НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ т. 2 • № 3 • 1999

УДК 517 . 928

СИСТЕМИ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМИ

М. І. Шкіль, Г. В. Завізіон

Нац. пед. ун-т,
Україна, 252030, Київ, вул. Пирогова, 9

Asymptotic solutions of singular perturbed system of the differential equations with singularity in point matrix derivaty is constructed.

Будуються асимптотичні розв'язки сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з виродженою в точці матрицею при похідній.

В роботах [1 – 3] запропоновані методи асимптотичного інтегрування сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з неособливою або тотожно виродженою матрицею при похідній. В даній статті будуються асимптотичні розв'язки сингулярно збурених систем лінійних диференціальних рівнянь з виродженнями в одній точці.

1. Формальні розв'язки однорідної системи. Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^h B\,(t,\varepsilon)\,\frac{dx}{dt} = A\,(t,\varepsilon)\,x\;, \tag{1}$$

де ε, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, — малий параметр, $h \in N$, $t \in [0; L]$; $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ — $(n \times n)$-вимірні матриці, $x(t,\varepsilon)$ — n-вимірний вектор. Припускаємо виконання умов: 1) матриці $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ мають розвинення за степенями малого параметра

$$A(t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r A_r(t)\;, \qquad B(t,\varepsilon) = tB_0(t) + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r B_r(t)\;;$$

2) матриці $A_r(t)$, $B_r(t)$ нескінченно диференційовні на відрізку $[0; L]$; 3) алгебраїчне рівняння

$$\det \|\, A_0\,(t) - \omega\,(t)\,B_0\,(t)\,\| = 0 \tag{2}$$

має різні корені при $t \in [0; L]$; 4) корені рівняння

$$\det \|\, B_1\,(t) - \overline{\omega}\,(t)\,B_0\,(t)\,\| = 0 \tag{3}$$

прості або це рівняння має один кратний корінь з простими елементарними дільниками; 5) виконуються співвідношення

$$t+\varepsilon\overline{\omega}_j\,(t)\neq 0\;;$$
$$t\Big(\omega_i(t)-\omega_j(t)\Big)+\varepsilon\Big(\overline{\omega}_j(t)\,\omega_i(t)-\overline{\omega}_i(t)\,\omega_j(t)\Big)\neq 0$$
$$\forall\; t\in[0;L],\quad \varepsilon\in[0,\varepsilon_0],\quad i,j=\overline{1,n},\quad i\neq j\;,$$

де $\omega_j(t),\overline{\omega}_j(t)$ — корені рівнянь відповідно (2), (3).

Згідно з умовами 3, 4 і [1], існують неособливі нескінченно диференційовні матриці $S_1(t), S_2(t), T_1(t), T_2(t)$ такі, що

$$\begin{aligned} A_0(t)&=S_1^{-1}(t)\,W\,(t)\,T_1^{-1}(t)\;,\\ B_0(t)&=S_1^{-1}(t)\,T_1^{-1}(t)=S_2^{-1}(t)\,T_2^{-1}(t)\;,\\ B_1(t)&=S_2^{-1}(t)\overline{W}\,(t)\,T_2^{-1}(t)\;,\end{aligned}\tag{4}$$

де $W(t)=\operatorname{diag}\{\omega_1(t),\ldots,\omega_n(t)\},\quad \overline{W}\,(t)=\operatorname{diag}\{\overline{\omega}_1(t),\ldots,\overline{\omega}_n(t)\}.$

Тоді справедлива така теорема.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови 1 – 5 і умова: 6) матриця $S_2(t)S_1^{-1}(t)$ є комутативною з матрицею $W(t)$, то система диференціальних рівнянь (1) має n формальних розв'язків вигляду*

$$x\,(t,\varepsilon)=u\,(t,\varepsilon)\,\exp\left(\frac{1}{\varepsilon^h}\int\limits_0^t\lambda\,(t,\varepsilon)\,dt\right)\;,\tag{5}$$

де $u\,(t,\varepsilon)$ — n-вимірний вектор, $\lambda\,(t,\varepsilon)$ — скалярна функція, які мають розвинення

$$u\,(t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r u_r(t)\;,\qquad \lambda\,(t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\lambda_r(t)\;.\tag{6}$$

Доведення. Покажемо, що коефіцієнти розвинень (6) можна визначити так, щоб вектор (5) задовольняв систему (1) в розумінні рівності формальних рядів [3]. Для цього підставимо (5) в (1) і одержимо тотожність

$$\varepsilon^h B\,(t,\varepsilon)\,u'\,(t,\varepsilon)+B\,(t,\varepsilon)\,u\,(t,\varepsilon)\,\lambda\,(t,\varepsilon)=A\,(t,\varepsilon)\,u\,(t,\varepsilon)\tag{7}$$

(тут штрих означає похідну по t).

Коефіцієнти формальних рядів (6) визначатимемо із системи рівнянь [4]

$$\Big(A_0(t)-\Big(B_0(t)+\varepsilon B_1(t)\Big)\,\lambda_0(t,\varepsilon)\Big)\,u_0(t,\varepsilon)=0\;,\tag{8}$$

$$\begin{aligned}\Big(A_0(t)-\Big(B_0(t)+\varepsilon B_1(t)\Big)\,\lambda_\ell(t,\varepsilon)\Big)\,u_\ell(t,\varepsilon)&=\varphi_\ell(t,\varepsilon)+\\ &+\lambda_\ell(t,\varepsilon)\Big(B_0(t)+\varepsilon B_1(t)\Big)\,u_0(t,\varepsilon)\;,\end{aligned}\tag{9}$$

