УДК 517.228.4

ОБ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КРАТНЫМ КОРНЕМ ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ

В. Ф. Бутузов

МГУ им. М. В. Ломоносова
Ленинские горы, 1, стр. 2, Москва, 119991, Россия

We consider a boundary-value problem for a system of two second order ordinary differential equations having, in both equations, different powers of a small parameter as coefficients of the second order derivatives.

A feature of the system is that one of the eqution has a root of multiplicity two. This leads to a qualitative difference in asymptotics of the boundary-layer solution of the system under consideration as opposed to the known asymptotics in the case where the roots of the equations of the degenerate system are simple. There is a change in the structure of the boundary-layer series, the boundary-layers become multizone, the standard algorithm for constructing boundary-layer functions becomes fails and needs an essential modification.

Розглядається крайова задача для системи двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з різними степенями малого параметра при другій похідній у першому і другому рівняннях.

Особливість системи полягає в тому, що одне із двох рівнянь виродженої системи має двократний корінь. Це обумовлює якісні відмінності асимптотики розв'язку примежового шару розглядуваної задачі від відомої асимптотики у випадку, коли корені рівнянь виродженої системи є простими (однократними): змінюється структура рядів примежового шару, примежові шари є багатозонними, а стандартний алгоритм побудови примежових функцій стає непридатним і потребує суттєвої модифікації.

1. Введение. Постановка задачи. Рассмотрим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\varepsilon^2 \frac{d^2u}{dx^2} = F(u,v,x,\varepsilon), \quad \varepsilon \frac{d^2v}{dx^2} = f(u,v,x,\varepsilon), \quad x \in (0;1), \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. В граничных точках $x = 0$ и $x = 1$ зададим для искомых функций $u(x,\varepsilon)$ и $v(x,\varepsilon)$ краевые условия, имея в виду для каждой из функций либо условие Дирихле (например, $u(0,\varepsilon) = u^0$), либо условие Неймана $\left(\text{например, } \dfrac{dv}{dx}(0,\varepsilon) = q^0\right)$.

Поставим вопрос о существовании и асимптотике по параметру ε погранслойного решения системы (1) с заданными краевыми условиями, т. е. такого решения, которое при $\varepsilon \to 0$ стремится на интервале $(0;1)$ к решению соответствующей вырожденной системы (она получается из (1) при $\varepsilon = 0$):

$$F(u,v,x,0) = 0, \quad f(u,v,x,0) = 0. \tag{2}$$

Пусть первое уравнение системы (2) имеет простой (т. е. однократный) корень относи-

© В. Ф. Бутузов, 2018

тельно u:

$$u = \varphi(v, x), \tag{3}$$

и второе уравнение системы (2) после подстановки вместо u корня (3), т. е. уравнение

$$f(\varphi(v, x), v, x) = 0,$$

имеет простой корень относительно v:

$$v = \overline{v}_0(x), \quad x \in [0; 1].$$

Таким образом, вырожденная система (2) имеет решение

$$u = \overline{u}_0(x) := \varphi(\overline{v}_0(x), x), \quad v = \overline{v}_0(x).$$

При определенных требованиях (они зависят от вида краевых условий для u и v) краевая задача для системы (1) имеет для достаточно малых ε решение $u(x, \varepsilon)$, $v(x, \varepsilon)$ погранслойного типа, обладающее асимптотическим разложением вида (см. [1])

$$\begin{aligned} u(x, \varepsilon) &= \overline{u}(x, \varepsilon) + \Pi u(\xi, \varepsilon) + \tilde{\Pi} u(\tilde{\xi}, \varepsilon) + Pu(\zeta, \varepsilon) + \tilde{P}u(\tilde{\zeta}, \varepsilon), \\ v(x, \varepsilon) &= \overline{v}(x, \varepsilon) + \Pi v(\xi, \varepsilon) + \tilde{\Pi} v(\tilde{\xi}, \varepsilon) + Pv(\zeta, \varepsilon) + \tilde{P}v(\tilde{\zeta}, \varepsilon). \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $\overline{u}(x, \varepsilon)$ и $\overline{v}(x, \varepsilon)$ — регулярные части асимптотики, они представляют собой ряды по целым степеням ε, например

$$\overline{u}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \overline{u}_i(x),$$

а главными членами этих рядов являются функции $\overline{u}_0(x)$ и $\overline{v}_0(x)$ — решение вырожденной системы. Остальные четыре слагаемых в правой части каждого равенства (4) — это погранслойные ряды по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$, коэффициенты которых (назовем их пограничными функциями) зависят от погранслойных переменных

$$\xi = x/\sqrt{\varepsilon}, \quad \zeta = x/\varepsilon, \quad \tilde{\xi} = (1 - x)/\sqrt{\varepsilon}, \quad \tilde{\zeta} = (1 - x)/\varepsilon, \tag{5}$$

причем порядок (относительно ε) главного члена каждого погранслойного ряда зависит от вида краевых условий. Например, если в точке $x = 0$ для функции v заданы условия Дирихле, то ряды Πu и Πv начинаются с членов нулевого порядка, т. е. имеют вид

$$\Pi u(\xi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \Pi_i u(\xi), \quad \Pi v(\xi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \Pi_i v(\xi),$$

а если для v в точке $x = 0$ заданы условия Неймана, то ряды Πu и Πv начинаются с членов порядка $\sqrt{\varepsilon}$, т. е. их можно записать в виде

$$\Pi u(\xi, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \Pi_i u(\xi), \quad \Pi v(\xi, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \Pi_i v(\xi).$$

Отметим один принципиальный момент, характерный для случая простых корней уравнений вырожденной системы. Все пограничные функции определяются последовательно с помощью известного алгоритма А. Б. Васильевой (см. [1]) и имеют экспоненциальные оценки вида

$$|\Pi_i u(\xi)| \le c\exp(-\kappa\xi), \quad \xi \ge 0, \quad |P_i u(\zeta)| \le c\exp(-\kappa\zeta), \quad \zeta \ge 0. \tag{6}$$

Здесь и далее через c и κ обозначаются подходящие положительные числа, не зависящие от ε и, вообще говоря, различные в разных оценках.

В данной работе рассмотрим случай, когда первое уравнение системы (2) имеет двукратный корень, что обусловлено следующим требованием:

$\mathbf{A_1}$. Пусть функция $F(u,v,x,\varepsilon)$ имеет вид

$$F(u,v,x,\varepsilon) = h(x)(u-\varphi(v,x))^2 - \varepsilon F_1(u,v,x,\varepsilon), \tag{7}$$

функции h, φ, F_1 и f являются достаточно гладкими и $h(x) > 0$, $x \in [0;1]$.

Как обычно, требуемый порядок гладкости указанных функций обусловлен порядком асимптотики, которую мы хотим построить. Поскольку речь пойдет об асимптотике произвольного порядка, будем считать эти функции бесконечно дифференцируемыми в области $\{(u,v,x,\varepsilon)\colon u \in I_1, v \in I_2,\ x \in [0;1], \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]\}$, где I_1 и I_2 — некоторые числовые интервалы, $\varepsilon_0 > 0$ — некоторое число.

При условии A_1 первое уравнение системы (2) имеет, очевидно, двукратный корень $u = \varphi(v,x)$.

Оказалось, что в этом случае краевая задача для системы (1) при определенных требованиях, зависящих от вида краевых условий, имеет для достаточно малых ε погранслойное решение с асимптотикой вида (4), однако, в отличие от случая простых корней уравнений вырожденной системы, ряды, входящие в правые части равенств (4), имеют иную структуру, а алгоритм А. Б. Васильевой определения пограничных функций требует существенной модификации.

В работе [2] исследована система (1) с краевыми условиями Неймана для функций $u(x,\varepsilon)$ и $v(x,\varepsilon)$ в точках $x = 0$ и $x = 1$. В отличие от (5) погранслойные переменные ζ и $\tilde\zeta$ имеют в этом случае иной масштаб, а именно,

$$\zeta = x/\varepsilon^{3/4}, \quad \tilde\zeta = (1-x)/\varepsilon^{3/4},$$

погранслойные ряды являются рядами по целым степеням $\varepsilon^{1/4}$, а экспоненциальные оценки вида (6) сохраняются для всех пограничных функций.

В данной работе рассмотрим систему (1) с краевыми условиями Дирихле для функции $u(x,\varepsilon)$ и условиями Неймана для функции $v(x,\varepsilon)$:

$$u(x,\varepsilon) = u^0, \quad u(1,\varepsilon) = u^1, \quad \frac{dv}{dx}(0,\varepsilon) = q^0, \quad \frac{dv}{dx}(1,\varepsilon) = q^1. \tag{8}$$

Как мы увидим, это приведет не только к изменению структуры погранслойных рядов, но также к новым (не экспоненциальным) оценкам членов рядов Pu, Pv, $\tilde Pu$, $\tilde Pv$, отражающим трехзонный характер их убывания с ростом соответствующей погранслойной переменной. Изменится также алгоритм формирования уравнений для P-функций.

В п. 2 будет построена асимптотика погранслойного решения задачи (1), (8). По ходу построения будут введены некоторые требования. В п. 3 доказана теорема о существовании решения задачи (1), (8), обладающего построенной в п. 2 асимптотикой. Пункт 4 содержит некоторые замечания о задачах, примыкающих к рассмотренной в данной работе.

2. Построение асимптотики решения задачи (1), (8). Асимптотику решения задачи (1), (8) построим в виде (4), где погранслойные переменные ξ, ζ, $\tilde{\xi}$, $\tilde{\zeta}$ такие же, как в случае простых корней уравнений вырожденной системы (см. (5)), а ряды в правых частях (4) имеют иную структуру.

