Q_s(t)(1+v_n), \tag{3.37}$$

где $L_{0sj}\colon \Delta_{Y_j}\longrightarrow]0,+\infty[$, $j=\overline{0,n-1}$, — непрерывно дифференцируемые медленно меняющиеся при $y^{(j)}\to Y_j$ функции, удовлетворяющие условиям (2.1) (при $k=s$) и существующие в силу леммы 2.1, а также

$$Q_s(t) = \left(\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\right)\nu_{0n-1}\gamma_s J_{s0}(t)\left|\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right|^{\mu_{sn}}.$$

Положим

$$d=\frac{1}{2|\gamma_s|}, \qquad \mathbb{R}_d=\{z\in\mathbb{R}\colon |z|\le d\}, \qquad \mathbb{R}_{1/2}=\left\{v_n\in\mathbb{R}\colon |v_n|\le\frac{1}{2}\right\}$$

и покажем, что соотношение (3.37) однозначно определяет заданную на множестве $[t_0,\omega[\times\mathbb{R}_{1/2}$, $t_0\in[a,\omega[$, непрерывно дифференцируемую неявную функцию $Y=Y(t,v_n)$ вида

$$Y(t,v_n)=\nu_{0n-1}\,|J_{s0}(t)|^{\frac{1}{\gamma_s}+z(t,v_n)}, \tag{3.38}$$

где функция z такова, что

$$|z(t,v_n)|\le d \quad \text{при} \quad (t,v_n)\in[t_0,\omega[\times\mathbb{R}_{1/2}$$

и

$$\lim_{t\uparrow\omega} z(t,v_n)=0 \quad \text{равномерно по} \quad v_n\in\mathbb{R}_{1/2}.$$

Полагая в (3.37)

$$Y = \nu_{on-1}\,|J_{s0}(t)|^{\frac{1}{\gamma_s}+z} \tag{3.39}$$

и затем логарифмируя полученное при этом соотношение, после элементарных преобразований находим, что

$$z = a(t) + b(t, v_n) + Z(t, z), \tag{3.40}$$

где

$$a(t) = \frac{1}{\gamma_s}\left(\frac{\ln Q_s(t)}{\ln|J_{s0}(t)|} - 1\right), \qquad b(t, v_n) = \frac{\ln(1+v_n)}{\gamma_s \ln|J_{s0}(t)|},$$

$$Z(t,z) = \frac{1}{\gamma_s \ln|J_{so}(t)|}\sum_{j=0}^{n-1} \ln L_{0s}\left(\nu_{0n-1}\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1}|J_{s0}(t)|^{\frac{1}{\gamma_s}+z}\right).$$

В силу последних из неравенств (3.27), а также второго и третьего из условий (3.26)

$$\nu_{0n-1}\lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1}|J_{s0}(t)|^{\frac{1}{\gamma_s}+z} = \nu_{0j}\lim_{t\uparrow\omega}\left|\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right|^{n-j-1}|J_{s0}(t)|^{\frac{1}{\gamma_s}+z} =$$

$$= \nu_{oj}\lim_{t\uparrow\omega}\exp\left(\ln|J_{s0}(t)|\left[\frac{1}{\gamma_s} + z + (n-j-1)\left(\frac{\ln|\gamma_s J_{s00}(t)|}{\ln|J_{s0}(t)|} - 1\right)\right]\right) =$$

$$= \nu_{oj}\lim_{t\uparrow\omega}\exp\left(\ln|J_{s0}(t)|\left[\frac{1}{\gamma_s} + z + o(1)\right]\right) =$$

$$= \nu_{0j}\lim_{t\uparrow\omega}|J_{s0}(t)|^{1/\gamma_s} = Y_j, \quad j = \overline{0, n-1} \quad \text{при} \quad |z| \le d.$$

Поэтому правая часть в (3.40) непрерывно дифференцируема на множестве $[t_0,\omega[\times\mathbb{R}_{1/2}\times \times\mathbb{R}_d$, где t_0 — некоторое число на промежутке $[a,\omega[$.

Кроме того, в силу второго и третьего из условий (3.26), а также вторых из условий (1.6) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} a(t) = 0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} b(t, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad v_n \in \mathbb{R}_{1/2}, \tag{3.41}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} Z(t,z) = 0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\partial Z(t,z)}{\partial z} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad z \in \mathbb{R}_d. \tag{3.42}$$

Согласно этим условиям существует число $t_2 \in [t_1,\omega[$ такое, что на множестве $[t_2,\omega[\times\mathbb{R}_{1/2}\times \times\mathbb{R}_d$ выполняется неравенство

$$|a(t) + b(t, v_1, v_2) + Z(t,z)| \le d \tag{3.43}$$

и условие Липшица

$$|Z(t,z_1) - Z(t,z_2)| \le \frac{1}{2}|z_1 - z_2| \qquad \text{при} \quad t \in [t_2,\omega[\quad \text{и} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{R}_d. \tag{3.44}$$