де

$$\varphi_\ell(t,\varepsilon)=-\sum_{i=1}^{\ell}A_i(t)\,u_{\ell-i}(t,\varepsilon)+\Big(B_0(t)+\varepsilon B_1(t)\Big)\sum_{i=1}^{\ell-1}u_i(t,\varepsilon)\,\lambda_{\ell-i}(t,\varepsilon)+$$
$$+\,\varepsilon\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_0(t,\varepsilon)B_{i+1}(t)\,u_{\ell-i}(t,\varepsilon)+\varepsilon\sum_{i=1}^{\ell-1}\sum_{j=1}^{\ell-i}\lambda_i(t,\varepsilon)\,B_{j+1}(t)\,u_{\ell-i-j}(t,\varepsilon)+$$
$$+\Big(B_0(t)+\varepsilon B_1(t)\Big)\,u'_{\ell-h}(t,\varepsilon)+\varepsilon\sum_{i=2}^{\ell-h-1}B_i(t)\,u'_{\ell-h-i+1}(t,\varepsilon)\,.$$

Покажемо, що система рівнянь (8), (9) має розв'язок. Підставивши (4) в (8), (9), помноживши зліва обидві частини рівнянь (8), (9) на матрицю $S_2(t)$ і скориставшись умовою 6, систему рівнянь (8), (9) перепишемо у вигляді

$$\Big(W(t)-\Big(tE+\varepsilon\overline{W}(t)\Big)\lambda_0(t,\varepsilon)\Big)\,q_0(t,\varepsilon)=0\,, \tag{10}$$

$$\Big(W(t)-\Big(tE+\varepsilon\overline{W}(t)\Big)\lambda_0(t,\varepsilon)\Big)\,q_\ell(t,\varepsilon)=\psi_\ell(t,\varepsilon)+\lambda_\ell(t,\varepsilon)\times$$
$$\times\Big(tE+\varepsilon\overline{W}(t)\Big)\,q_0(t,\varepsilon)\,, \tag{11}$$

де $q_\ell(t,\varepsilon)=T_2^{-1}(t)u_\ell(t,\varepsilon),\ \psi_\ell(t,\varepsilon)=S_2(t)\,\varphi_\ell(t,\varepsilon)$.

Покладемо в (10), (11) $\lambda_0(t,\varepsilon)=\dfrac{\omega_1(t)}{t+\varepsilon\overline{\omega}_1(t)}$. З умови 5 випливає, що функція $\lambda_0(t,\varepsilon)$ визначена на множині $K=\{(t,\varepsilon)\,|\,0\le t\le L,\ 0<\varepsilon\le\varepsilon_0\}$ і нескінченно диференційовна по t на множині K. Тоді компоненти вектора $q_0(t,\varepsilon)$ задовольняють рівняння

$$\Big\{q_0(t)\Big\}_1=0,\quad \Big(\omega_i(t)-\Big(t+\varepsilon\overline{\omega}_i(t)\Big)\lambda_0(t,\varepsilon)\Big)\Big\{q_0(t)\Big\}_i=0,\quad i=\overline{2,n}\,.$$

Використовуючи вигляд функції $\lambda_0(t,\varepsilon)$, останнє рівняння перепишемо у вигляді

$$\frac{t(\omega_i(t)-\omega_1(t))+\varepsilon(\overline{\omega}_1(t)\omega_i(t)-\overline{\omega}_i(t)\omega_1(t))}{t+\varepsilon\overline{\omega}_1(t)}\Big\{q_0(t)\Big\}_i=0\,.$$

Далі, згідно з умовою 5, при $j=1$ маємо $\{q_0(t)\}_i=0,\ i=\overline{2,n}$, а $\{q_0(t)\}_1$ — довільна функція, тому покладемо $\{q_0(t)\}_i=1$. З першого скалярного рівняння векторного рівняння (11) знайдемо функцію $\lambda_\ell(t,\varepsilon)$, яка має вигляд

$$\lambda_\ell(t,\varepsilon)=-\frac{\{\psi_\ell(t,\varepsilon)\}_1}{t+\varepsilon\overline{\omega}_1(t)}\,,\quad \ell=\overline{2,n}\,;$$

при цьому $\{q_\ell(t,\varepsilon)\}_1$ — довільна функція, тому покладемо $\{q_\ell(t,\varepsilon)\}_1=0$. Інші компоненти вектора $q_\ell(t,\varepsilon)$ знаходяться таким чином:

$$\{q_\ell(t,\varepsilon)\}_i=\frac{\{\psi_\ell(t,\varepsilon)\}_i(t+\varepsilon\overline{\omega}_1(t))}{t(\omega_i(t)-\omega_1(t))+\varepsilon(\overline{\omega}_1(t)\omega_i(t)-\overline{\omega}_i(t)\omega_1(t))}\,,\quad \ell=\overline{1,n}\,,\quad i=\overline{2,n}\,.$$

Поклавши

$$\lambda_0(t,\varepsilon)=\lambda_0^{(i)}(t,\varepsilon)=\frac{\omega_i(t)}{t+\varepsilon\overline{\omega}_i(t)}\,,\quad i=\overline{1,n}\,,$$

ми аналогічно знайдемо відповідні функції $\lambda_s^{(i)}(t,\varepsilon)$, $u_s^{(i)}(t,\varepsilon)$, причому $\lambda_s^{(i)}(t,\varepsilon)$, $u_s^{(i)}(t,\varepsilon)$ є визначеними і нескінченно диференційовними на множині K.

Теорему доведено.

Розглянемо спосіб побудови формального розв'язку системи (1) у випадку, коли матриця $S_2(t)S_1^{-1}(t)$ не комутативна з матрицею $W(t)$.

Для цього доведемо таку лему.