2.1. Регулярные части асимптотики. Построим их в виде

$$\overline{u}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2}\overline{u}_i(x), \quad \overline{v}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2}\overline{v}_i(x). \tag{9}$$

Стандартным способом, т. е. подставляя ряды (9) в уравнения (1) вместо u и v, разлагая правые части уравнений в ряды по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в левой и правой частях равенств, получаем последовательно для $i = 0, 1, 2, \dots$ системы уравнений относительно $\overline{u}_i(x)$, $\overline{v}_i(x)$.

При $i = 0$ для $\overline{u}_0$, $\overline{v}_0$ имеем вырожденную систему

$$h(x)(\overline{u}_0 - \varphi(\overline{v}_0, x))^2 = 0, \quad f(\overline{u}_0, \overline{v}_0, x, 0) = 0.$$

Из первого уравнения следует равенство $\overline{u}_0 = \varphi(\overline{v}_0, x)$, в силу которого второе уравнение сводится к уравнению относительно $\overline{v}_0$:

$$g(\overline{v}_0, x) := f(\varphi(\overline{v}_0, x), \overline{v}_0, x, 0) = 0. \tag{10}$$

$\mathbf{A_2}$. Пусть уравнение (10) имеет решение $\overline{v}_0 = \overline{v}_0(x)$, $x \in [0;1]$, и

$$\overline{g}_v(x) := \frac{\partial g}{\partial \overline{v}_0}\,(\overline{v}_0(x), x) > 0, \quad x \in [0;1]. \tag{11}$$

Таким образом, главные члены $\overline{u}_0(x) = \varphi(\overline{v}_0(x), x)$ и $\overline{v}_0(x)$ рядов (9) являются решением вырожденной системы уравнений.

Для $\overline{u}_1$, $\overline{v}_1$ получаем систему уравнений

$$h(x)(\overline{u}_1 - \overline{\varphi}_v(x)\overline{v}_1)^2 - \overline{F}_1(x) = 0, \quad \overline{f}_u(x)\overline{u}_1 + \overline{f}_v(x)\overline{v}_1 = 0, \tag{12}$$

где

$$\begin{gathered} \overline{\varphi}_v(x) := \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,(\overline{v}_0(x), x), \quad \overline{F}_1(x) := F_1(\overline{u}_0(x), \overline{v}_0(x), x, 0), \\ \overline{f}_u(x) := \frac{\partial f}{\partial u}\,(\overline{u}_0(x), \overline{v}_0(x), x, 0), \quad \overline{f}_v(x) := \frac{\partial f}{\partial v}\,(\overline{u}_0(x), \overline{v}_0(x), x, 0). \end{gathered} \tag{13}$$

Чтобы из первого уравнения найти функцию $\overline{u}_1 - \overline{\varphi}_v(x)\overline{v}_1$, потребуем, чтобы $h(x)$ и $\overline{F}_1(x)$ имели одинаковые знаки.

$\mathbf{A_3}$. Пусть $\overline{F}_1(x) > 0$, $x \in [0;1]$.

Тогда $\overline{u}_1 - \overline{\varphi}_v(x)\overline{v}_1$ равно либо $a(x)$, либо $(-a(x))$, где

$$a(x) = \left[h^{-1}(x)\overline{F}_1(x)\right]^{1/2} > 0, \quad x \in [0;1]. \tag{14}$$

Как будет видно из дальнейшего, для построения асимптотики погранслойного решения нужно взять $a(x)$ со знаком плюс:

$$\overline{u}_1 - \overline{\varphi}_v(x)\overline{v}_1 = a(x). \tag{15}$$

Решая теперь линейную систему уравнений, состоящую из уравнения (15) и второго уравнения в (12), находим $\overline{u}_1(x)$ и $\overline{v}_1(x)$:

$$\overline{u}_1(x) = \overline{g}_v^{-1}(x)\overline{f}_v(x)a(x), \quad \overline{v}_1(x) = -\overline{g}_v^{-1}(x)\overline{f}_u(x)a(x).$$

Для коэффициентов $\overline{u}_i(x), \overline{v}_i(x)$ рядов (9) при $i \geq 2$ получаем аналогичную линейную систему уравнений

$$\overline{u}_i - \overline{\varphi}_v(x)\overline{v}_i = G_i(x), \quad \overline{f}_u(x)\overline{u}_i + \overline{f}_v(x)\overline{v}_i = H_i(x),$$

где $G_i(x)$ и $H_i(x)$ рекуррентно выражаются через $\overline{u}_j(x), \overline{v}_j(x)$ с номерами $j < i$. Из этой системы однозначно определяются $\overline{u}_i(x)$, $\overline{v}_i(x)$, поскольку определитель системы равен $\overline{g}_v(x) > 0$, $x \in [0;1]$.

Итак, регулярные части асимптотики построены.

2.2. Погранслойные части асимптотики. Погранслойные ряды $\Pi u(\xi,\varepsilon)$, $\Pi v(\xi,\varepsilon)$, $Pu(\zeta,\varepsilon)$, $Pv(\zeta,\varepsilon)$, играющие существенную роль лишь в малой окрестности граничной точки $x = 0$, а также погранслойные ряды $\tilde{\Pi}u(\tilde{\xi},\varepsilon)$, $\tilde{\Pi}v(\tilde{\xi},\varepsilon)$, $\tilde{P}u(\tilde{\zeta},\varepsilon)$, $\tilde{P}v(\tilde{\zeta},\varepsilon)$, имеющие важное значение в окрестности точки $x = 1$, будем строить в виде рядов по целым степеням $\varepsilon^{1/4}$. Рассмотрим процедуру построения погранслойных рядов Πu, Πv, Pu, Pv.

2.2.1. Уравнения для Π***-функций.*** Ряды Πu и Πv будем строить в виде $(\xi = x/\sqrt{\varepsilon})$

$$\Pi u(\xi,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\Pi_i u(\xi), \quad \Pi v(\xi,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\Pi_i v(\xi). \tag{16}$$

Стандартным способом (см. [1]) для этих рядов получаем систему уравнений

$$
\begin{aligned}
\varepsilon \frac{d^2}{d\xi^2}(\sqrt{\varepsilon}\Pi_0 u + \ldots) = \Pi F &:= F\left(\overline{u}(\sqrt{\varepsilon}\xi, \varepsilon) + \Pi u, \overline{v}(\sqrt{\varepsilon}\xi, \varepsilon) + \Pi v, \sqrt{\varepsilon}\xi, \varepsilon\right) - \\
&- F\left(\overline{u}(\sqrt{\varepsilon}\xi, \varepsilon), \overline{v}(\sqrt{\varepsilon}\xi, \varepsilon), \sqrt{\varepsilon}\xi, \varepsilon\right) = \\
= h(\sqrt{\varepsilon}\xi)\Big\{\Big[&\overline{u}_0(\sqrt{\varepsilon}\xi) + \sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(\sqrt{\varepsilon}\xi) + \ldots + \sqrt{\varepsilon}\Pi_0 u + \ldots \\
&\ldots - \varphi(\overline{v}_0(\sqrt{\varepsilon}\xi) + \sqrt{\varepsilon}\overline{v}_1(\sqrt{\varepsilon}\xi) + \ldots + \sqrt{\varepsilon}\Pi_0 v + \ldots, \sqrt{\varepsilon}\xi)\Big]^2 - \\
&- \Big[\overline{u}_0(\sqrt{\varepsilon}\xi) + \sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(\sqrt{\varepsilon}\xi) + \ldots - \varphi(\overline{v}_0(\sqrt{\varepsilon}\xi) + \\
&+ \sqrt{\varepsilon}\overline{v}_1(\sqrt{\varepsilon}\xi) + \ldots, \sqrt{\varepsilon}\xi)\Big]^2\Big\} - \varepsilon \Pi F_1, \\
\frac{d^2}{d\xi^2}(\sqrt{\varepsilon}\Pi_0 v + \ldots) = \Pi f &:= f\Big(\overline{u}_0(\sqrt{\varepsilon}\xi) + \sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(\sqrt{\varepsilon}\xi) + \ldots + \sqrt{\varepsilon}\Pi_0 u + \ldots, \overline{v}_0(\sqrt{\varepsilon}\xi) + \\
&+ \sqrt{\varepsilon}\overline{v}_1(\sqrt{\varepsilon}\xi) + \ldots + \sqrt{\varepsilon}\Pi_0 v + \ldots, \sqrt{\varepsilon}\xi, \varepsilon\Big) - f\Big(\overline{u}_0(\sqrt{\varepsilon}\xi) + \\
&+ \sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(\sqrt{\varepsilon}\xi) + \ldots, \overline{v}_0(\sqrt{\varepsilon}\xi) + \sqrt{\varepsilon}\overline{v}_1(\sqrt{\varepsilon}\xi) + \ldots, \sqrt{\varepsilon}\xi, \varepsilon\Big), \ \xi > 0.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Разлагая правые части уравнений (17) в ряды по целым степеням $\varepsilon^{1/4}$, стандартным способом получаем последовательно для $i = 0, 1, 2, \ldots$ системы уравнений относительно $\Pi_i u$, $\Pi_i v$. Для $\Pi_0 u$, $\Pi_0 v$ имеем уравнения

$$
\begin{gathered}
h(0)\left[(a(0) + \Pi_0 u - \overline{\varphi}_v(0)\Pi_0 v)^2 - a^2(0)\right] = 0, \\
\frac{d^2 \Pi_0 v}{d\xi^2} = \overline{f}_u(0)\Pi_0 u + \overline{f}_v(0)\Pi_0 v,
\end{gathered}
\tag{18}
$$

где $a(0)$, $\overline{\varphi}_v(0)$, $\overline{f}_u(0)$ и $\overline{f}_v(0)$ определены в (13), (14).

Из первого уравнения системы (18) следует равенство

$$
\Pi_0 u = \overline{\varphi}_v(0)\Pi_0 v, \tag{19}
$$

в силу которого второе уравнение принимает вид

$$
\frac{d^2 \Pi_0 v}{d\xi^2} = \overline{g}_v(0)\Pi_i v, \quad \xi > 0, \tag{20}
$$

где $\overline{g}_v(0) = \overline{f}_u(0)\overline{\varphi}_v(0) + \overline{f}_v(0) > 0$ (см. (10) и (11)).