Аналогично работе [2] заключаем, что в силу замены (3.39) полученной функции z соответствует непрерывно дифференцируемая на множестве $[t_0,\omega[\times\mathbb{R}_{1/2}$ функция Y вида (3.38), которая является решением уравнения (3.37) и удовлетворяет условиям

$$\nu_{0j}\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)\in\Delta_{Y_j},\quad j=\overline{0,n-1}\quad \text{при}\quad (t,v_n)\in[t_0,\omega[\times\mathbb{R}_{1/2},$$
$$\nu_{0j}\lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)=Y_j,\quad j=\overline{0,n-1},\quad \text{равномерно по}\quad v_n\in\mathbb{R}_{1/2}. \tag{3.45}$$

Теперь, применяя к дифференциальному уравнению (1.1) преобразование

$$\frac{y^{(j)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}=\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1}[1+v_{j+1}(\tau)],\quad j=\overline{0,n-1},$$
$$y^{(n-1)}(t)=Y(t,v_n(\tau)),\qquad \tau=\left(\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\right)\nu_{0n-1}\ln|J_{s00}(t)|^{1/\gamma_s} \tag{3.46}$$

и учитывая, что функция $y^{(n-1)}(t)=Y(t,v_n(\tau))$ при $t\in[t_0,\omega[$ и $v_n(\tau)\in\mathbb{R}^{1/2}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_s}}{\prod_{j=0}^{n-1}L_{0sj}\left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1}y^{(n-1)}(t)\right)}=Q_s(t)[1+v_n(\tau)],$$

получаем систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} v_i'=\dfrac{\nu_{0n-1}}{\left(\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\right)}\Bigg(1+v_{i+1}-(n-j-1)\gamma_s[1-h(\tau)](1+v_i)-\\ \qquad -h(\tau)\dfrac{\frac{(1+v_i)}{1+v_n}\prod_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}}}{}G(\tau,v_1,\dots,v_n)\Bigg),\quad i=\overline{1,n-2},\\ v_{n-1}'=\dfrac{\nu_{0n-1}}{\left(\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\right)}\Bigg(1-\gamma_s[1-h(\tau)](1+v_{n-1})-\\ \qquad -h(\tau)\,\dfrac{(1+v_{n-1})\prod_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}}}{1+v_n}G(\tau,v_1,\dots,v_n)\Bigg),\\ v_n'=\dfrac{\nu_{0n-1}}{\left(\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\right)}\Bigg(\gamma_s h(\tau)\prod_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}}G(\tau,v_1,\dots,v_n)-\\ \qquad -H(\tau,v_1,\dots,v_n)(1+v_n)-\gamma_s q(\tau)(1+v_n)\Bigg), \end{cases} \tag{3.47}$$

в которой

$$h(\tau(t))=\frac{p_s(t)J_{s00}(t)}{J_{s0}^2(t)},\qquad q(\tau)=h(\tau)+\mu_{sn}[1-h(\tau)],$$

$$G(\tau(t), v_1, \ldots, v_n) =$$

$$= \frac{L_{sn-1}(Y(t,v_n)) \prod_{j=0}^{n-2} L_{sj}\left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)(1+v_{j+1})\right)}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{0sj}\left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n))\right)} \times$$

$$\times \frac{\sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t) \varphi_{kn-1}(Y(t,v_n)) \prod_{j=0}^{n-2} \varphi_{kj}\left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)(1+v_{j+1})\right)}{\left(\sum_{k\in\Gamma} \alpha_k c_{ks}\right) p_s(t) \varphi_{sn-1}(Y(t,v_n)) \prod_{j=0}^{n-2} \varphi_{sj}\left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)(1+v_{j+1})\right)},$$

$$H(\tau(t), v_1, \ldots, v_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n) L'_{0sj}\left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)\right)}{L_{0sj}\left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)\right)} \times$$

$$\times \left(\gamma_s(n-j-1)[1-h(\tau(t))] + h(\tau)\frac{\prod_{j=0}^{n-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}}}{1+v_n} G(\tau, v_1, \ldots, v_n)\right).$$

В силу (3.26) и (3.27) функция

$$\tau(t) = \left(\sum_{k\in\Gamma} \alpha_k c_{ks}\right) \nu_{0n-1} \ln |J_{s00}(t)|^{1/\gamma_s}$$

имеет свойства

$$\tau'(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \tau(t) = +\infty$$

и существует $t_1 \in [t_0, \omega[$ такое, что на множестве

$$[\tau_1, +\infty[\times \mathbb{R}^n_{1/2}, \quad \text{где} \quad \tau_1 = \tau(t_1), \qquad \mathbb{R}^n_{1/2} = \left\{(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \colon |v_i| \le \frac{1}{2}\ (i = \overline{1,n})\right\}$$

правые части системы уравнений (3.47) непрерывны. Согласно второму из условий (3.26) имеем

$$\lim_{\tau\to+\infty} h(\tau) = \lim_{t\uparrow\omega} h(\tau(t)) = 1, \qquad \lim_{\tau\to+\infty} q(\tau) = 1. \tag{3.48}$$