Лема 1. *Якщо виконуються умови 1 – 4, а також умови:*

5) виконуються співвідношення $t+\varepsilon\overline{\omega}_i(t)\neq 0$, $i=\overline{1,n}$, на множині K;

6) рівняння $\det\|S_{ij}(0)(\omega_j(0)\overline{\omega}_{i_1}(0)\ldots\overline{\omega}_{i_k}(0)\ldots\overline{\omega}_{i_{n-1}}(0)-\overline{\lambda})\|=0$, $i,j=\overline{1,n}$, має різні корені, де i_k, $k=\overline{1,n-1}$, набуває значень від 1 до n, причому $i_k\neq i$; $S_{ij}(t)$ — елементи матриці $S_2(t)S_1^{-1}(t)$,

то корені рівняння

$$\det\left\|A_0(t)-\Big(tB_0(t)+\varepsilon B_1(t)\Big)\lambda\left(t,\varepsilon\right)\right\|=0 \tag{12}$$

різні на множині K.

Доведення. Підставляючи (4) в (12), перетворимо його до вигляду

$$\det\left\|S_2(t)\,S_1^{-1}(t)\,W\left(t\right)-\Big(tE+\varepsilon\overline{W}\left(t\right)\Big)\,S_2(t)\,S_1^{-1}(t)\,\lambda\left(t,\varepsilon\right)\right\|=0\,.$$

Через елементи $S_{ij}(t)$, $i,j=\overline{1,n}$, матриці $S_2(t)\,S_1^{-1}(t)$ останнє рівняння перепишемо у вигляді

$$\det\left\|S_{ij}(t)\Big(\omega_j(t)-\Big(t+\varepsilon\overline{\omega}_i(t)\Big)\,\lambda\left(t,\varepsilon\right)\Big)\right\|=0\,,\quad i,j=\overline{1,n}\,. \tag{13}$$

Виконаємо в (13) заміну змінних за формулою

$$\lambda\left(t,\varepsilon\right)=\frac{\overline{\lambda}\left(t,\varepsilon\right)}{(t+\varepsilon\overline{\omega}_1(t))\ldots(t+\varepsilon\overline{\omega}_n(t))}\,. \tag{14}$$

Тоді рівняння (13) набере вигляду

$$C\left(t,\overline{\lambda}(t,\varepsilon),\varepsilon\right)=\det\Big\|\,S_{ij}(t)\Big(\omega_j(t)\Big(t+\varepsilon\overline{\omega}_1(t)\Big)\ldots\Big(t+\varepsilon\overline{\omega}_i(t)\Big)\ldots$$
$$\ldots\Big(t+\varepsilon\overline{\omega}_{i_{n-1}}(t)\Big)-\overline{\lambda}\left(t,\varepsilon\right)\Big)\,\Big\|=0\,, \tag{15}$$

де $i_k,\ k=\overline{1,n-1}$, набуває значень від 1 до n, причому $i_k\neq i,\ i,j=\overline{1,n}$.

Розв'язок (15) будемо шукати у вигляді

$$\overline{\lambda}\left(t,\varepsilon\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\lambda_r\left(t\right)\,. \tag{16'}$$

Підставляючи $(16')$ в (15) і розкладаючи визначник $C(t,\overline{\lambda}(t,\varepsilon),\varepsilon)$ за формулою

$$C\left(t,\overline{\lambda}\left(t,\varepsilon\right),\varepsilon\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\,\frac{\partial^r C(t,\overline{\lambda}\left(t,\varepsilon\right),\varepsilon)}{\partial\varepsilon^r}\Big|_{\varepsilon=0}\varepsilon^r\,,$$

переконуємось, що функція $\lambda_0(t)$ задовольняє рівняння

$$C\Big(t,\lambda_0(t),0\Big)=0 \quad \text{або} \quad \det\Big\|\,S_{ij}(t)\Big(\omega_j(t)\,t^{n-1}-\lambda_0(t)\Big)\Big\|=0\,, \quad i,j=\overline{1,n}\,. \tag{16}$$

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що n функцій $\lambda_{01}(t) = t^{n-1}\omega_1(t),\ldots$ $\ldots,\lambda_{0n}(t) = t^{n-1}\omega_n(t)$ задовольняють рівняння (16). Функцію $\lambda_1(t)$ знаходимо з рівняння

$$\frac{\partial C\,(t,\overline{\lambda}(t,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=0\,. \tag{17}$$

Підставляючи в (17) замість $\lambda_0(t)$ вираз $\lambda_{0i}(t)=t^{n-1}\omega_i(t)$, одержуємо функцію $\lambda_{1i}(t)$, $i = \overline{1,n}$:

$$\lambda_{1i}(t)=t^{n-2}\overline{\lambda}_{1i}(t)\,,$$

де

$$\overline{\lambda}_{1i}(t)=\frac{1}{\det\|s_{ij}\|}\sum_{j=1}^{n}s_{ji}(t)\,\omega_i(t)\Big(\overline{\omega}_{j_1}(t)+\cdots+\overline{\omega}_{j_k}(t)+\cdots+\overline{\omega}_{j_{n-1}}(t)\Big)\,A_{ji}\,,$$

$i_k,\ k=\overline{1,n-1}$, набуває значень від 1 до n, причому $i_k\neq i,\ A_{ji}$ — алгебраїчне доповнення до елемента s_{ji}, $i,j=\overline{1,n}$, матриці $S_2(t)\,S_1^{-1}(t)$. Методом математичної індукції доведено, що $\lambda_{si}(t) = t^{n-s-1}\overline{\lambda}_{si}(t)$, де $\overline{\lambda}_{si}(t)$ визначена і нескінченно диференційовна на відрізку $[0;L]$, $\overline{\lambda}_{si}(0)\neq 0$.

