УДК 517.929

РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ З АБСОЛЮТНО НЕСТІЙКИМИ НУЛЬОВИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
Україна, 33000, Рівне, вул. Соборна, 11
e-mail: V.Ye.Slyusarchuk@NUWM.rv.ua

We obtain conditions for absolute instability of trivial solutions of nonlinear difference equations.

Получены условия абсолютной неустойчивости нулевых решений нелинейных разностных уравнений.

1. Основні позначення й об'єкт досліджень. Нехай $\mathbb{R}_+$ — множина всіх дійсних невід'ємних чисел, $\mathbb{Z}_+$ — множина всіх цілих невід'ємних чисел, $\mathbb{N}$ — множина всіх натуральних чисел, $\mathbb{C}$ — множина всіх комплексних чисел, E — комплексний банаховий простір нескінченної розмірності з нормою $\|\cdot\|_E$ і $L(X_1, X_2)$ — банаховий простір усіх лінійних неперервних операторів $A : X_1 \to X_2$ з нормою $\|A\|_{L(X_1,X_2)} = \sup_{\|x\|_{X_1}=1} \|Ax\|_{X_2}$ (X_1 і X_2 — довільні банахові простори).

Позначимо через $\mathcal{K}$ алгебру цілком неперервних операторів $K \in L(E, E)$, а через $\mathfrak{G}$ множину всіх послідовностей (G_n) операторів $G_n : E \to E$, $n \in \mathbb{Z}_+$, для кожної з яких існують функція $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ і послідовність (K_n), членами якої є елементи алгебри $\mathcal{K}$, для яких

$$\lim_{t\to+0} \varphi(t) = \varphi(0) = 0 \tag{1}$$

і

$$\|G_n(x)\|_E \le \varphi(\|K_n x\|_E) \tag{2}$$

для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $x \in E$.

Функція φ та оператори $G_n : E \to E$, $n \in \mathbb{Z}_+$, неперервні в нулі, в інших точках вони можуть бути розривними. Вважатимемо, що для кожного числа $T > 0$ для функції φ виконується співвідношення

$$\sup_{t\in[0,T]} \varphi(y) < \infty.$$

Завдяки цьому співвідношенню та співвідношенню (2) оператори G_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, є обмеженими, тобто для кожного числа $r > 0$

$$\sup_{\|x\|_E \leqslant r} \|G_n(x)\|_E < \infty, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Очевидно, що на підставі (1) і (2)

$$G_n(0) \equiv 0$$

для всіх $(G_n) \in \mathfrak{G}$.

Розглянемо різницеве рівняння

$$x_{n+1} = Ax_n + G_n(x_n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3}$$

де $A \in L(E, E)$ і оператори $G_n : E \to E$, $n \in \mathbb{Z}_+$, є такими, що $(G_n) \in \mathfrak{G}$.

Завдяки вимогам до розглянутих вище операторів для кожного вектора $x_0 \in E$ рівняння (3) має єдиний залежний від x_0 розв'язок $x_n = x_n(x_0)$, що задовольняє початкову умову

$$x_0(x_0) = x_0.$$

Очевидно, що $x_n(0) \equiv 0$, тобто рівняння (3) має нульовий розв'язок.

Метою статті є встановлення умов нестійкості нульового розв'язку рівняння (3) одночасно для всіх послідовностей $(G_n) \in \mathfrak{G}$.

Нульовий розв'язок рівняння (3) будемо називати *абсолютно нестійким* по відношенню до послідовностей $(G_n) \in \mathfrak{G}$, якщо цей розв'язок нестійкий для кожної такої послідовності.

Нагадаємо, що нульовий розв'язок рівняння (3) називається *нестійким*, якщо існує таке число $a > 0$, що для кожного як завгодно малого числа $\delta > 0$ для деяких вектора $x_0 \in E$ і числа $n_0 > 0$ справджуються співвідношення

$$\|x_0\|_E < \delta$$

і

$$\|x_{n_0}(x_0)\|_E \geqslant a.$$

2. Формулювання основного результату. Позначимо через $\sigma_{ess.a}(A)$ істотно апроксимативний спектр оператора A (означення та деякі властивості цього спектра наведемо в наступному пункті). Множині $\sigma_{ess.a}(A)$ поставимо у відповідність число

$$r_{ess.a}(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{ess.a}(A)\},$$

яке називатимемо *істотно апроксимативним спектральним радіусом* оператора A.