Для определения функции $\Pi_0 v(\xi)$ к уравнению (20) нужно добавить еще два граничных условия. Это будет сделано в пп. 2.2.3.

Для $\Pi_i u$, $\Pi_i v$ при $i \geq 1$ из (17) получаем линейную систему уравнений

$$2h(0)a(0)\left[\Pi_i u - \overline{\varphi}_v(0)\Pi_i v\right] = \psi_i(\xi), \tag{21}$$

$$\frac{d^2\Pi_i v}{d\xi^2} = \overline{f}_u(0)\Pi_i u + \overline{f}_v(0)\Pi_i v + \chi_i(\xi), \quad \xi > 0, \tag{22}$$

где $\psi_i(\xi)$ и $\chi_i(\xi)$ выражаются рекуррентно через $\Pi_j u(\xi)$, $\Pi_j v(\xi)$ с номерами $j < i$, в частности

$$\psi_1(\xi) = 0, \quad \chi_1(\xi) = 0, \quad \xi \geq 0, \tag{23}$$

$$\psi_2(\xi) = \frac{d^2\Pi_0 u}{d\xi^2}(\xi) + 2h(0)a(0)\left[\overline{\varphi}_{vv}(0)\left(\overline{v}_0'(0)\xi + \overline{v}_1(0) + \frac{1}{2}\Pi_0 v(\xi)\right) + \overline{\varphi}_{vx}(0)\xi\right]\Pi_0 v(\xi) +$$
$$+ \overline{F}_{1u}(0)\Pi_0 u(\xi) + \overline{F}_{1v}(0)\Pi_0 v(\xi). \tag{24}$$

Выражая из уравнения (21) $\Pi_i u$ через $\Pi_i v$ и подставляя это выражение в уравнение (22), приходим к уравнению для $\Pi_i v$:

$$\frac{d^2\Pi_i v}{d\xi^2} = \overline{g}_v(0)\Pi_i v + \pi_i(\xi), \quad \xi > 0, \tag{25}$$

где $\pi_i(\xi)$ выражается через $\Pi_j u(\xi)$, $\Pi_j v(\xi)$ с номерами $j < i$. Граничные условия для $\Pi_i v(\xi)$ будут найдены в пп. 2.2.3.

2.2.2. Уравнения для P-функций. Ряды Pu и Pv будем строить в виде ($\zeta = x/\varepsilon$)

$$Pu(\zeta,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} P_i u(\zeta), \quad Pv(\zeta,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} P_i v(\zeta). \tag{26}$$

Уравнения для коэффициентов этих рядов, т. е. для функций $P_i u$, $P_i v$, нельзя формировать стандартным способом, т. е. путем приравнивания членов одинакового порядка относительно ε в разложениях левой и правой частей соответствующего уравнения. Это обусловлено тем, что первое уравнение вырожденной системы (2) имеет в данном случае двукратный корень. Чтобы сформировать правильные уравнения для функций $P_i u$, $P_i v$, введем еще одну погранслойную переменную

$$\eta = x/\varepsilon^{3/4}.$$

Тогда $\xi = \varepsilon^{1/4}\eta$, и систему уравнений для рядов Pu, Pv запишем в виде

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}\left(P_0u+\varepsilon^{1/4}P_1u+\ldots\right) = PF := F\left(\overline{u}\left(\varepsilon^{3/4}\eta,\varepsilon\right)+\Pi u\left(\varepsilon^{1/4}\eta,\varepsilon\right)+Pu,\overline{v}\left(\varepsilon^{3/4}\eta,\varepsilon\right)+\right.$$

$$\left.+\Pi v\left(\varepsilon^{1/4}\eta,\varepsilon\right)+Pv,\varepsilon^{3/4}\eta,\varepsilon\right)-F\left(\overline{u}\left(\varepsilon^{3/4}\eta,\varepsilon\right)+\right.$$

$$\left.+\Pi u\left(\varepsilon^{1/4}\eta,\varepsilon\right),\overline{v}\left(\varepsilon^{3/4}\eta,\varepsilon\right)+\Pi v\left(\varepsilon^{1/4}\eta,\varepsilon\right),\varepsilon^{3/4}\eta,\varepsilon\right) =$$

$$= h\left(\varepsilon^{3/4}\eta\right)\left\{\left[\overline{u}_0\left(\varepsilon^{3/4}\eta\right)+\sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1\left(\varepsilon^{3/4}\eta\right)+\ldots\right.\right.$$

$$\ldots+\sqrt{\varepsilon}\Pi_0u\left(\varepsilon^{1/4}\eta\right)+\ldots+P_0u+\varepsilon^{1/4}P_1u+\ldots$$

$$\ldots-\varphi\left(\overline{v}_0\left(\varepsilon^{3/4}\eta\right)+\sqrt{\varepsilon}\overline{v}_1\left(\varepsilon^{3/4}\eta\right)+\ldots+\sqrt{\varepsilon}\Pi_0v\left(\varepsilon^{1/4}\eta\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\left.\ldots+\sqrt{\varepsilon}P_0v+\ldots,\varepsilon^{3/4}\eta\right)\right]^2-\left[\overline{u}_0\left(\varepsilon^{3/4}\eta\right)+\sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1\left(\varepsilon^{3/4}\eta\right)+\ldots\right.$$

$$\ldots+\sqrt{\varepsilon}\Pi_0u\left(\varepsilon^{1/4}\eta\right)+\ldots-\varphi\left(\overline{v}_0\left(\varepsilon^{3/4}\eta\right)++\sqrt{\varepsilon}\overline{v}_1\left(\varepsilon^{3/4}\eta\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\left.\left.\ldots+\sqrt{\varepsilon}\Pi_0v\left(\varepsilon^{1/4}\eta\right)+\ldots,\varepsilon^{3/4}\eta\right)\right]^2\right\}-\varepsilon PF_1, \tag{27}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{d^2}{d\zeta^2}\left(\sqrt{\varepsilon}P_0v+\ldots\right) = Pf := f\left(\overline{u}_0\left(\varepsilon^{3/4}\eta\right)+\ldots+\sqrt{\varepsilon}\Pi_0u\left(\varepsilon^{1/4}\eta\right)+\ldots\right.$$

$$\ldots+P_0u+\ldots,\overline{v}_0\left(\varepsilon^{3/4}\eta\right)+\ldots+\sqrt{\varepsilon}\Pi_0v\left(\varepsilon^{1/4}\eta\right)+\ldots$$

$$\left.\ldots+\sqrt{\varepsilon}P_0v+\ldots,\varepsilon^{3/4}\eta,\varepsilon\right)-f\left(\overline{u}_0\left(\varepsilon^{3/4}\eta\right)+\ldots\right.$$

$$\ldots+\sqrt{\varepsilon}\Pi_0u\left(\varepsilon^{1/4}\eta\right)+\ldots,\overline{v}_0\left(\varepsilon^{3/4}\eta\right)+\ldots$$

$$\left.\ldots+\sqrt{\varepsilon}\Pi_0v\left(\varepsilon^{1/4}\eta\right)+\ldots,\varepsilon^{3/4}\eta,\varepsilon\right). \tag{28}$$

Извлекать уравнения для функций P_iu и P_iv из уравнений (27) и (28) будем с помощью алгоритма, развитого для сингулярно возмущенных задач с кратным корнем вырожденного уравнения (см. [3]). В частности, для P_0u из уравнения (27) в соответствии с этим алгоритмом получаем уравнение

$$\frac{d^2P_0u}{d\zeta^2} = h(0)\left[(P_0u)^2+2\sqrt{\varepsilon}a(0)P_0u\right], \quad \zeta > 0, \tag{29}$$

а для P_0v из (28) извлекаем уравнение

$$\frac{d^2P_0v}{d\zeta^2} = \sqrt{\varepsilon}q_0(\zeta), \quad \zeta > 0, \tag{30}$$

где

$$q_0(\zeta) = f\left(\overline{u}_0(0) + P_0u(\zeta), \overline{v}_0(0), 0, 0\right). \tag{31}$$

Уравнения для P_iu и P_iv при $i \geq 1$, извлекаемые из (27) и (28), имеют вид

$$\frac{d^2P_iu}{d\zeta^2} = k(\zeta,\varepsilon)P_iu + p_i(\zeta,\varepsilon), \quad \zeta > 0, \tag{32}$$

и

$$\frac{d^2P_iv}{d\zeta^2} = \sqrt{\varepsilon}q_i(\zeta,\varepsilon), \quad \zeta > 0, \tag{33}$$

где $k(\zeta,\varepsilon) = 2h(0)\left(P_0u(\zeta) + \sqrt{\varepsilon}a(0)\right)$, функции $p_i(\zeta,\varepsilon)$ и $q_i(\zeta,\varepsilon)$ выражаются через $P_ju(\zeta)$, $P_jv(\zeta)$ с номерами $j < i$, а $q_i(\zeta,\varepsilon)$, кроме того, через $P_iu(\zeta)$ и формируются с помощью упомянутого нестандартного алгоритма, о котором подробнее см. в пп. 2.2.5. В частности,

$$p_1(\zeta,\varepsilon) = 0, \quad q_1(\zeta,\varepsilon) = 0. \tag{34}$$

В пп. 2.2.3 будут приведены граничные условия для функций P_iu, P_iv.