Таким чином, розклад $(16')$ справедливий при $t>0$. Позначимо через $\overline{\lambda}^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, всі корені рівняння (15). Тоді при $t>0$, згідно з розкладом $(16')$, різниця $\overline{\lambda}^{(i)}(t,\varepsilon)-\overline{\lambda}^{(j)}(t,\varepsilon)$, $i,j=\overline{1,n}$; $i\neq j$, має таке розвинення:

$$\overline{\lambda}^{(i)}(t,\varepsilon)-\overline{\lambda}^{(j)}(t,\varepsilon)=\Big(\lambda_{0i}(t)-\lambda_{0j}(t)\Big)+\sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon^r\Big(\lambda_{ri}(t)-\lambda_{rj}(t)\Big)\,. \tag{18}$$

Оскільки $\lambda_{0i}(t)\neq\lambda_{0j}(t)$ при $t>0$, внаслідок довільності ε із (18) випливає, що $\overline{\lambda}^{(i)}(t,\varepsilon)\neq$ $\neq\overline{\lambda}^{(j)}(t,\varepsilon)$, $i,j=\overline{1,n}$; $i\neq j$, а із співвідношення (14) — $\lambda^{(i)}(t,\varepsilon)\neq\overline{\lambda}^{(j)}(t,\varepsilon)$. Умова (6) забезпечує те, що корені рівняння (12) різні при $t=0$.

Лему доведено.

З використанням ідей [4, 5] доведено таку лему.

Лема 2. *Якщо виконується лема 1, то існують неособливі і нескінченно диференційовні по t на множині K матриці $P(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)$ такі, що справедливі рівності*

$$\begin{aligned}&S_2(t)\,S_1^{-1}(t)\,W(t)\Big(S_2(t)\,S_1^{-1}(t)\Big)^{-1}=P^{-1}(t,\varepsilon)\,\Lambda(t,\varepsilon)\,Q^{-1}(t,\varepsilon)\,,\\&tE+\varepsilon\overline{W}\,(t)=P^{-1}(t,\varepsilon)\,Q^{-1}(t,\varepsilon)\,,\end{aligned} \tag{19}$$

де $\Lambda(t,\varepsilon)=\operatorname{diag}\big\{\lambda^{(1)}(t,\varepsilon),\ldots,\lambda^{(n)}(t,\varepsilon)\big\}$, $\lambda^{(i)}(t,\varepsilon)$ — корені рівняння (12), причому функції $\lambda^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, є нескінченно диференційовними на множині K.

Справедлива така теорема.

Теорема 2. *Якщо виконується лема 1, то система диференціальних рівнянь (1) має n формальних розв'язків вигляду (5), де $u(t,\varepsilon)$ — n-вимірний вектор, а $\lambda(t,\varepsilon)$ — скалярна функція, які мають розвинення (6).*

Доведення. Функції $u_r(t)$, $\lambda_r(t)$, $r = 0, 1, \ldots$, задовольняють систему рівнянь (8), (9). Покажемо, що з цих систем рівнянь можна визначити довільні коефіцієнти розвинень (6). Позначивши $q_\ell(t,\varepsilon) = T_2^{-1}(t)\, u_\ell(t,\varepsilon)$, $\overline{\psi}_\ell(t,\varepsilon) = S_2(t)\, \varphi_\ell(t,\varepsilon)$, систему (10), (11) запишемо у вигляді

$$\left(S_2(t)S_1^{-1}(t)W(t)\Big(S_2(t)S_1^{-1}(t)\Big)^{-1} - \Big(tE + \varepsilon\overline{W}(t)\Big)\,\lambda_0(t,\varepsilon)\right) q_0(t,\varepsilon) = 0\,, \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\left(S_2(t)S_1^{-1}(t)W(t)\Big(S_2(t)S_1^{-1}(t)\Big)^{-1} - \Big(tE + \varepsilon\overline{W}(t)\Big)\,\lambda_0(t,\varepsilon)\right) q_\ell(t,\varepsilon) = \\ = \lambda_\ell(t,\varepsilon)\Big(tE + \varepsilon\overline{W}(t)\Big)\, q_\ell(t,\varepsilon) + \overline{\psi}_\ell(t,\varepsilon)\,, \quad \ell = 1, 2, \ldots\,.\end{aligned} \tag{21}$$

Згідно з лемою 2, виконуються рівності (19). Підставивши (19) в (20), (21) і помноживши зліва обидві частини рівнянь (20), (21) на матрицю $P(t,\varepsilon)$, системи (20), (21) записуємо у вигляді

$$\Big(\Lambda\,(t,\varepsilon) - \lambda_0(t,\varepsilon)\,E\Big)\, z_0(t,\varepsilon) = 0\,, \tag{22}$$

$$\Big(\Lambda\,(t,\varepsilon) - \lambda_0(t,\varepsilon)\,E\Big)\, z_\ell(t,\varepsilon) = \lambda_\ell(t,\varepsilon)\, z_0(t,\varepsilon) + \psi_\ell(t,\varepsilon)\,, \tag{23}$$

де $z_\ell(t,\varepsilon) = Q^{-1}(t,\varepsilon) q_\ell(t,\varepsilon)$, $\psi_\ell(t,\varepsilon) = P(t,\varepsilon)\psi_\ell(t,\varepsilon)$.

Покладемо в (22), (23) $\lambda_0(t,\varepsilon) = \lambda^{(1)}(t,\varepsilon)$. З (22) знаходимо, що перша компонента вектора $z_0(t,\varepsilon)$ довільна, а тому покладемо $\{z_0(t)\}_1 = 1$, а $\{z_0(t)\}_i = 1$, $i = \overline{2,n}$, тобто $z_0(t) = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{Vmatrix}$. З першого скалярного рівняння векторного рівняння (23) знайдемо функцію $\lambda_\ell(t,\varepsilon)$, яка має вигляд $\lambda_\ell(t,\varepsilon) = -\{\psi_\ell(t,\varepsilon)\}_1$; при цьому $\{z_\ell(t,\varepsilon)\}_1$ — довільна функція, а тому покладемо $\{z_\ell(t,\varepsilon)\}_1 = 0$.