Справджується така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $r_{ess.a}(A) > 1$.

Тоді нульовий розв'язок рівняння (3) абсолютно нестійкий по відношенню до послідовностей $(G_n) \in \mathfrak{G}$.

Доведення теореми наведемо після розгляду допоміжних результатів.

3. Істотно апроксимативний спектр оператора. Наведемо потрібні для подальшого дані про істотно апроксимативний спектр лінійного неперервного оператора.

Обмежену послідовність (y_n) векторів простору E будемо називати *істотно розбіжною*, якщо вона не містить збіжних підпослідовностей. Множина таких послідовностей не є порожньою завдяки нескінченній розмірності простору E (див., наприклад, доведення некомпактності одиничної кулі в E [1, с. 235, 236]).

Нехай Ω — довільна підмножина простору E і $\mathrm{diam}\ \Omega$ — її *діаметр*, визначений рівністю

$$\mathrm{diam}\ \Omega = \sup\ \{\|x-y\| : x, y \in \Omega\},$$

який для необмеженого Ω вважається рівним нескінченності, а для порожнього Ω — нулю.

Для обмеженої множини Ω *мірою некомпактності* (див. [2, с. 321]) називається число

$$\alpha(\Omega) = \inf \Bigg\{ d : \text{існує скінченне число підмножин } \Omega_1, \ldots, \Omega_n \text{ простору } E,$$

$$\text{для яких } \mathrm{diam}\ \Omega_1 \leqslant d, \ldots, \mathrm{diam}\ \Omega_n \leqslant d \text{ і } \Omega \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i \Bigg\}.$$

Істотно апроксимативним спектром оператора $A \in L(E, E)$ називається множина $\sigma_{ess.a}(A) \subset \sigma(A)$ ($\sigma(A)$ — спектр оператора A), для кожної точки λ якої існує така істотно розбіжна послідовність (x_n) елементів простору E, що

$$\lim_{n\to\infty} \|(A-\lambda I)x_n\|_E = 0.$$

Наведемо деякі властивості істотно апроксимативного спектра оператора за допомогою наступних теорем.

Теорема 2 [3, с. 241]. *Для кожного лінійного неперервного оператора A, що діє в нескінченновимірному банаховому просторі E, істотно апроксимативний спектр $\sigma_{ess.a}(A)$ є непорожньою компактною множиною.*

Теорема 3 [4]. *Наступні твердження є рівносильними:*
1) $\lambda \in \sigma_{ess.a}(A)$;
2) існує обмежена множина $B \subset E$, для якої $\alpha(B) > 0$ і $\alpha((A-\lambda I)B) = 0$;
3) $\dim\ker(A-\lambda I) = \infty$ або $\mathrm{Im}(A-\lambda I) \neq \overline{\mathrm{Im}(A-\lambda I)}$.

Теорема 4 [4]. *Кожна гранична не внутрішня точка спектра $\sigma(A)$ є точкою істотно апроксимативного спектра $\sigma_{ess.a}(A)$.*

Теорема 5 [4]. *Для довільних числа $\lambda \in \sigma_{ess.a}(A)$ і відносно компактної множини $\mathcal{B}$ цілком неперервних операторів $K \in L(E, E_1)$ (E_1 — банаховий простір) існує істотно розбіжна послідовність (x_n) векторів простору E, для якої*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|(A-\lambda I)x_n\|_E + \sup_{K\in\mathcal{B}} \|Kx_n\|_{E_1} \right) = 0.$$

Зауваження 1. У теоремі 5 вектори істотно розбіжної послідовності (x_n) можуть бути нормованими.

4. Доведення теореми 1. Зафіксуємо довільні послідовність $(G_n) \in \mathfrak{G}$ і число $\varepsilon \in (0,1)$. Нехай функція φ і послідовність $K_n \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, є такими, що виконуються співвідношення (1) і (2), а μ є такою точкою множини $\sigma_{ess.a}(A)$, що $|\mu| = r_{ess.a}(A)$. Оскільки