2.2.3. Граничные условия для пограничных функций. Чтобы получить граничные условия для $\Pi_iv(\xi)$ при $\xi = 0$ и $P_iu(\zeta)$ при $\zeta = 0$, подставим ряды (4) с учетом их структуры, т. е. формул (9), (16), (26), в граничные условия (8) при $x = 0$. Учитывая, что ряды $\tilde{\Pi}u$, $\tilde{\Pi}v$, $\tilde{P}u$, $\tilde{P}v$ равны нулю в окрестности точки $x = 0$ (см. замечание в конце пп. 2.2.5), получаем равенства

$$\overline{u}_0(0) + \sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(0) + \ldots + \sqrt{\varepsilon}\Pi_0u(0) + \ldots + P_0u(0) + \varepsilon^{1/4}P_1u(0) + \ldots = u^0, \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{v}_0}{dx}(0) + \sqrt{\varepsilon}\,\frac{d\overline{v}_1}{dx}(0) + \ldots + \frac{d\Pi_0v}{d\xi}\,(0) + \varepsilon^{1/4}\,\frac{d\Pi_1v}{d\xi}\,(0) + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\frac{dP_0v}{d\zeta}\,(0) + \varepsilon^{1/4}\,\frac{dP_1v}{d\zeta}\,(0) + \ldots\right) = q^0.\end{aligned} \tag{36}$$

Добавим к этим условиям стандартные для пограничных функций условия на бесконечности:

$$\Pi_iv(\infty) = 0, \quad P_iu(\infty) = 0, \quad P_iv(\infty) = 0, \quad i \geq 0. \tag{37}$$

Из (35) стандартным способом получаем граничные условия для $P_iu(\zeta)$ при $\zeta = 0$:

$$P_0u(0) = u^0 - \overline{u}_0(0) =: P^0, \quad P_1u(0) = 0, \tag{38}$$

$$P_iu(0) = -\overline{u}_{i/2}(0) - \Pi_{i-2}u(0), \quad i \geq 2, \tag{39}$$

причем $\overline{u}_{i/2}(0) = 0$ для нечетных i, а из (36) нестандартным способом извлекаем граничные условия для $\Pi_i v(\xi)$ при $\xi = 0$:

$$\frac{d\Pi_0 v}{d\xi}(0) = q^0 - \frac{d\overline{v}_0}{dx}(0) - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{dP_0 v}{d\zeta}(0) =: \gamma_0, \tag{40}$$

$$\frac{d\Pi_1 v}{d\xi}(0) = -\frac{d\overline{v}_{i/2}}{dx}(0) - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{dP_i v}{d\zeta}(0), \quad i \geq 1, \tag{41}$$

причем $\dfrac{d\overline{v}_{i/2}}{dx}(0) = 0$ для нечетных i.

2.2.4. Главные члены погранслойных рядов. Сначала решаем уравнение (29) для $P_0 u(\zeta)$ с граничными условиями $P_0 u(0) = P^0$ (см. (38)) и $P_0 u(\infty) = 0$ (см. (37)). Чтобы эта задача для $P_0 u(\zeta)$ имела решение, введем еще одно требование.

$\mathbf{A_4}$. Пусть $P^0 := u^0 - \overline{u}_0(0) > 0$.

При условии A_4 задача для $P_0 u$ сводится стандартным способом к уравнению первого порядка

$$\frac{dP_0 u}{d\zeta} = -\left[2h(0)\left(\frac{1}{3}P_0 u + \sqrt{\varepsilon}a(0)\right)\right]^{1/2} \cdot P_0 u, \quad \zeta > 0,$$

с начальным условием

$$P_0 u(0) = P^0.$$

Решение этой задачи находим в явном виде

$$P_0 u(\zeta) = \frac{12\sqrt{\varepsilon}a(0)\left[1 + O\left(\varepsilon^{1/4}\right)\right]\exp\left(-\varepsilon^{1/4}k_0\zeta\right)}{\left\{1 - \left[1 - (12a(0)\left(P^0\right)^{-1})^{1/2}\varepsilon^{1/4} + O(\sqrt{\varepsilon})\right]\exp\left(-\varepsilon^{1/4}k_0\zeta\right)\right\}^2}, \tag{42}$$

где $k_0 = [2h(0)a(0)]^{1/2} > 0$, а величины $O\left(\varepsilon^{1/4}\right)$ и $O(\sqrt{\varepsilon})$ не зависят от ζ, для них нетрудно привести явные выражения. Заметим, что $P_0 u$ зависит не только от ζ, но также от ε, однако с целью уменьшения громоздкости формул будем писать $P_0 u(\zeta)$ вместо $P_0 u(\zeta, \varepsilon)$, и такую же договоренность примем в отношении функций $P_i u(\zeta)$, $i \geq 1$, и $P_i v(\zeta)$, $\Pi_i u(\xi)$, $\Pi_i v(\xi)$, $i \geq 0$.

Несложный анализ выражения (42) показывает, что монотонное убывание $P_0 u(\zeta)$ с ростом ζ имеет различный характер на разных промежутках изменения ζ. Можно выделить три зоны.

Первой зоной является отрезок $0 \leq \zeta \leq \varepsilon^{-\gamma}$, где в качестве γ можно взять любое не зависящее от ε положительное число, меньшее $1/4$. В этой зоне $P_0 u(\zeta)$ убывает с ростом ζ степенным образом: $P_0 u(\zeta) = O\left(\dfrac{1}{1+\zeta^2}\right)$. Затем следует вторая (переходная) зона, где $\varepsilon^{-\gamma} \leq \zeta \leq \varepsilon^{-1/4}$. В этой зоне происходит постепенное изменение характера убывания $P_0 u(\zeta)$ от степенного убывания к экспоненциальному, а также изменение масштаба погранслойной переменной. И, наконец, в третьей зоне, где $\zeta \geq \varepsilon^{-1/4}$, возникает новая погранслойная переменная $\eta = \varepsilon^{1/4}\zeta = x/\varepsilon^{3/4}$, и функция $P_0 u$ имеет оценку $P_0 u = O(\sqrt{\varepsilon})\exp(-k_0\eta)$. Описанное трехзонное убывание функции $P_0 u(\zeta)$ находит отражение в следующей оценке:

$$P_0 u(\zeta) \leq cP_\kappa(\zeta), \quad \zeta \geq 0, \tag{43}$$

где

$$P_\kappa(\zeta) = \frac{\sqrt{\varepsilon}\exp\left(-\varepsilon^{1/4}\kappa\zeta\right)}{\left[1+\varepsilon^{1/4}-\exp\left(-\varepsilon^{1/4}\kappa\zeta\right)\right]^2}, \quad \zeta \geq 0, \tag{44}$$

c и κ — положительные числа, не зависящие от ε. Функция $P_\kappa(\zeta)$ будет эталонной (оценочной) функцией для всех функций $P_i u(\zeta)$, $P_i v(\zeta)$, $i \geq 0$, аналогично тому, как в случае простых корней уравнений вырожденной системы эталонной функцией была $\exp(-\kappa\zeta)$ (см. (6)).

Отметим, что если формировать уравнение для $P_0 u(\zeta)$ стандартным способом, то выражение в квадратных скобках в правой части уравнения (29) не будет содержать слагаемого $2\sqrt{\varepsilon}a(0)P_0 u$, и тогда решение задачи для $P_0 u$ будет иметь оценку $P_0 u(\zeta) = O\left(\dfrac{1}{1+\zeta^2}\right)$ на всей полупрямой $\zeta \geq 0$, что не соответствует истинному поведению решения задачи (1), (8) в пограничном слое.

Поскольку функция $P_0 u(\zeta)$ определена, то для $P_0 v(\zeta)$ имеем уравнение (30) с известной правой частью и граничное условие (см. (37))

$$P_0 v(\infty) = 0. \tag{45}$$

Решение задачи (30), (45) имеет вид

$$P_0 v(\zeta) = \sqrt{\varepsilon}\int\limits_\infty^\zeta ds \int\limits_\infty^s q_0(s)\,ds. \tag{46}$$

Из выражения (31) для $q_0(\zeta)$ следует очевидная оценка

$$|q_0(\zeta)| \leq cP_0 u(\zeta) \leq cP_\kappa(\zeta),$$

где функция $P_\kappa(\zeta)$ определена в (44). Используя эту оценку, нетрудно получить для $P_0 v(\zeta)$ и ее производной следующие оценки:

$$|P_0 v(\zeta)| \leq cP_\kappa(\zeta), \quad \zeta \geq 0, \tag{47}$$

$$\left|\frac{dP_0 v}{d\zeta}(0)\right| \leq c\sqrt{\varepsilon}. \tag{48}$$

Отметим роль множителя $\sqrt{\varepsilon}$ в правой части (46). Без него функция $P_0 v(\zeta)$ была бы неограниченной при $\varepsilon \to 0$ в окрестности точки $\zeta = 0$, а ее производная не имела бы оценки (48), которая будет играть принципиальную роль при определении функции $\Pi_0 v(\xi)$. Для этой функции имеем уравнение (20) с граничными условиями (см. (40) и (37))

$$\frac{d\Pi_0 v}{d\xi}(0) = \gamma_0, \quad \Pi_0 v(\infty) = 0, \tag{49}$$

причем $\gamma_0 = O(1)$, поскольку $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\dfrac{dP_0v}{d\zeta}(0) = O(1)$ в силу (48). Решение задачи (20), (49) находим в явном виде

$$\Pi_0v(\xi) = -\gamma_0 b^{-1}\exp(-b\xi), \quad \xi \ge 0,$$

где $b = \sqrt{\bar{g}_v(0)} > 0$. Отсюда следует для $\Pi_0v(\xi)$ очевидная экспоненциальная оценка

$$|\Pi_0v(\xi)| \le c\exp(-\kappa\xi), \quad \xi \ge 0. \tag{50}$$

Зная $\Pi_0v(\xi)$, по формуле (19) находим функцию $\Pi_0u(\xi)$, она также имеет оценку вида (50):

$$|\Pi_0u(\xi)| \le c\exp(-\kappa\xi), \quad \xi \ge 0. \tag{51}$$

Таким образом, главные члены погранслойных рядов Πu Πv и Pu, Pv определены и имеют оценки (43), (47) и (50), (51).