Інші компоненти вектора $z_\ell(t,\varepsilon)$ знаходяться таким чином:

$$\Big\{z_\ell(t,\varepsilon)\Big\}_i = \frac{1}{\lambda^{(i)}(t,\varepsilon) - \lambda^{(1)}(t,\varepsilon)} \Big\{\psi_\ell(t,\varepsilon)\Big\}_i\,, \quad i = \overline{2,n}\,.$$

Знайдені функції $\lambda_\ell(t,\varepsilon)$, $u_\ell(t,\varepsilon) = T_2(t,\varepsilon)\, Q\,(t,\varepsilon)\, Z_\ell(t,\varepsilon)$ визначені і нескінченно диференційовні на множині K.

Теорему доведено.

2. Асимптотична властивість формальних розв'язків. Доведемо таку лему.

Лема 3. *Якщо виконуються умови теореми 1, то функції $\lambda_0(t,\varepsilon)$, $\lambda_\ell(t,\varepsilon)$, $\{q_\ell(t,\varepsilon)\}_i$, $\ell = 1, 2, \ldots$; $i = \overline{2,n}$, можна зобразити у вигляді*

$$\lambda_0(t,\varepsilon) = \frac{\lambda_{00}(t,\varepsilon)}{\varepsilon^\beta}\,, \quad \lambda_\ell(t,\varepsilon) = \frac{\lambda_{0\ell}(t,\varepsilon)}{\varepsilon^\beta}\,, \quad \Big\{q_\ell(t,\varepsilon)\Big\}_i = \Big\{q_{0\ell}(t,\varepsilon)\Big\}_i\,,$$

де $\lambda_{00}(t,\varepsilon)$, $\lambda_{0\ell}(t,\varepsilon)$, $\{q_{0\ell}(t,\varepsilon)\}_i$ *при всіх* $t \in [0;L]$ *мають порядок* $O(1)$ *при* $\varepsilon \to 0$. *При цьому* $\beta \in (0,1]$, *якщо* $t \in [0; C\varepsilon^{\alpha}]$ (α *— дійсне додатне число);* $\beta = 0$, *якщо* $t \in [t_0(\varepsilon), L]$, $t_0(\varepsilon) = O(1)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доведення. Запишемо деякі допоміжні співвідношення. Функції

$$\frac{1}{t+\varepsilon\overline{\omega}_1(t)}\,, \quad \frac{t+\varepsilon\overline{\omega}_1(t)}{t(\omega_i(t)-\omega_1(t))+\varepsilon(\overline{\omega}_1(t)\,\omega_i(t)-\overline{\omega}_i(t)\,\omega_1(t))}$$

подамо у вигляді

$$\frac{1}{t+\varepsilon\overline{\omega}_1(t)} = \frac{b(t,\varepsilon)}{\varepsilon^{\beta}}\,, \quad \frac{t+\varepsilon\overline{\omega}_1(t)}{t(\omega_i(t)-\omega_1(t))+\varepsilon(\overline{\omega}_1(t)\,\omega_i(t)-\overline{\omega}_i(t)\,\omega_1(t))} =$$
$$= \frac{\dfrac{t}{\varepsilon^{\beta}}+\varepsilon^{1-\beta}\overline{\omega}_1(t)}{\dfrac{t}{\varepsilon^{\beta}}(\omega_i(t)-\omega_1(t))+\varepsilon^{1-\beta}(\overline{\omega}_1(t)\,\omega_i(t)-\overline{\omega}_i(t)\,\omega_1(t))} = a\,(t,\varepsilon) = O(1)\,, \tag{24}$$

де

$$b(t,\varepsilon) = \frac{1}{\dfrac{t}{\varepsilon^{\beta}}+\varepsilon^{1-\beta}\overline{\omega}_1(t)} = O(1) \;\; \forall\, t \in [0;L].$$

Використовуючи послідовно формулу Лейбніца для похідної вищих порядків добутку функцій, одержуємо

$$\left(\frac{1}{t+\varepsilon g(t)}\right)^{(s)} = \frac{a_s(t,g(t),\varepsilon)}{\varepsilon^{\beta(s+1)}}\,, \tag{25}$$

де

$$a_s\Big(t,g(t),\varepsilon\Big) = \frac{1}{\left(\dfrac{t}{\varepsilon^{\beta}}+\varepsilon^{1-\beta}g(t)\right)^{s+1}}\Bigg(-\Big(t+\varepsilon g(t)\Big)^{s-1}\Big(1+\varepsilon g'(t)\Big)^{(s-1)}+$$
$$+2\Big(t+\varepsilon g(t)\Big)^{s-2}\Big(1+\varepsilon g'(t)\Big)\Big(1+\varepsilon g'(t)\Big)^{(s-2)}+\cdots$$
$$\cdots+(k-1)!(-1)^{k-1}\Big(t+\varepsilon g(t)\Big)^{s+1-k}\sum_{i=2}^{s-1}\sum_{i_1=2}^{i-1}\sum_{i_2=2}^{i_1-1}\cdots$$
$$\cdots\sum_{i_{k-3}=2}^{i_{k-4}-1}\Big(1+\varepsilon g'(t)\Big)^{(i_{k-3}-1)}\Big(1+\varepsilon g'(t)\Big)^{(i_{k-4}-1-i_{k-3})}\ldots$$
$$\ldots\Big(1+\varepsilon g'(t)\Big)^{(i_1-1-i_2)}\Big(1+\varepsilon g'(t)\Big)^{(i-1-i_1)}\Big(1+\varepsilon g'(t)\Big)^{(s-1-i)}+$$
$$+(-1)^k\,k!\Big(t+\varepsilon g(t)\Big)^{s-k}\sum_{i=2}^{s-1}\sum_{i_1=2}^{i-1}\sum_{i_2=2}^{i_1-1}\cdots\sum_{i_{k-3}=2}^{i_{k-4}-1}\Big(1+\varepsilon g'(t)\Big)\times$$
$$\times\Big(1+\varepsilon g'(t)\Big)^{(i_{k-3}-2)}\Big(1+\varepsilon g'(t)\Big)^{(i_{k-4}-1-i_{k-3})}\ldots$$

$$\ldots\Big(1+\varepsilon g'(t)\Big)^{(i_1-1-i_2)}\Big(1+\varepsilon g'(t)\Big)^{(i-1-i_1)}\times$$
$$\times\Big(1+\varepsilon g'(t)\Big)^{(s-1-i)}+(-1)^s s!\Big(1+\varepsilon g'(t)\Big)^{s}\Big); \tag{26}$$

$f^s(t)$ означає s-й степінь функції $f(t)$, а $f^{(s)}(t)$ — s-ту похідну функції $f(t)$.