$r_{ess.a}(A) > 1$, то існує натуральне число $n_0(\varepsilon)$, для якого

$$\varepsilon|\mu|^{n_0(\varepsilon)} > 2. \tag{4}$$

За означенням істотно апроксимативного спектра оператора та теоремою 5 для деякої істотно розбіжної послідовності нормованих векторів $a_m \in E$, $m \geq 1$,

$$\lim_{m\to\infty} \|Aa_m - \mu a_m\|_E = 0 \tag{5}$$

і

$$\lim_{m\to\infty} \max_{n=\overline{0,n(\varepsilon)}} \|K_n a_m\|_E = 0. \tag{6}$$

Розглянемо розв'язок $x_n(\varepsilon a_m)$ різницевого рівняння (3), що задовольняє початкову умову

$$x_0(\varepsilon a_m) = \varepsilon a_m.$$

Покажемо, що для $n = \overline{1, n(\varepsilon)}$ і $m \in \mathbb{N}$ справджується співвідношення

$$x_n(\varepsilon a_m) = \varepsilon\mu^n a_m + \varphi_{n,m}, \tag{7}$$

де $\varphi_{n,m} \in E$ для всіх $n = \overline{1, n(\varepsilon)}$ та $m \in \mathbb{N}$ і

$$\lim_{m\to\infty} \|\varphi_{n,m}\|_E = 0 \tag{8}$$

для кожного $n = \overline{1, n(\varepsilon)}$.

Справді, завдяки (3) при $n = 0$

$$x_1(\varepsilon a_m) = A\varepsilon a_m + G_0(\varepsilon a_m), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Запишемо це співвідношення у вигляді

$$x_1(\varepsilon a_m) = \varepsilon\mu a_m + \varepsilon(Aa_m - \mu a_m) + G_0(\varepsilon a_m), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Завдяки (1), (2), (5) і (6)

$$\lim_{m\to\infty} (\varepsilon\|Aa_m - \mu a_m\|_E + \|G_0(\varepsilon a_m)\|_E) = 0.$$

Тому співвідношення (7) виконується при $n = 1$, і в цьому випадку величина

$$\varphi_{1,m} = \varepsilon(Aa_m - \mu a_m) + G_0(\varepsilon a_m)$$

задовольняє (8) (при $n = 1$).

Далі проведемо міркування з використанням методу математичної індукції. Припустимо, що співвідношення (7) виконується при $n = l$ ($l \in [0, n(\varepsilon))$), тобто

$$x_l(\varepsilon a_m) = \varepsilon \mu^l a_m + \varphi_{l,m}, \tag{9}$$

і для $\varphi_{l,m}$ виконується співвідношення

$$\lim_{m \to \infty} \|\varphi_{l,m}\|_E = 0. \tag{10}$$

Використаємо (3) при $n = l$:

$$x_{l+1}(\varepsilon a_m) = Ax_l(\varepsilon a_m) + G_l(x_l(\varepsilon a_m)), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Це співвідношення на підставі (9) можна записати у вигляді

$$x_{l+1}(\varepsilon a_m) = \varepsilon \mu^{l+1} + \varepsilon \mu^l \left(Aa_m - \mu a_m\right) + A\varphi_{l,m} + G_l(\varepsilon \mu^l a_m + \varphi_{l,m}), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Завдяки (5) і (10)

$$\lim_{m \to \infty} \left\| \varepsilon \mu^l \left(Aa_m - \mu a_m\right) + A\varphi_{l,m} \right\|_E = 0,$$

а завдяки (1), (6), (10) та нерівності

$$\|G_l(\varepsilon \mu^l a_m + \varphi_{l,m})\|_E \leq \varphi\left(\varepsilon \mu^l K_l a_m + K_l \varphi_{l,m}\right),$$

що випливає з (2), справджується співвідношення

$$\lim_{m \to \infty} \left\| G_l(\varepsilon \mu^l a_m + \varphi_{l,m}) \right\|_E = 0.$$

Тому виконуються співвідношення (7) та (8) і при $n = l + 1$.

Отже, співвідношення (7) та (8) справджуються для всіх $n = \overline{1, n(\varepsilon)}$ і $m \in \mathbb{N}$.

Звідси та з того, що $\|a_m\|_E = 1$, $m \geq 1$, на підставі (4) отримуємо, що для всіх досить великих m

$$\|x_{n(\varepsilon)}(\varepsilon a_m)\|_E > 2.$$

Це співвідношення та довільність вибору числа ε означають нестійкість нульового розв'язку різницевого рівняння (3).

Оскільки послідовність $(G_n) \in \mathfrak{G}$ є довільною, то нульовий розв'язок рівняння (3) абсолютно нестійкий.