2.2.5. Следующие члены погранслойных рядов. Для каждого $i = 1, 2, \dots$ функции $P_iu(\zeta)$, $P_iv(\zeta)$, $\Pi_iv(\xi)$, $\Pi_iu(\xi)$ определяются последовательно в том же порядке, что и для $i = 0$. При $i = 1$ все эти функции оказываются равными нулю, так как $p_1(\zeta,\varepsilon) = 0$, $q_1(\zeta,\varepsilon) = 0$ (см. (34)), $\psi_1(\xi) = 0$, $\chi_1(\xi) = 0$ (см. (23)), $P_1u(0) = 0$ (см. (38)), $\dfrac{d\Pi_1v}{d\xi}(0) = 0$ (см. (41)).

Пусть функции P_ju, P_jv и Π_jv, Π_ju определены для $j = 2, \dots, i-1$ и имеют оценки вида (43), (47) и (50), (51).

Используя это индуктивное предположение, на i-м шаге сначала определяем $P_iu(\zeta)$ как решение уравнения (32) с граничными условиями (39) и

$$P_iu(\infty) = 0. \tag{52}$$

Функция $p_i(\zeta,\varepsilon)$, входящая в правую часть уравнения (32), формируется после разложения правой части в (27) по целым степеням $\varepsilon^{1/4}$ с помощью алгоритма, описанного в [3], причем на последнем этапе формирования переменная η заменяется на $\varepsilon^{1/4}\zeta$. Этот алгоритм обеспечивает для $p_i(\zeta,\varepsilon)$ оценку

$$|p_i(\zeta,\varepsilon)| \le c\left(P_\kappa^2(\zeta) + \sqrt{\varepsilon}P_\kappa(\zeta)\right), \quad \zeta \ge 0. \tag{53}$$

Решение задачи (32), (39), (52) можно записать в виде

$$P_iu(\zeta) = -\Phi(\zeta)\Phi^{-1}(0)\left(\overline{u}_{i/2}(0) + \Pi_{i-2}u(0)\right) + \Phi(\zeta)\int\limits_0^\zeta \Phi^{-2}(s)\int\limits_\infty^s \Phi(t)p_i(t,\varepsilon)dtds,$$

где $\Phi(\zeta) = \dfrac{dP_0u}{d\zeta}(\zeta)$. Отсюда, используя (53), нетрудно получить оценку (см. [3])

$$|P_iu(\zeta)| \le cP_\kappa(\zeta), \quad \zeta \ge 0. \tag{54}$$

В качестве примера приведем выражения для $p_2(\zeta,\varepsilon)$:

$$p_2(\zeta,\varepsilon) = -2h(0)\overline{\varphi}_v(0)P_0u(\zeta)P_0v(\zeta) + 2\sqrt{\varepsilon}h(0)\times$$

$$\times\left[\overline{u}_2(0) - \overline{\varphi}_v(0)\overline{v}_2(0) + (2h(0)a(0))^{-1}\psi_2(0) - \frac{1}{2}\,\overline{\varphi}_{vv}(0)(\overline{v}_1(0) + \Pi_0 v(0))^2\right]\times$$

$$\times P_0u(\zeta) - 2\sqrt{\varepsilon}h(0)a(0)\overline{\varphi}_v(0)P_0v(\zeta) -$$

$$-\sqrt{\varepsilon}\left[F_1(\overline{u}_0(0) + P_0u(\zeta),\overline{v}_0(0),0,0) - F_1(\overline{u}_0(0),\overline{v}_0(0),0,0)\right],$$

где $\psi_2(0)$ определено в (24).

Функция $p_2(\zeta,\varepsilon)$ имеет, очевидно, оценку вида (53).

Определив функцию $P_iu(\zeta)$, перйдем к уравнению (33) для P_iv, правая часть $q_i(\zeta,\varepsilon)$ которого выражается через $P_ju(\zeta)$, $P_jv(\zeta)$ с номерами $j < i$, а также через $P_iu(\zeta)$, и, следовательно, становится известной функцией после определения $P_iu(\zeta)$, причем $q_i(\zeta,\varepsilon)$ имеет оценку

$$|q_i(\zeta,\varepsilon)| \le cP_\kappa(\zeta), \quad \zeta \ge 0. \tag{55}$$

Например, при $i = 2$ для функции $q_2(\zeta,\varepsilon)$ имеем выражение

$$q_2(\zeta,\varepsilon) = \left(f_u(\zeta) - \overline{f}_u(0)\right)(\overline{u}_1(0) + \Pi_0u(0)) + f_u(\zeta)P_2u(\zeta) +$$

$$+\left(f_v(\zeta) - \overline{f}_v(0)\right)(\overline{v}_1(0) + \Pi_0v(0)) + f_v(\zeta)P_0v(\zeta),$$

где

$$f_u(\zeta) := f_u(\overline{u}_0(0) + P_0u(\zeta),\overline{v}_0(0),0,0), \quad f_v(\zeta) := f_v(\overline{u}_0(0) + P_0u(\zeta),\overline{v}_0(0),0,0),$$

откуда для $q_2(\zeta,\varepsilon)$ следует оценка вида (55), поскольку $P_0u(\zeta)$, $P_0v(\zeta)$ и $P_2u(\zeta)$ имеют оценки вида (43). Решение уравнения (33) с граничным условием $P_iv(\infty) = 0$ записывается аналогично (46):

$$P_iv(\zeta) = \sqrt{\varepsilon}\int\limits_\infty^\zeta ds\int\limits_\infty^s q_i(t,\varepsilon)dt,$$

откуда получаем оценки, аналогичные (47) и (48):

$$|P_iv(\zeta)| \le cP_\kappa(\zeta), \quad \zeta \ge 0, \tag{56}$$

$$\left|\frac{dP_iv}{d\zeta}(0)\right| \le c\sqrt{\varepsilon}.$$

Оценки типа (54) и (56) показывают, что все члены рядов Pu и Pv имеют трехзонный характер убывания с ростом погранслойной переменной ζ.

Далее рассматриваем уравнение (25) для $\Pi_i v(\xi)$, в котором функция $\pi_i(\xi)$ в силу индуктивного предположения имеет экспоненциальную оценку

$$|\pi_i(\xi)| \leq c\exp(-\kappa\xi), \quad \xi > 0.$$

Решение уравнения (25) с граничными условиями (41) и $\Pi_i v(\infty) = 0$ можно найти в явном виде, и оно также имеет экспоненциальную оценку

$$|\Pi_i v(\xi)| \leq c\exp(-\kappa\xi), \quad \xi \geq 0. \tag{57}$$

Зная $\Pi_i v(\xi)$, из равенства (21) находим функцию $\Pi_i u(\xi)$, которая тоже имеет оценку вида (57).

Итак, погранслойные ряды Πu, Πv и Pu, Pv построены, и их коэффициенты имеют оценки вида (54) и (57).

Погранслойные ряды $\tilde{\Pi}u(\tilde{\xi},\varepsilon)$, $\tilde{\Pi}v(\tilde{\xi},\varepsilon)$ и $\tilde{P}u(\tilde{\zeta},\varepsilon)$, $\tilde{P}v(\tilde{\zeta},\varepsilon)$ строятся аналогично рядам Πu, Πv и Pu, Pv, и их коэффициенты имеют оценки, аналогичные (54) и (57) с заменой ξ на $\tilde{\xi}$ и ζ на $\tilde{\zeta}$.

При этом вводится требование, аналогичное A_4.

$\mathbf{A_5}$. Пусть $P^1 := u^1 - \overline{u}_0(1) > 0$.

Замечание. Чтобы функции $\Pi_i u$, $\Pi_i v$, $P_i u$, $P_i v$ не вносили невязок в граничные условия при $x = 1$, умножим каждую из них на срезающую функцию, т. е. бесконечно дифференцируемую функцию, равную единице в $\delta/2$-окрестности точки $x = 0$ и нулю вне δ-окрестности этой точки ($0 < \delta < 1/2$). Это не повлияет на построенную асимптотику, поскольку каждая из пограничных функций есть $o(\varepsilon^N)$ для любого N при $x \geq \delta/2$. Для регуляризованных таким образом пограничных функций сохраним старые обозначения. Аналогичное умножение на срезающие функции выполним для функций $\tilde{\Pi}_i u$, $\tilde{\Pi}_i v$, $\tilde{P}_i u$, $\tilde{P}_i v$.

3. Обоснование асимптотики. ***3.1. Дополнительные условия и формулировка теоремы.*** Обозначим через $U_n(x,\varepsilon)$ и $V_n(x,\varepsilon)$ следующие частичные суммы построенных рядов (4):

$$\begin{gathered}
U_n(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/2}\overline{u}_i(x) + \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{2(n-1)} \varepsilon^{i/4}\left(\Pi_i u(\xi) + \tilde{\Pi}_i u(\tilde{\xi})\right) + \\
+ \sum_{i=0}^{2n} \varepsilon^{i/4}\left(P_i u(\zeta) + \tilde{P}_i u(\tilde{\zeta})\right), \\
V_n(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/2}\overline{v}_i(x) + \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{2(n-1)} \varepsilon^{i/4}\left(\Pi_i v(\xi) + \tilde{\Pi}_i v(\tilde{\xi})\right) + \\
+ \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{2(n-1)} \varepsilon^{i/4}\left(P_i v(\zeta) + \tilde{P}_i v(\tilde{\zeta})\right)
\end{gathered} \tag{58}$$

(при $n = 0$ вторая сумма в первом равенстве, и также вторая и третья суммы во втором равенстве считаются равными нулю).

Основной результат работы, сформулированный ниже в виде теоремы, состоит в том, что для достаточно малых ε задача (1) – (8) имеет решение $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$, для которого частичные суммы (58) являются асимптотическим приближением на отрезке $0 \le x \le 1$ с точностью порядка $O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}\right)$. Чтобы доказать это утверждение, нам понадобятся еще два условия.