Далее, используя условия (3.45), показываем, что вторая дробь в представлении функции G стремится к единице при $t \uparrow \omega$ равномерно по $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{1/2}$. Кроме того, в силу условий (3.45), леммы 2.1, условий (1.6) и (3.48) равномерно по $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{1/2}$ первая дробь в представлении функции G стремится к единице и функция H стремится к нулю при $t \uparrow \omega$. Поэтому система дифференциальных уравнений (3.47) может быть записана в виде

$$\begin{cases} v_i' = \dfrac{\nu_{0n-1}}{\left(\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\right)}\left(f_i(\tau, v_1, \ldots, v_n) + 1 + v_{i+1} - \frac{(1+v_i)\prod_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}}}{1+v_n}\right), \\ \qquad i = \overline{1, n-2}, \\ v_{n-1}' = \dfrac{\nu_{0n-1}}{\left(\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\right)}\left(f_{n-1}(\tau, v_1, \ldots, v_n) + 1 - \frac{(1+v_{n-1})\prod_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}}}{1+v_n}\right), \\ v_n' = \dfrac{\nu_{0n-1}}{\left(\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\right)}\left(f_n(\tau, v_1, \ldots, v_n) + \gamma_s\prod_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}} - \gamma_s(1+v_n)\right), \end{cases}$$

где

$$\lim_{\tau\to+\infty} f_i(\tau, v_1, \ldots, v_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{1/2}.$$

Далее, выделяя линейные части в слагаемых, стоящих после функций f_i, $i = \overline{1, n}$, получаем систему дифференциальных уравнений

$$v_i' = \frac{\nu_{0n-1}}{\left(\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k c_{ks}\right)}\left(f_i(\tau, v_1, \ldots, v_n) + \sum_{k=1}^{n} p_{ik}v_k + V_i(v_1, \ldots, v_n)\right), \quad i = \overline{1, n}, \tag{3.49}$$

в которой

$$p_{ii} = -1 - \sigma_{si-1}, \quad p_{ii+1} = 1 - \sigma_{si}, \quad p_{ik} = -\sigma_{sk-1}$$

$$\text{при} \quad k \neq i, i+1, n \quad p_{in} = 1, \quad i = \overline{1, n-2},$$

$$p_{n-1k} = -\sigma_{sk-1} \quad \text{при} \quad k = \overline{1, n-2},$$

$$p_{n-1n-1} = -1 - \sigma_{sn-2}, \quad p_{n-1n} = 1,$$

$$p_{nk} = \gamma_s\sigma_{sk-1} \quad \text{при} \quad k = \overline{1, n-1}, \quad p_{nn} = -\gamma_s,$$

$$V_i(v_1, \ldots, v_n) = -\frac{(1+v_i)\prod_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}}}{1+v_n} - v_n +$$

$$+ (1+\sigma_{si-1})v_i + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n-1}\sigma_{sk-1}v_k, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$V_n(v_1, \ldots, v_n) = \gamma_s\prod_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}} - \gamma_s\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_{sk-1}v_k.$$

Здесь

$$\lim_{|v_1|+\dots+|v_n|\to 0} \frac{\partial V_i(v_1,\dots,v_n)}{\partial v_k} = 0, \quad i,k=\overline{1,n},$$

характеристическое уравнение $\det[P-\rho E]=0$, где $P=(p_{ik})_{i,k=1}^n$ и E — единичная матрица размерности $n\times n$, имеет вид (3.35). В силу условий теоремы это уравнение не имеет корней с нулевой действительной частью. Тем самым показано, что для системы (3.49) выполнены все условия леммы 2.3. Согласно этой лемме данная система имеет по крайней мере одно решение $(v_i)_{i=1}^n\colon [\tau_2,+\infty[\, \to \mathbb{R}^n$, где $\tau_2\ge\tau_1$, стремящееся к нулю при $\tau\to+\infty$, причем таких решений существует l-параметрическое семейство, если среди корней алгебраического уравнения (3.35) имеется l корней (с учетом кратных), действительные части которых имеют знак, противоположный знаку числа $\alpha_s\nu_{0n-1}$. Каждому такому решению, в силу замены (3.46) и первых из условий (1.6), соответствует решение $y\colon [t_2,\omega[\, \to\mathbb{R}$, где $t_2\in[a,\omega[$, дифференциального уравнения (1.1), которое допускает при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (3.28) и (3.29). Используя эти представления, условия (3.26), (3.27), нетрудно проверить, что каждое такое решение уравнения (1.1) является $P_\omega(Y_0,\dots,Y_{n-1},1)$-решением.

Теорема 3.3 доказана.

Литература

1. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. – 2011. – **47**, № 5. – С. 628 – 650.
2. *Евтухов В. М., Клопот А. М.* Асимптотика некоторых классов решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 3. – С. 354 – 380.
3. *Евтухов В. М., Клопот А. М.* Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями // Укр. мат. журн. – 2011. – **56**, № 3. – 18 с.
4. *Клопот А. М.* Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями. – Дис. . . . канд. физ-мат. наук. – 2014. – 148 с.
5. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
6. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 52 – 80.

Получено 26.10.2017