Теорему 1 доведено.

5. Застосування теореми 1. Використаємо теорему 1 для отримання для різницевих рівнянь аналога теореми про нестійкість за першим наближенням та для дослідження нестійкості розв'язків нелінійних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу.

5.1. Аналог теореми про нестійкість за першим наближенням. Розглянемо різницеве рівняння (3) у випадку $\varphi(t) \equiv t$.

Позначимо через $r(A)$ спектральний радіус оператора $A \in L(E, E)$.

Справджується така теорема.

Теорема 6. *Нехай:*

1) $r(A) > 1$;

2) існує така обмежена послідовність (K_n) *елементів алгебри* $\mathcal{K}$ *цілком неперервних операторів* $K \in L(E, E)$, *що*

$$\|G_n(x)\|_E \leqslant \|K_n x\|_E$$

для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ *і* $x \in E$.

Тоді для достатньо малого числа

$$Q = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \|K_n\|_{L(E,E)}$$

нульовий розв'язок рівняння (3) є нестійким.

Зауваження 2. У сформульованій теоремі алгебру $\mathcal{K}$ цілком неперервних операторів $K \in L(E, E)$ не можна замінити алгеброю $L(E, E)$. Нульовий розв'язок рівняння (3) може стати експоненціально стійким [5].

Теорема 6 є наслідком теореми 1 та наступного твердження.

Теорема 7 [6, с. 22]. *Нехай:*

1) існує таке число $r \geq 1$, *що* $\sigma(A) \cap \{z : |z| = r\} = \varnothing$ *і* $\sigma(A) \cap \{z : |z| > r\} \neq \varnothing$;

2) існують такі числа $q > 0$ *і* $\rho > 0$, *що* $\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \|G_n(x)\|_E \leq q\|x\|_E$, $\|x\|_E \leq \rho$.

Тоді для достатньо малого числа q *нульовий розв'язок рівняння (3) є нестійким.*

Доведення теореми 6. Розглянемо число $\gamma = \max_{z \in \sigma(A)} |z| > 1$. Очевидно, що $\sigma(A) \cap \cap \{z : |z| = r\} = \varnothing$ для деякого $r \in [1, \gamma)$ або $\sigma(A) \cap \{z : |z| = r\} \neq \varnothing$ для всіх $r \in [1, \gamma)$. У першому випадку з теореми 7 випливає нестійкість нульового розв'язку рівняння (3) при достатньо малому Q. У другому випадку завдяки теоремі 4 $\sigma_{ess.a}(A) \cap \{z : |z| > 1\} \neq \varnothing$. Тому за теоремою 1 нульовий розв'язок рівняння (3) також нестійкий (у цьому випадку Q може бути довільним).

Теорему 6 доведено.

Зауваження 3. Оператори G_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, що задовольняють умову 2 теореми 6, можуть не бути цілком неперервними. Це підтверджується наступним прикладом.

Приклад. Розглянемо оператор $G : E \to E$, що визначається формулою

$$G(x) = \|Kx\|_E \operatorname{sgn} x, \ x \in E,$$

де K — ненульовий цілком неперервний елемент простору $L(E, E)$ і

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \|x\|_E^{-1} x, & \text{якщо } x \in E \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Цей оператор не є цілком неперервним. Справді, розглянемо довільний вектор $a \in E$ такий, що

$$\|a\|_E > 1 \tag{11}$$

і

$$Ka \neq 0, \tag{12}$$

та істотно розбіжну послідовність нормованих векторів x_n, $n \geq 1$, для якої

$$\lim_{n\to\infty} \|Kx_n\|_E = 0. \tag{13}$$

Для цієї послідовності

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{m>n\geqslant k} \|x_n - x_m\|_E > 0. \tag{14}$$

Далі розглянемо обмежену послідовність $(a + x_n)$. Покажемо, що послідовність

$$(\|K(a+x_n)\|_E \ \mathrm{sgn}(a+x_n))$$

не містить збіжних підпослідовностей.