$\mathbf{A_6}$. Пусть $\overline{\varphi}_v(x) := \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\,(\overline{v}_0(x),x) > 0$, $x \in [0;1]$.

$\mathbf{A_7}$. Пусть

$$\overline{f}_u(x) := \frac{\partial f}{\partial u}\,(\overline{u}_0(x),\overline{v}_0(x),x,0) < 0, \quad x \in [0;1], \tag{59}$$

и

$$f_u(u,\overline{v}_0(0),0,0) < 0, \quad u \in \left[\overline{u}_0(0),u^0\right], \tag{60}$$

$$f_u(u,\overline{v}_0(1),1,0) < 0, \quad u \in \left[\overline{u}_0(1),u^1\right]. \tag{61}$$

Роль этих условий выяснится ниже.

Заметим, что если числа $P^0 := u^0 - \overline{u}_0(0)$ и $P^1 := u^1 - \overline{u}_0(1)$ (они положительны в силу условий A_4 и A_5) достаточно малы, то неравенства (60) и (61) следуют из (59).

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема. *Если выполнены условия $A_1 – A_7$, то для достаточно малых ε задача (1) – (8) имеет решение $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$ и для любого $n = 1,2,\ldots$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned} u(x,\varepsilon) &= U_n(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}\right), \\ v(x,\varepsilon) &= V_n(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}\right), \quad x \in [0;1], \end{aligned} \tag{62}$$

а при $n = 0$ — равенства

$$u(x,\varepsilon) = U_0(x,\varepsilon) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad v(x,\varepsilon) = \overline{v}_0(x) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad x \in [0;1]. \tag{63}$$

3.2. О методе дифференциальных неравенств. Для доказательства теоремы применим асимптотический метод дифференциальных неравенств, суть которого состоит в том, что нижнее и верхнее решения строятся с использованием построенной формальной асимптотики [4]. В связи с этим напомним понятия нижнего и верхнего решений применительно к задаче (1), (8).

Определение. *Две пары функций $\underline{U}(x,\varepsilon)$, $\underline{V}(x,\varepsilon)$ и $\overline{U}(x,\varepsilon)$, $\overline{V}(x,\varepsilon)$ называются упорядоченными нижним и верхним решениями задачи (1), (8), если они удовлетворяют следующим условиям:*

1^0) $\underline{U}(x,\varepsilon) \le \overline{U}(x,\varepsilon)$, $\underline{V}(x,\varepsilon) \le \overline{V}(x,\varepsilon)$, $x \in [0;1]$ *(условие упорядоченности);*

2^0) $L_\varepsilon(\underline{U},v) := \varepsilon^2\dfrac{d^2\underline{U}}{dx^2} - F(\underline{U},v,x,\varepsilon) \ge 0 \ge L_\varepsilon(\overline{U},v)$ *при* $\underline{V}(x,\varepsilon) \le v \le \overline{V}(x,\varepsilon)$, $0 < x < 1$;

$M_\varepsilon(\underline{V},u) := \varepsilon\dfrac{d^2\underline{V}}{dx^2} - f(u,\underline{V},x,\varepsilon) \ge 0 \ge M_\varepsilon(\overline{V},u)$ *при* $\underline{U}(x,\varepsilon) \le u \le \overline{U}(x,\varepsilon)$, $0 < x < 1$;

3^0)

$$\underline{U}(0,\varepsilon \le u^0 \le \overline{U}(0,\varepsilon), \quad \underline{U}(1,\varepsilon) \le u^1 \le \overline{U}(1,\varepsilon), \tag{64}$$

$$\frac{d\underline{V}}{dx}(0,\varepsilon) \ge q^0 \ge \frac{d\overline{V}}{dx}(0,\varepsilon), \quad \frac{d\underline{V}}{dx}(1,\varepsilon) \le q^1 \le \frac{d\overline{V}}{dx}(1,\varepsilon). \tag{65}$$

Известно (см., например, [5, с. 62]), что если существуют упорядоченные нижнее и верхнее решения задачи (1), (8), то существует решение $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$ этой задачи, удовлетворяющее неравенствам

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = u(x,\varepsilon) \le \overline{U}(x,\varepsilon), \quad \underline{V}(x,\varepsilon) \le v(x,\varepsilon) \le \overline{V}(x,\varepsilon), \quad x \in [0;1]. \tag{66}$$

Если функция $F(u,v,x,\varepsilon)$ является невозрастающей функцией аргумента v, а $f(u,v,x,\varepsilon)$ — невозрастающей функцией аргумента u в области

$$G = \Big\{(u,v,x,\varepsilon)\colon \underline{U}(x,\varepsilon) \le u \le \overline{U}(x,\varepsilon),$$
$$\underline{V}(x,\varepsilon) \le v \le \overline{V}(x,\varepsilon), 0 \le x \le 1, 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\Big\} \tag{67}$$

(в таком случае говорят, что функции F и f удовлетворяют условию квазимонотонности в области G), то для выполнения условия 2^0 достаточно, чтобы были выполнены неравенства

$$L_\varepsilon(\underline{U},\underline{V}) \ge 0 \ge L_\varepsilon(\overline{U},\overline{V}), \quad M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U}) \ge 0 \ge M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U}), \quad x \in (0;1). \tag{68}$$

Условия A_6 и A_7 обеспечат, как мы увидим ниже, квазимонотонность функций F и f.

3.3. Оценки производных функций $F(u,v,x,\varepsilon)$ и $f(u,v,x,\varepsilon)$. Введем обозначение

$$F_u(x,\varepsilon) := \frac{\partial F}{\partial u}(U_n(x,\varepsilon), V_n(x,\varepsilon), x, \varepsilon),$$

где $U_n(x,\varepsilon)$ и $V_n(x,\varepsilon)$ определены в (58), и аналогичный смысл придадим обозначениям $F_v(x,\varepsilon)$, $f_u(x,\varepsilon)$, $f_v(x,\varepsilon)$.

Используя вид (7) функции $F(u,v,x,\varepsilon)$, получаем

$$\begin{aligned} F_u(x,\varepsilon) &= 2h(x)\left[U_n(x,\varepsilon) - \varphi(V_n,x)\right] - \varepsilon F_{1u}(x,\varepsilon), \\ F_v(x,\varepsilon) &= -2h(x)\left[U_n(x,\varepsilon) - \varphi(V_n,x)\right]\varphi_v(V_n,x) - \varepsilon F_{1v}(x,\varepsilon), \end{aligned} \tag{69}$$

откуда следует равенство

$$F_v(x,\varepsilon) = -F_u(x,\varepsilon)\varphi_v(V_n,x) + O(\varepsilon), \quad x \in [0;1]. \tag{70}$$

Пусть $n \ge 1$. Тогда, используя выражения (58) для U_n и V_n, от (69) приходим к равенству

$$F_u(x,\varepsilon) = 2h(x)\Big[\sqrt{\varepsilon}a(x) + P_0u(\zeta) + \sqrt{\varepsilon}\left(P_2u(\zeta) - \overline{\varphi}_v(0)P_0v(\zeta)\right) +$$
$$+ \tilde{P}_0u(\tilde{\zeta}) + \sqrt{\varepsilon}\left(\tilde{P}_2u(\tilde{\zeta}) - \overline{\varphi}_v(1)\tilde{P}_0v(\tilde{\zeta})\right)\Big] + O\left(\varepsilon^{3/4}\right),$$

а так как $h(x) > 0$, $a(x) > 0$, $P_0u(\zeta) > 0$, $\tilde{P}_0u(\tilde{\zeta}) > 0$, то для $F_u(x,\varepsilon)$ получаем оценку

$$F_u(x,\varepsilon) \geq c_0\sqrt{\varepsilon}, \quad x \in [0;1]. \tag{71}$$

Учитывая эту оценку, а также равенство $\varphi_v(V_n,x) = \overline{\varphi}_v(x) + O(\sqrt{\varepsilon})$ и условие A_6, из (70) получаем

$$F_v(x,\varepsilon) = -F_u(x,\varepsilon)\left(\overline{\varphi}_v(x) + O(\sqrt{\varepsilon})\right) + O(\varepsilon) \leq -c_1\sqrt{\varepsilon}, \quad x \in [0;1]. \tag{72}$$

Здесь и далее через c_0, c_1, c_2, c обозначены подходящие положительные числа, не зависящие от ε.