З виразу (26) видно, що $a(t,g(t),\varepsilon)=O(1)\ \ \forall\, t\in[0;L]$ при $\varepsilon\to 0$. Поклавши в (25) $g(t)=\overline{\omega}_1(t)$, одержимо

$$\left(\frac{1}{t+\varepsilon\overline{\omega}_1(t)}\right)^{(s)}=\frac{b_s(t,\varepsilon)}{\varepsilon^{\beta(s+1)}}\ , \tag{27}$$

де $b_s(t,\varepsilon)=a(t,\overline{\omega}_1(t),\varepsilon)$.

Далі, покладаючи в (25)

$$g(t)=\frac{\overline{\omega}_1(t)\omega_i(t)-\overline{\omega}_i(t)\omega_1(t)}{\omega_i(t)-\omega_1(t)}$$

і використовуючи формулу Лейбніца для похідної вищих порядків добутку функцій, маємо

$$\left(\frac{t+\varepsilon\overline{\omega}_1(t)}{t(\omega_i(t)-\omega_1(t))+\varepsilon(\overline{\omega}_1(t)\omega_i(t)-\overline{\omega}_i(t)\omega_1(t))}\right)^{(s)}=\frac{a_s(t,\varepsilon)}{\varepsilon^{\beta s}}\ , \tag{28}$$

де

$$a_s(t,\varepsilon)=\left(\sum_{i=0}^{s}\varepsilon^{\beta i}C_s^i\left(\frac{t}{\varepsilon^{\beta}}+\varepsilon^{1-\beta}\overline{\omega}_1(t)\right)\left(\frac{1}{\omega_i(t)-\omega_1(t)}\right)^{(i)}+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{i}C_s^iC_i^j\Big(t+\varepsilon\overline{\omega}_1(t)\Big)^{(j)}\varepsilon^{\beta(i-1)}\left(\frac{1}{\omega_i(t)-\omega_1(t)}\right)^{(i-j)}\right)\times$$
$$\times a_{s-i}\left(t,\frac{\overline{\omega}_1(t)\omega_i(t)-\overline{\omega}_i(t)\omega_1(t)}{\omega_i(t)-\omega_1(t)},\varepsilon\right)\ ,$$

причому $a_s(t,\varepsilon)=O(1)\ \ \forall\, t\in[0;L]$ при $\varepsilon\to 0$; $s=1,2,\ldots$.

Функцію $\lambda_0(t,\varepsilon)$ запишемо у вигляді

$$\lambda_0\,(t,\varepsilon)=\frac{\lambda_{00}(t,\varepsilon)}{\varepsilon^{\beta}}\ , \tag{29}$$

де $\lambda_{00}(t,\varepsilon)$ має вигляд

$$\lambda_{00}(t,\varepsilon)=\frac{\omega_1(t)}{\dfrac{t}{\varepsilon^{\beta}}+\varepsilon^{1-\beta}\overline{\omega}_1(t)}=O(1)\quad\forall\, t\in[0;L]\ \text{ при }\ \varepsilon\to 0\,.$$

Використовуючи (27) та формулу Лейбніца, s-ту похідну від функції $\lambda_0(t,\varepsilon)$ зображаємо у вигляді

$$\lambda_0^{(s)}\,(t,\varepsilon)=\frac{\lambda_{s0}(t,\varepsilon)}{\varepsilon^{\beta(s+1)}}\ , \tag{30}$$

де

$$\lambda_{s0}(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{s}\varepsilon^{\beta(s-i)}b_i(t,\varepsilon)\,\omega_1^{(s-i)}(t)=O(1)$$
$$\forall\, t\in[0;L]\ \text{ при }\ \varepsilon\to 0;\quad s=1,2,\dots\ .$$

З явного вигляду функції $\{q_1(t,\varepsilon)\}_i,\ 2\le i\le n$, а також (30) випливає

$$\Big\{q_1(t,\varepsilon)\Big\}_i=\Big\{q_{01}(t,\varepsilon)\Big\}_i=O(1)\ \ \forall\, t\in[0;L]\ \text{ при }\ \varepsilon\to 0\ ,$$

де

$$\Big\{q_{01}(t,\varepsilon)\Big\}_i=a(t,\varepsilon)\Big\{-S_2(t)A_1(t)T_2(t)q_0(t)+\varepsilon^{1-\beta}S_2(t)B_2(t)T_2(t)q_0(t)\lambda_{00}(t,\varepsilon)+$$
$$+\delta_{h1}\Big(tE+\varepsilon\overline{W}(t)\Big)\,T_2^{-1}(t)T_2'(t)q_0(t)\Big\}_i\ ,$$

δ_{h1} — символ Кронекера.