Припустимо, що існує збіжна підпослідовність $\left(\|K(a+x_{n_k})\|_E \ \mathrm{sgn}\,(a+x_{n_k})\right)$ послідовності $(\|K(a+x_n)\|_E \ \mathrm{sgn}(a+x_n))$. Тоді

$$\lim_{k_1,k_2\to\infty} \left\| \left\|K\left(a+x_{n_{k_1}}\right)\right\|_E \ \mathrm{sgn}\left(a+x_{n_{k_1}}\right) - \left\|K(a+x_{n_{k_2}})\right\|_E \ \mathrm{sgn}\left(a+x_{n_{k_2}}\right)\right\|_E = 0.$$

Із цього співвідношення, (12) та (13) випливає, що

$$\lim_{k_1,k_2\to\infty} \left\|\mathrm{sgn}\left(a+x_{n_{k_1}}\right) - \mathrm{sgn}\left(a+x_{n_{k_2}}\right)\right\|_E = 0,$$

тобто

$$\lim_{k_1,k_2\to\infty} \left\| \left\|a+x_{n_{k_1}}\right\|_E^{-1} \left(a+x_{n_{k_1}}\right) - \left\|a+x_{n_{k_2}}\right\|_E^{-1} \left(a+x_{n_{k_2}}\right)\right\|_E = 0. \tag{15}$$

Оскільки послідовність $\left(\|a+x_{n_k}\|_E^{-1}\right)$ числова й обмежена, то існує збіжна підпослідовність цієї послідовності. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що сама послідовність $\left(\|a+x_{n_k}\|_E^{-1}\right)$ є збіжною. Завдяки (11) її границею є деяке додатне число. Звідси та (15) отримуємо

$$\lim_{k_1,k_2\to\infty} \|(a+x_{n_{k_1}}) - (a+x_{n_{k_2}})\|_E = 0.$$

Тому

$$\lim_{k_1,k_2\to\infty} \|x_{n_{k_1}} - x_{n_{k_2}}\|_E = 0,$$

що суперечить (14).

Таким чином, припущення про існування збіжної підпослідовності послідовності

$$(\|K(a+x_n)\|_E \ \mathrm{sgn}(a+x_n))$$

є хибним. Тому оператор G не є цілком неперервним.

Далі оператори G_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, визначимо формулою

$$G_n = G, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Ці оператори не є цілком неперервними.

5.2. Нелінійні диференціально-різницеві рівняння нейтрального типу. Нехай $C(S, \mathbb{C})$ — простір неперервних на множині S функцій $x = x(s)$ зі значеннями в $\mathbb{C}$, $\mathcal{F}$ — множина елементів $F = F(s)$ простору $C(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, для кожного з яких $F(0) = 0$, $C^1[0, 1)$ — банаховий простір функцій $z \in C([0, 1), \mathbb{C})$, похідна z' кожної з яких є елементом простору $C([0, 1), \mathbb{C})$, з нормою

$$\|z\|_{C^1} = \max\{\sup_{0 \leqslant s < 1} |z(s)|, \sup_{0 < s < 1} |z'(s)|, |z'(+0)|\}$$

і $\mathcal{D}$ — множина визначених на $[0, +\infty)$ функцій $z = z(s)$ зі значеннями в $\mathbb{C}$, звуження кожної з яких на $[1 + \infty)$ є елементом простору $C([1, +\infty), \mathbb{C})$, а звуження функції $z_n = z(n + s)$ на $[0, 1)$ — елементом простору $C^1[0, 1)$ для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$.

Розглянемо диференціально-різницеве рівняння

$$x'(t) + ax'(t-1) + bx(t) + cx(t-1) = F\left(\int\limits_{t-2}^{t-1} h(\tau)x(\tau)d\tau\right), \quad t \geq 2, \tag{16}$$

де $a, b, c \in \mathbb{C}$, $F \in \mathcal{F}$ і $h \in C([0, +\infty), \mathbb{C})$. Тут $x'(t)$ для $t \in \mathbb{N}$ є $x'(t + 0)$, тобто

$$\lim_{\delta \to +0} \delta^{-1}(x(t + \delta) - x(t)).$$

Розв'язком рівняння (16) називається довільна функція $z \in \mathcal{D}$, що перетворює це рівняння в тотожність, якщо $x(t)$ замінити на $z(t)$.