Для производной $f_u(x,\varepsilon)$ имеем равенство

$$f_u(x,\varepsilon) := f_u(U_n,V_n,x,\varepsilon) = f_u(\overline{u}_0(x) + P_0u(\zeta) + \tilde{P}_0u(\tilde{\zeta}), \overline{v}_0(x), x, 0) + O(\sqrt{\varepsilon}).$$

На отрезке $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ функция $\tilde{P}_0u(\tilde{\zeta}) = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} f_u(x,\varepsilon) = {} & f_u(\overline{u}_0(x), \overline{v}_0(x), x, 0) + \\ & + \Big[f_u\left(\overline{u}_0(\varepsilon\zeta) + P_0u(\zeta), \overline{v}_0(\varepsilon\zeta), \varepsilon\zeta, 0\right) - f_u\left(\overline{u}_0(\varepsilon\zeta), \overline{v}_0(\varepsilon\zeta), \varepsilon\zeta, 0\right)\Big] + \\ & + O(\sqrt{\varepsilon}) = \overline{f}_u(x) + H_0(\zeta) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \end{aligned} \tag{73}$$

где

$$\begin{gathered} H_0(\zeta) = f_u\left(\overline{u}_0(0) + P_0u(\zeta), \overline{v}_0(0), 0, 0\right) - f_u\left(\overline{u}_0(0), \overline{v}_0(0), 0, 0\right), \\ |H_0(\zeta)| \leq cP_0u(\zeta), \quad \zeta \geq 0. \end{gathered} \tag{74}$$

На отрезке $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 1$ для $f_u(x,\varepsilon)$ имеем равенство, аналогичное (73):

$$f_u(x,\varepsilon) = \overline{f}_u(x) + H_1(\tilde{\zeta}) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \tag{75}$$

где

$$H_1(\tilde{\zeta}) = f_u(\overline{u}_0(1) + \tilde{P}_0u(\tilde{\zeta}), \overline{v}_0(1), 1, 0) - f_u(\overline{u}_0(1), \overline{v}_0(1), 1, 0),$$

$$\left|H_1(\tilde{\zeta})\right| \leq c\tilde{P}_0u(\tilde{\zeta}), \quad \tilde{\zeta} \geq 0.$$

Поскольку $H_0(\zeta) = 0$ на отрезке $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 1$, а $H_1(\tilde{\zeta}) = 0$ на отрезке $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$, то из (73) и (75) следует равенство

$$f_u(x,\varepsilon) = \overline{f}_u(x) + H_0(\zeta) + H_1(\tilde{\zeta}) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad x \in [0;1]. \tag{76}$$

Отсюда, используя условие A_7, получаем оценку

$$f_u(x,\varepsilon) \le -c_2 < 0, \quad x \in [0;1]. \tag{77}$$

Для $f_v(x,\varepsilon)$ справедливо равенство, аналогичное (76):

$$f_v(x,\varepsilon) = \overline{f}_v(x) + G_0(\zeta) + G_1(\tilde{\zeta}) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad x \in [0;1], \tag{78}$$

где

$$\begin{aligned} G_0(\zeta) &= f_v\left(\overline{u}_0(0) + P_0u(\zeta), \overline{v}_0(0), 0, 0\right) - f_v\left(\overline{u}_0(0), \overline{v}_0(0), 0, 0\right), \\ G_1(\tilde{\zeta}) &= f_v\left(\overline{u}_0(1) + \tilde{P}_0u(\tilde{\zeta}), \overline{v}_0(1), 1, 0\right) - f_v\left(\overline{u}_0(1), \overline{v}_0(1), 1, 0\right), \end{aligned} \tag{79}$$

$$|G_0(\zeta)| \le cP_0u(\zeta), \quad \zeta \ge 0; \quad |G_1(\tilde{\zeta})| \le c\tilde{P}_0u(\tilde{\zeta}), \quad \tilde{\zeta} \ge 0.$$

Отметим, что так как $\overline{g}_v(x) = \overline{f}_u(x)\overline{\varphi}_v(x) + \overline{f}_v(x) > 0$ (см. (10) и (11)) и $\overline{f}_u(x) < 0$, $\overline{\varphi}_v(x) > 0$, то

$$\overline{f}_v(x) > 0, \quad x \in [0;1].$$

3.4. Нижнее и верхнее решения задачи (1), (8). Определим функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ на отрезке [0; 1] как решение линейной системы уравнений

$$\alpha(x) - \overline{\varphi}_v(x)\beta(x) = A, \quad \overline{f}_u(x)\alpha(x) + \overline{f}_v(x)\beta(x) = A, \tag{80}$$

где A — положительное число, выбор которого уточним ниже. Из этой системы находим

$$\alpha(x) = \overline{g}_v^{-1}(x)\left[\overline{f}_v(x) + \overline{\varphi}_v(x)\right]A, \quad \beta(x) = \overline{g}_v^{-1}(x)\left[1 - \overline{f}_u(x)\right]A. \tag{81}$$

В силу неравенств $\overline{g}_v(x) > 0$, $\overline{f}_v(x) > 0$, $\overline{\varphi}_v(x) > 0$, $\overline{f}_u(x) < 0$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ положительны и могут быть сделаны сколь угодно большими за счет выбора числа A.

Нижнее и верхнее решения задачи (1), (8) построим в виде

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = U_{n+1}(x,\varepsilon) - \alpha(x)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}, \quad \underline{V}(x,\varepsilon) = V_{n+1}(x,\varepsilon) - \gamma(x,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}, \tag{82}$$

$$\overline{U}(x,\varepsilon) = U_{n+1}(x,\varepsilon) + \alpha(x)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}, \quad \overline{V}(x,\varepsilon) = V_{n+1}(x,\varepsilon) + \gamma(x,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}, \tag{83}$$

где $n \ge 1$,

$$\gamma(x,\varepsilon) = \beta(x) + \sqrt{\varepsilon}z(x,\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}(w_0(\zeta) + w_1(\tilde{\zeta})) > 0, \tag{84}$$

$\alpha(x)$, $\beta(x)$ — функции из (81),

$$z(x,\varepsilon) = \exp\left(-k\frac{x}{\varepsilon}\right) + \exp\left(k\frac{x-1}{\varepsilon}\right),$$

$k > 0$ — число, выбор которого уточним ниже, $w_0(\zeta)$ и $w_1(\tilde{\zeta})$ — функции, которые выберем ниже так, что они будут иметь оценки

$$0 < w_0(\zeta) \leq cAP_\kappa(\zeta), \quad 0 < w_1(\tilde{\zeta}) \leq cA\tilde{P}_\kappa(\tilde{\zeta}), \tag{85}$$

A — число из системы (80).

Покажем, что можно выбрать числа A, k и функции w_0, w_1 так, что $\underline{U}$, $\underline{V}$ и $\overline{U}$, $\overline{V}$, определенные формулами (82) и (83), будут удовлетворять для достаточно малых ε требованиям 1^0-3^0 из определения.

Условие 1^0 (т. е. условие упорядоченности), очевидно, выполнено.

Далее заметим, что в силу неравенств (72) и (77) функции $F(u,v,x,\varepsilon)$ и $f(u,v,x,\varepsilon)$ удовлетворяют условию квазимонотонности в области G, определенной в (67), поэтому условие 2^0 будет выполнено, если выполнены неравенства (68).

Рассмотрим выражение для $L_\varepsilon(\underline{U},\underline{V})$:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(\underline{U},\underline{V}) &= L_\varepsilon(U_{n+1},V_{n+1}) - \varepsilon^2\alpha''(x)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} + \\ &+ \left[F\left(U_{n+1},V_{n+1},x,\varepsilon\right) - F\left(U_{n+1}-\alpha(x)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}, V_{n+1}-\gamma(x,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}\right)\right], \quad x \in (0;1). \end{aligned} \tag{86}$$

Нетрудно видеть, что

$$L_\varepsilon(U_{n+1},V_{n+1}) = O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}}\right), \quad x \in (0;1), \tag{87}$$

а выражение в квадратных скобках, используя равенства (82), (72), (80), преобразуем так:

$$\begin{aligned} F(U_{n+1},V_{n+1},x,\varepsilon) &- F\left(U_{n+1}-\alpha\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}, V_{n+1}-\gamma(x,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}, x,\varepsilon\right) = \\ &= F_u(x,\varepsilon)\alpha\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} + F_v(x,\varepsilon)\gamma(x,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} + O(\alpha^2+\gamma^2)\varepsilon^{n+\frac{1}{2}} = \\ &= F_u(x,\varepsilon)\alpha\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} - \left[F_u(x,\varepsilon)(\overline{\varphi}_v(x)+O(\sqrt{\varepsilon}))+O(\varepsilon)\right]\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}(\beta+\sqrt{\varepsilon}z) - \\ &\quad - F_v(x,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}}(w_0+w_1) + O(\alpha^2+\gamma^2)\varepsilon^{n+\frac{1}{2}} = \\ &= F_u(x,\varepsilon)\left(\alpha-\overline{\varphi}_v(x)\beta+O(\sqrt{\varepsilon})\beta\right)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} + O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}}\right)z - \\ &\quad - F_v(x,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}}(w_0+w_1) + O(\alpha^2+\gamma^2)\varepsilon^{n+\frac{1}{2}} = \\ &= F_u(x,\varepsilon)\left(A+O(\sqrt{\varepsilon})A\right)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} - F_v(x,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}}(w_0+w_1) + \\ &\quad + O\left(A^2+w_0^2+w_1^2\right)\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{88}$$

Учитывая равенства (87), (88), а также равенство $\alpha''(x) = O(A)$ и неравенства (71), (72), (85), из (86) получаем

$$L_\varepsilon(\underline{U},\underline{V}) \geq O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}}\right) + \varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{9}{4}}O(A) + c_0(A+O(\sqrt{\varepsilon})A)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}} + O(A^2)\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}. \tag{89}$$

Поскольку первое слагаемое в правой части (89) не зависит от A и $n+\dfrac{1}{2} > \dfrac{n}{2}+\dfrac{3}{4}$ (так как $n \geq 1$), то при достаточно большом A и достаточно малых ε третье слагаемое в правой части (89) будет доминирующим и обеспечит выполнение неравенства

$$L_\varepsilon(\underline{U}, \underline{V}) > 0, \quad x \in (0;1).$$

Обратимся теперь к выражению для $M_\varepsilon(\underline{V}, \underline{U})$:

$$M(\underline{V}, \underline{U}) = M_\varepsilon(V_{n+1}, U_{n+1}) - \varepsilon\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}\beta'' - \varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}}k^2 z + \varepsilon^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}}(w_0''(\zeta) + w_1''(\tilde{\zeta}))+$$
$$+\left[f(U_{n+1}, V_{n+1}, x, \varepsilon) - f(U_{n+1} - \alpha(x)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}, V_{n+1} - \gamma(x,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}, x, \varepsilon)\right]. \quad (90)$$

Первое слагаемое в правой части (90) имеет оценку

$$M_\varepsilon(V_{n+1}, U_{n+1}) = O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}\right), \quad x \in (0;1),$$