Диференціюючи s разів функції $\{q_1(t,\varepsilon)\}_i$ і при цьому враховуючи (28) – (30), функції $\{q^{(s)}(t,\varepsilon)\}_i$ зобразимо таким чином:

$$\Big\{q_1^{(s)}(t,\varepsilon)\Big\}_i=\frac{\{q_{s1}(t,\varepsilon)\}_i}{\varepsilon^{\beta s}}\ ,$$

де

$$\Big\{q_{s1}(t,\varepsilon)\Big\}_i=\sum_{j=0}^{s}C_s^j\bigg\{-\varepsilon^{\beta j}\Big(S_2(t)A_1(t)T_2(t)q_0(t)\Big)^{(j)}+$$
$$+\varepsilon^{1-\beta}\sum_{j_1=0}^{j}C_j^{j_1}\lambda_{j_1;0}(t,\varepsilon)\varepsilon^{\beta(j-j_1)}\Big(S_2(t)B_2(t)T_2(t)q_0(t)\Big)^{(j-j_1)}+$$
$$+\varepsilon^{\beta j}\delta_{h1}\Big(\Big(tE+\varepsilon\overline{W}(t)\Big)T_2^{-1}(t)T_2'(t)q_0(t)\Big)^{(j)}\bigg\}_i a_{s-j}(t,\varepsilon)=O(1)$$
$$\forall\ t\in[0;L]\ \text{ при }\ \varepsilon\to 0\ .$$

З використанням явного вигляду функції $\lambda_1(t,\varepsilon)$, а також (28) – (30), аналогічним способом, як і для функції $\{q_1(t,\varepsilon)\}_i$, показуємо, що функцію $\lambda_1(t,\varepsilon)$ та її s-ту похідну $\lambda_1^{(s)}(t,\varepsilon)$ можна зобразити у вигляді

$$\lambda_1(t,\varepsilon)=\frac{\lambda_{01}(t,\varepsilon)}{\varepsilon^{\beta}}\ ,\quad \lambda_1^{(s)}(t,\varepsilon)=\frac{\lambda_{s1}(t,\varepsilon)}{\varepsilon^{\beta(s+1)}}\ ,$$

де $\lambda_{01}(t,\varepsilon),\lambda_{s1}(t,\varepsilon)$ однозначно визначені і $\lambda_{01}(t,\varepsilon)=O(1),\ \lambda_{s1}(t,\varepsilon)=O(1)\ \ \forall\, t\in[0;L]$ при $\varepsilon\to 0$.

Методом математичної індукції доведемо справедливість рівностей

$$\Big\{q_\ell(t,\varepsilon)\Big\}_i=\Big\{q_{0\ell}(t,\varepsilon)\Big\}_i\ ,\qquad \Big\{q_\ell^{(s)}(t,\varepsilon)\Big\}_i=\frac{\{q_{s\ell}(t,\varepsilon)\}_i}{\varepsilon^{\beta s}}\ , \tag{31}$$

$$\lambda_\ell(t,\varepsilon)=\frac{\lambda_{0\ell}(t,\varepsilon)}{\varepsilon^{\beta}}\ ,\qquad \lambda_\ell^{(s)}(t,\varepsilon)=\frac{\lambda_{s\ell}(t,\varepsilon)}{\varepsilon^{\beta(s+1)}} \tag{32}$$

при будь-якому натуральному ℓ, причому

$$\{q_{0\ell}(t,\varepsilon)\}_i = O(1), \quad \{q_{s\ell}(t,\varepsilon)\}_i = O(1),$$

$$\lambda_\ell(t,\varepsilon) = O(1), \qquad \lambda_{s\ell}(t,\varepsilon) = O(1)$$

$$\forall\, t \in [0; L] \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0.$$

Припустимо, що при $\ell < k$ виконуються співвідношення (31), (32). Тоді, виходячи з явного вигляду функції $\{q_k(t,\varepsilon)\}_i$, одержуємо

$$\Big\{q_k(t,\varepsilon)\Big\}_i = \Big\{q_{0k}(t,\varepsilon)\Big\}_i\,,$$

де

$$\Big\{q_{0k}(t,\varepsilon)\Big\}_i = a(t,\varepsilon)\Bigg\{ - \sum_{i=1}^{k} S_2(t)A_i(t)T_2(t)q_{0;k-i}(t,\varepsilon) +$$

$$+\left(\frac{t}{\varepsilon^\beta}\,E + \varepsilon^{1-\beta}\overline{W}(t)\right)\sum_{i=1}^{k} q_{0i}(t,\varepsilon)\,\lambda_{0;k-i}(t,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon^{1-\beta}\sum_{i=1}^{k}\lambda_{00}(t,\varepsilon)S_2(t)B_{i+1}(t)T_2(t)q_{0;k-i}(t,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon^{1-\beta}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k-i}\lambda_{0i}(t,\varepsilon)S_2(t)B_{j+1}(t)T_2(t)q_{0;k-i-j}(t,\varepsilon)+$$

$$+\Big(tE + \varepsilon\overline{W}(t)\Big)\,T_2^{-1}(t)T_2'(t)q_{0;k-h}(t,\varepsilon)+$$

$$+\left(\frac{t}{\varepsilon^\beta}\,E + \varepsilon^{1-\beta}\overline{W}(t)\right)q_{1;k-h}(t,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\sum_{i=2}^{k-h-1} S_2(t)B_i(t)Q'(t)q_{0;k-i-h+1}(t,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon^{1-\beta}\sum_{i=2}^{k-h-1} S_2(t)B_i(t)T_2(t)q_{1;k-i-h+1}(t,\varepsilon)\Bigg\}_i = O(1)$$

$$\forall\, t \in [0; L] \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0\,.$$

Застосовуючи послідовно до явного вигляду функції $\{q_k(t,\varepsilon)\}_i$ формулу Лейбніца для похідної s-го порядку, використовуючи (28) і припущення про справедливість (31) при $\ell < k$, доводимо, що k-ту похідну функції $\{q_k(t,\varepsilon)\}_i$ можна зобразити у вигляді

$$\Big\{q_k^{(s)}(t,\varepsilon)\Big\}_i = \frac{\{q_{sk}(t,\varepsilon)\}_i}{\varepsilon^{\beta s}}\,, \quad i = \overline{2,n}\,,$$