Припустимо, що в рівнянні (16) коефіцієнти a, b і c є такими, що характеристичне рівняння

$$p(1 + ae^{-p}) + b + ce^{-p} = 0 \tag{17}$$

відповідного лінійного диференціально-різницевого рівняння

$$y'(t) + ay'(t-1) + by(t) + cy(t-1) = 0$$

має нескінченне число розв'язків p_k, $k \in \mathbb{N}$, для яких

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Re} p_k > 0. \tag{18}$$

Тоді нульовий розв'язок рівняння (16) для $F = 0$ є нестійким, множина $\overline{\{p_k : k \in \mathbb{N}\}}$ не містить на $\mathbb{C}$ граничних точок [7, с. 198] та існує таке число $\gamma > 0$, що на множині $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p \geq \gamma\}$ рівняння (17) не має розв'язків (див. [8, с. 446 – 453]).

Зауважимо, що співвідношення (18) виконується, якщо, наприклад, $a = -e$ (див. [8, с. 454]). Тоді $p_k = 1 + i2k\pi + o(1)$.

Покажемо, що *не можна підібрати такі* $h \in C([0, +\infty), \mathbb{C})$ і $F \in \mathcal{F}$, щоб нульовий розв'язок рівняння (16) був стійким.

Для обґрунтування цього твердження кожному розв'язку $x = x(t)$ рівняння (16) поставимо у відповідність послідовність $(x_n(s))_{n \geq 0}$ елементів простору $C^1[0, 1)$, що визначаються рівностями

$$x_n(s) = x(n + s), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad s \in [0, 1). \tag{19}$$

Очевидно, що

$$x_n(0) = x_{n-1}(1 - 0), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \tag{20}$$

Тоді згідно з (16)

$$x'_n(s) + ax'_{n-1}(s) + bx_n(s) + cx_{n-1}(s) =$$
$$= F\left(\int_0^s h(n - 1 + \tau)x_{n-1}(\tau)d\tau + \int_s^1 h(n - 2 + \tau)x_{n-2}(\tau)d\tau\right)$$

для всіх $n \geq 2$ і $s \in [0, 1)$. Звідси на підставі (20) отримуємо

$$x_n(s) - x_{n-1}(1 - 0) + a(x_{n-1}(s) - x_{n-1}(0)) + b\int_0^s x_n(\tau)d\tau + c\int_0^s x_{n-1}(\tau)d\tau =$$
$$= \int_0^s F\left(\int_0^{s_1} h(n - 1 + \tau)x_{n-1}(\tau)d\tau + \int_{s_1}^1 h(n - 2 + \tau)x_{n-2}(\tau)d\tau\right) ds_1 \tag{21}$$

для всіх $n \geq 2$ і $s \in [0, 1)$.

Розглянемо оператори

$$(A_1x)(s) = x(1 - 0) - a(x(s) - x(0)) - c\int_0^s x(\tau)\, d\tau,$$

$$(B_1x)(s) = b\int_0^s x(\tau)d\tau,$$

де $x \in C^1[0, 1)$, що діють у просторі $C^1[0, 1)$, і оператори

$$(G_1(n, x, y))(s) = \int_0^s F\left(\int_0^{s_1} h(n - 1 + \tau)x(\tau)d\tau + \int_{s_1}^1 h(n - 2 + \tau)y(\tau)d\tau\right) ds_1, \;\; n \geq 2,$$

де $x, y \in C^1[0,1)$, що діють із простору $C^1[0,1) \times C^1[0,1)$ у простір $C^1[0,1)$. За допомогою цих операторів різницеве рівняння (21) запишемо у вигляді

$$(I + B_1)x_n = A_1 x_{n-1} + G_1(n, x_{n-1}, x_{n-2}), \quad n \geq 2, \tag{22}$$

де I — одиничний оператор. Оскільки, очевидно,

$$|(B_1^m x)(s)| \leq \frac{b^m s^m}{m!} \|x\|_{C^1}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad s \in [0,1),$$

і

$$\frac{d}{ds}\left((B_1^m x)(s)\right) = b(B_1^{m-1}x)(s), \quad m \geq 2,$$

то оператор B_1 є квазінільпотентним [9, с. 196]. Тому оператор $I + B_1$ має обернений неперервний оператор $(I + B_1)^{-1}$, а різницеве рівняння (22) можна записати так:

$$x_n = (I + B_1)^{-1} A_1 x_{n-1} + (I + B_1)^{-1} G_1(n, x_{n-1}, x_{n-2}), \quad n \geq 2. \tag{23}$$