а выражение в квадратных скобках, использовав равенства (76), (78), преобразуем так:

$$f(U_{n+1}, V_{n+1}, x, \varepsilon) - f\left(U_{n+1} - \alpha(x)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}, V_{n+1} - \gamma(x,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}, x, \varepsilon\right) =$$
$$= f_u(x,\varepsilon)\alpha(x)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} + f_v(x,\varepsilon)\gamma(x,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} + O(\alpha^2+\gamma^2)\varepsilon^{n+\frac{1}{2}} =$$
$$= \left[\overline{f}_u(x) + H_0(\zeta) + H_1(\tilde{\zeta}) + O(\sqrt{\varepsilon})\right]\alpha(x)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}+$$
$$+\left[\overline{f}_v(x) + G_0(\zeta) + G_1(\tilde{\zeta}) + O(\sqrt{\varepsilon})\right]\left(\beta(x) + \sqrt{\varepsilon}O(A)\right)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}+$$
$$+O\left(A^2\right)\varepsilon^{n+\frac{1}{2}} = \left[\overline{f}_u(x)\alpha(x) + \overline{f}_v(x)\beta(x)\right]\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}+$$
$$+\left[H_0(\zeta)\alpha(x) + G_0(\zeta)\beta(x)\right]\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} + \left[H_1(\tilde{\zeta})\alpha(x) + G_1(\tilde{\zeta})\beta(x)\right]\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}+$$
$$+O(A)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}} + O(A^2)\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}.$$

Определим теперь функцию $w_0(\zeta)$ как решение уравнения

$$w_0'' = \sqrt{\varepsilon}r_0(\zeta) := \sqrt{\varepsilon}\left[H_0(\zeta)\alpha(0) + G_0(\zeta)\beta(0) + MAP_0u(\zeta)\right], \quad \zeta > 0,$$

с условием на бесконечности $w_0(\infty) = 0$, причем число M возьмем столь большим, чтобы функция $r_0(\zeta)$ была положительной при $\zeta \geq 0$. Такой выбор M возможен в силу оценок (74) и (79) для $H_0(\zeta)$ и $G_0(\zeta)$. Тогда

$$w_0(\zeta) = \sqrt{\varepsilon}\int\limits_\infty^\zeta ds \int\limits_\infty^s r_0(t)dt > 0, \quad \zeta \geq 0,$$

и справедлива оценка

$$0 < w_0(\zeta) \le cAP_\kappa(\zeta), \quad \zeta \ge 0.$$

Аналогично определим функцию $w_1(\tilde{\zeta})$ как решение уравнения

$$w_1'' = \sqrt{\varepsilon} r_1(\tilde{\zeta}) := \sqrt{\varepsilon}\left[H_1(\tilde{\zeta})\alpha(1) + G_1(\tilde{\zeta})\beta(1) + MA\tilde{P}_0 u(\tilde{\zeta})\right], \quad \tilde{\zeta} > 0,$$

с условием $w_1(\infty) = 0$ и достаточно большим M. Тогда

$$0 < w_1(\tilde{\zeta}) \le cA\tilde{P}_\kappa(\tilde{\zeta}), \quad \tilde{\zeta} \ge 0.$$

При таком выборе функций $w_0(\zeta)$ и $w_1(\tilde{\zeta})$ равенство (90) принимает вид

$$M_\varepsilon(\underline{V}, \underline{U}) = O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}\right) + \varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{5}{4}} O(A) - \varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}} k^2 z + \varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} MAP_0 u(\zeta) +$$
$$+ \varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} MA\tilde{P}_0 u(\tilde{\zeta}) + \left[A\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}\right] + O(\varepsilon\zeta) AP_0 u(\zeta)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} +$$
$$+ O(\varepsilon\tilde{\zeta}) A\tilde{P}_0 u(\tilde{\zeta})\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} + O(A)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}} + O(A^2)\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}, \quad x \in (0;1), \tag{91}$$

где первое слагаемое в правой части не зависит от A.

Поскольку четвертое и пятое слагаемые в правой части (91) положительны, а седьмое и восьмое являются величинами порядка $O(A)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{5}{4}}$, то при достаточно большом A и достаточно малых ε за счет слагаемого, заключенного в квадратные скобки, будет выполнено неравенство

$$M_\varepsilon(\underline{V}, \underline{U}) > 0, \quad x \in (0;1).$$

Аналогично доказывается, что при достаточно большом A и достаточно малых ε выполняются неравенства

$$L_\varepsilon(\overline{U}, \overline{V}) < 0, \quad M_\varepsilon(\overline{V}, \overline{U}) < 0, \quad x \in (0;1).$$

Таким оброазом, условие 2^0 выполнено.

Остается проверить выполнение условия 3^0. Так как $U_{n+1}(0,\varepsilon) = u^0$ (см. (58), (38) и (39)), то

$$\underline{U}(0,\varepsilon) = U_{n+1}(0,\varepsilon) - \alpha(0)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} = u^0 - \alpha(0)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} < u^0,$$

т. е. выполнено первое неравенство из (64). Аналогично проверяется выполнение остальных неравенств в (64).

Для $\dfrac{d\underline{V}}{dx}(0,\varepsilon)$, учитывая равенства (40) и (41), получаем выражение

$$\frac{d\underline{V}}{dx}(0,\varepsilon) = q^0 + \overline{v}'_{n+1}(0)\varepsilon^{\frac{n+1}{2}} - \beta'(0)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} + k(1-\exp(-k/\sqrt{\varepsilon}))\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} + w_0'(0)\varepsilon^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}}. \tag{92}$$

Поскольку

$$w_0'(0) = \sqrt{\varepsilon}\int\limits_{\infty}^{0} r_0(t)dt = \sqrt{\varepsilon}A \cdot O(1),$$

то последнее слагаемое в правой части (92), как и $\beta'(0)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}$, является величиной порядка $O(A)\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}$, и, следовательно, при достаточно большом k и достаточно малых ε четвертое слагаемое в правой части (92) обеспечивает выполнение неравенства

$$\frac{d\underline{V}}{dx}(0,\varepsilon) > q^0,$$

т. е. выполнено первое неравенство в (65). Аналогично проверяется выполнение остальных неравенств в (65).

Итак, две пары функций $\underline{U}(x,\varepsilon)$, $\underline{V}(x,\varepsilon)$ и $\overline{U}(x,\varepsilon)$, $\overline{V}(x,\varepsilon)$, определенные неравенствами (82) – (84), для достаточно больших чисел A и k и достаточно малых ε являются упорядоченными нижним и верхним решениями задачи (1), (8).

3.5. Завершение доказательства теоремы. Построенные нижнее и верхнее решения обеспечивают существование решения $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$ задачи (1), (8), удовлетворяющего неравенствам (66).

Так как $U_{n+1}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}})$, $V_{n+1}(x,\varepsilon) = V_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}})$, то из (82) и (83) получаем равенства

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}), \quad \underline{V}(x,\varepsilon) = V_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}),$$

$$\overline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}), \quad \overline{V}(x,\varepsilon) = V_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}),$$

и, следовательно, в силу неравенств (66) имеем

$$u(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}), \quad v(x,\varepsilon) = V_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}), \quad x \in [0;1],$$

т. е. справедливы равенства (62). Мы доказали их при условии $n \geq 1$. Записывая эти равенства для $n = 1$ и учитывая, что $U_1(x,\varepsilon) = \overline{u}_0(x) + P_0u(\zeta) + \tilde{P}_0u(\tilde{\zeta}) + O(\sqrt{\varepsilon}) = U_0(x,\varepsilon) + O(\sqrt{\varepsilon})$, $V_1(x,\varepsilon) = \overline{v}_0(x) + O(\sqrt{\varepsilon})$, получаем равенства (63).

Теорема доказана.

4. Заключительные замечания. 1. Чтобы уменьшить громоздкость формул и выкладок, в работе рассмотрен случай, когда функция $h(x)$ в выражении (7) для $F(u,v,x,\varepsilon)$ зависит только от x. Если $h = h(u,v,x)$, то при определенных условиях для решения задачи (1), (8) можно построить и обосновать асимптотику вида (4), но построение и обоснование асимптотики станут более громоздкими.

2. Представляет интерес рассмотрение задачи (1), (8) в случае, когда первое уравнение в системе (2) имеет корень кратности 3. Некоторые сингулярно возмущенные задачи с трехкратным корнем вырожденного уравнения рассматривались в [6, 7]. В этом случае возникают свои качественные особенности в построении и обосновании асимптотики.

3. Весьма интересной представляется краевая задача для системы (1) с функцией $F(u,v,x,\varepsilon)$ вида (7) и граничными условиями Неймана для $u(x,\varepsilon)$ и Дирихле для $v(x,\varepsilon)$. Предварительный анализ этой задачи показывает, что погранслойные ряды будут рядами по целым степеням $\varepsilon^{1/12}$, а масштаб погранслойных переменных ζ и $\tilde{\zeta}$ будет иной, нежели в рассмотренной здесь задаче.

Литература

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высш. шк., 1990. — 208 с.

2. *Бутузов В. Ф.* Асимптотика решения системы сингулярно возмущенных уравнений в случае кратного корня вырожденного уравнения // Дифференц. уравнения. — 2015. — **50**, № 2. — С. 175 – 186.

3. *Бутузов В. Ф.* Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения // Мат. заметки. — 2013. — **94**, вып. 1. — С. 68 – 80.

4. *Нефедов Н. Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. уравнения. — 1995. — **31**, № 7. — С. 1132 – 1139.

5. *Рао С. V.* Nonlinear parabolic and elliptic equations. — New York; London: Plenum Press, 1992.

6. *Бутузов В. Ф., Бычков А. И.* Асимптотика решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения в случае трехкратного корня вырожденного уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2016. — **56**, № 4. — С. 605 – 624.

7. *Бутузов В. Ф.* Асимптотика и устойчивость решения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с трехкратным корнем вырожденного уравнения // Изв. РАН. Сер. мат. — 2017. — **81**, № 3. — С. 21 – 44.

Получено 01.11.17