де

$$\Big\{q_{sk}(t,\varepsilon)\Big\}_i = \sum_{j=0}^{s} C_s^j \Bigg\{ \sum_{i_1=1}^{k}\sum_{j_1=1}^{j} \varepsilon^{j_1}\Big(S_2(t)A_{i_1}(t)T_2(t)\Big)^{(j_1)} q_{j-j_1;k-i_1}(t,\varepsilon)+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{k}\left(\frac{t}{\varepsilon^\beta}E+\varepsilon^{1-\beta}\overline{W}(t)\right) q_{j_1;i_1}(t,\varepsilon)\,\lambda_{j;k-i_1}(t,\varepsilon)+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{k-1}\sum_{j_1=1}^{j}\sum_{j_2=1}^{j_1}\varepsilon^{\beta(j_2-1)}C_j^{j_1}C_{j_1}^{j_2}\Big(tE+\varepsilon\overline{W}(t)\Big)^{(j_2)} q_{j_1-j_2;i_1}(t,\varepsilon)\lambda_{j-j_1;k-i_1}(t,\varepsilon)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j_1=0}^{j}\sum_{j_2=0}^{j_1}C_j^{j_1}C_{j_1}^{j_2}\varepsilon^{\beta j_2}\Big(S_2(t)B_{i_1+1}(t)T_2(t)\Big)^{(j_2)} q_{j_1-j_2;i_1}(t,\varepsilon)\lambda_{j-j_1;0}(t,\varepsilon)+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{k}\sum_{i_2=1}^{k-i_1}\sum_{j_1=0}^{j}\sum_{j_2=0}^{j_1}C_j^{j_1}C_{j_1}^{j_2}\Big(S_2(t)B_{i_2+1}(t)T_2(t)\Big)^{(j_2)}\times$$

$$\times q_{j_1-j_2;k-i_1-i_2}(t,\varepsilon)\lambda_{j-j_1;i_1}(t,\varepsilon)\varepsilon^{\beta j_2}+$$

$$+\sum_{j_1=0}^{j}\sum_{j_2=0}^{j_1}C_j^{j_1}C_{j_1}^{j_2}\varepsilon^{\beta j_2}\Big(tE+\varepsilon\overline{W}(t)\Big)^{(j_2)}\Big(T_2^{-1}(t)T_2'(t)\Big)^{(j_1-j_2)} q_{j-j_1;k-h}(t,\varepsilon)+$$

$$+\left(\frac{t}{\varepsilon^\beta}E+\varepsilon^{1-\beta}\,\overline{W}\,(t)\right) q_{j+1;k-h}(t,\varepsilon)+$$

$$+\sum_{j_1=1}^{j}C_j^{j_1}\Big(tE+\varepsilon\overline{W}(t)\Big)^{(j_2)}\varepsilon^{\beta(j_1-1)} q_{j-j_1+1;k-h}(t,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\sum_{i_1=2}^{k-h-1}\sum_{j_1=0}^{j}C_j^{j_1}\Big(S_2(t)B_{i_1}(t)T_2(t)\Big)^{(j_1)}\varepsilon^{\beta j_1} q_{j-j_1;k-i_1-h+1}(t,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\sum_{i_1=2}^{k-h-1}\sum_{j_1=0}^{j}C_j^{j_1}\Big(S_2(t)B_{i_1}(t)T_2(t)\Big)^{(j_1)} q_{j-j_1;k-i_1-h+1}(t,\varepsilon)\varepsilon^{\beta j_1}\Bigg\}_i\times$$

$$\times a_{s-j}(t,\varepsilon)=O(1)\quad \forall\, t\in[0;L]\ \text{ при }\ \varepsilon\to 0\,.$$

Таким чином, доведено (31) при $\ell = k$. Аналогічно доводиться (32) для $\ell = k$.

Лему доведено.

Дослідження розв'язків функцій $\lambda_\ell(t,\varepsilon)$, $u_\ell(t,\varepsilon)$, $\ell = 1,2,\ldots$, $\forall\, t \in [0;L]$ при $\varepsilon \to 0$, які визначені в теоремі 2, проводиться з допомогою леми 3.

Поведінка функцій $\lambda_\ell(t,\varepsilon)$, $u_\ell(t,\varepsilon)$, $\ell = 1,2,\ldots$, на відрізку $[0;L]$ при $\varepsilon\to 0$, які знаходяться за допомогою теорем 1 і 2, дала змогу довести теорему про асимптотичний характер формальних розв'язків (5).

Теорема 3. *Якщо виконуються умови теорем 1 і 2, а також справедливі нерівності* $\mathrm{Re}\sum\limits_{r=0}^{h}\varepsilon^r\lambda_r(t,\varepsilon)\le 0$ *на множині K, то для кожного формального розв'язку $x(t,\varepsilon)$ має місце оцінка $\|x_m(t,\varepsilon)-\overline{x}(t,\varepsilon)\|\le C\varepsilon^{m-h}$, де $x_m(t,\varepsilon)$, $\overline{x}(t,\varepsilon)$ — відповідно m-те наближення і точний розв'язок системи (1).*

1. *Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Выща шк., 1989. — 287 с.
2. *Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. — Киев: Выща шк., 1991. — 207 с.
3. *Шкиль Н.И.* Об асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений и их применении. — Киев, 1996. — 207 с.
4. *Шкиль Н.И.* О периодических решениях систем дифференциальных уравнений второго порядка // Arch. mat. — 1987. — **23**, № 1. — С. 53 – 62.
5. *Завизион Г.В.* Асимптотическое представление решений систем линейных дифференциальных уравнений при наличии точек поворота: Автореф. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1990. — 14 с.

Одержано 01.12.98