Визначимо рівностями

$$A(x, y) = ((I + B_1)^{-1} A_1 x, x)$$

і

$$G_n(x, y) = ((I + B_1)^{-1} G_1(n, x, y), 0),$$

де $x, y \in C^1[0,1)$, оператори A і G_n, що діють у просторі $C^1[0,1) \times C^1[0,1)$. Згідно з (23)

$$(x_n, x_{n-1}) = A(x_{n-1}, x_{n-2}) + G_n(x_{n-1}, x_{n-2}), \quad n \geq 2. \tag{24}$$

Отже, якщо $x = x(t)$ — розв'язок диференціально-різницевого рівняння (16) і $x_n = x_n(s)$, $x_{n-1} = x_{n-1}(s)$ — визначені рівністю (19) елементи простору $C^1[0,1)$, то (x_n, x_{n-1}) є розв'язком рівняння (24). Навпаки, якщо (x_n, x_{n-1}) задовольняє рівняння (24), тобто x_n задовольняє рівняння (21), то визначена рівністю (19) для $n \geq 0$ і $s \in [0,1)$ функція $x = x(t)$ є розв'язком рівняння (16). Тому нульові розв'язки рівнянь (16) і (24) однаково поводять себе в сенсі стійкості.

До рівняння (24) можна застосувати теорему 1.

Справді, $r_{ess.a}(A) > 1$ на підставі (18), включення $\{p_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \{p : \operatorname{Re} p < \gamma\}$ та того, що для оператора A точки e^{p_k}, $k \in \mathbb{N}$, є власними значеннями, а з відповідної послідовності власних векторів $(e^{p_k s}, e^{p_k(s-1)})$, $k \in \mathbb{N}$, завдяки $\left|\overline{\lim}_{k\to\infty} \operatorname{Im} p_k\right| = +\infty$ можна виділити істотно розбіжну послідовність (тут можна було б використати і теорему 4).

Також виконується включення $(G_n) \in \mathfrak{G}$ у випадку $E = C^1[0,1) \times C^1[0,1)$, оскільки

$$\|G_n(x,y)\|_{C^1[0,1)\times C^1[0,1)} \leq \left\|(I + B_1)^{-1}\right\|_{L(C^1[0,1), C^1[0,1))} \varphi \times$$

$$\times \left(\max \left\{ \sup_{0 \leq s < 1} \left| \int_0^s h(n-1+\tau)x(\tau)d\tau \; + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \int_s^1 h(n-2+\tau)y(\tau)d\tau \right|, \sup_{0 \leq s < 1} |h(n-1+s)x(s) - h(n-2+s)y(s)| \right\} \right)$$

для всіх $x, y \in C^1[0,1)$, де $\varphi(t) = \max_{0 \le x \le t} |F(x)|$, і визначений рівністю

$$(K_n(x,y))(s) = \left(\int_0^s h(n-1+\tau)x(\tau)d\tau + \int_s^1 h(n-2+\tau)y(\tau)d\tau, 0 \right)$$

оператор $K_n : C^1[0,1) \times C^1[0,1) \to C^1[0,1) \times C^1[0,1)$ є цілком неперервним на підставі теореми Арцела [1, с. 106]. Тому на підставі теореми 1 нульовий розв'язок рівняння (24) є нестійким для довільних $F \in \mathcal{F}$ і $h \in C([0,+\infty), \mathbb{C})$.

Отже, не можна підібрати такі $F \in \mathcal{F}$ і $h \in C([0,+\infty), \mathbb{C})$, щоб нульовий розв'язок диференціально-різницевого рівняння (16) став стійким.

1. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1968. — 496 с.
2. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер В.* Однопараметрические полугруппы. — М.: Мир, 1992. — 352 с.
3. *Слюсарчук В. Ю.* Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією. — Рівне: Рівнен. держ. ун-т вод. госп-ва та природокористування, 2003. — 288 с.
4. *Слюсарчук В. Е.* Существенно неустойчивые решения разностных уравнений // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 12. — С. 1659 – 1672.
5. *Слюсарчук В. Е.* К вопросу о неустойчивости систем по первому приближению // Мат. заметки. — 1978. — **23**, № 5. — С. 721 – 723.
6. *Слюсарчук В. Е.* Устойчивость решений разностных уравнений в банаховом пространстве: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Черновцы, 1972. — 91 с.
7. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций. — М.: Наука, 1966. — 388 с.
8. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967. — 548 с.
9. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972. — 740 с.

Одержано 02.08.12