УДК 517.9+517.95

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ АВТОНОМНИХ КВАЗІЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ

Я. М. Дрінь, Р. І. Петришин

Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича
Україна, 58012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2
e-mail: drin_jaroslav@i.ua

We use a step-by-step method to prove solvability of a nonlocal problem for an autonomous quasilinear parabolic pseudodifferential equation with nonsmooth symbols and deviation in the argument.

Для автономных квазилинейных параболических псевдодифференциальных уравнений с негладкими символами и с отклонением аргумента методом шагов доказывается разрешимость нелокальной задачи.

Вступ. При вивченні моделей та описів різних проблем теорії автоматичного керування, автоматики і телемеханіки, радіолокації, радіонавігації, електрозв'язку, теоретичної кібернетики, ракетної техніки, термоядерного синтезу, біології, економіки і медицини зустрічаються диференціальні рівняння, в які невідома функція та її похідні входять, взагалі кажучи, при різних значеннях аргументу і які називаються диференціальними рівняннями з аргументом, що відхиляється (ДРВА). Окремі рівняння із звичайними похідними з'явилися у працях Кондорсе (1771 р.), а систематичне вивчення таких рівнянь розпочалося у працях А. Д. Мишкіса, Е. М. Райта, Р. Беллмана у зв'язку із потребами прикладних наук (див. [1] і наведену там бібліографію). У статті [2] наведено короткий огляд методів дослідження просторових нелокальних ефектів, що виникають за рахунок запізнення в дифузійних моделях деякої популяції, поміщеної в обмежену або необмежену область. Широке їх застосування сприяло збільшенню інтересу до теорії цих рівнянь, що виявилося у великій кількості опублікованих робіт, присвячених ДРВА. Класичними в області ДРВА стали праці численної школи українських математиків Ю. О. Митропольського, А. М. Самойленка, М. О. Перестюка.

Задачу Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь (ППДР), визначених С. Д. Ейдельманом і Я. М. Дрінем в [3 – 5], що містить відхилення аргументу, вперше розглянуто у статті [6]. При цьому розглядалися автономні квазілінійні ППДР і методом кроків доводилася розв'язність задачі Коші. Нелокальні задачі для ППДР в різних аспектах вивчалися у працях В. В. Городецького і Я. М. Дріня [7 – 14], а для автономних квазілінійних ППДР з відхиленням аргументу нелокальна задача анонсована в [15] і детально розглядається вперше.

1. Постановка задачі. Знайти розв'язок квазілінійної нелокальної задачі

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + (Au)(x,t) = f(x,t,\mu u(x,t-h) - \nu u(x,T+t-h)), \tag{1}$$

$x \in \mathbb{R}^n, t > h > 0, T >> h,$

$$\mu u(x,t) = \nu u(x, T+t) + u_0(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \le t \le h, \tag{2}$$

де u — шукана, а f, u_0 — відомі неперервні і обмежені функції, $\mu > \nu > 0$, h, T — фіксовані параметри, A — псевдодиференціальна операція (ПДО) з символом $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, однорідним порядку $\gamma > 0$ і нескінченно диференційовним по σ при $\sigma \ne 0$ (точка $\sigma = 0$ є точкою негладкості символу $a(\sigma)$).

Припустимо, що символ $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ задовольняє умову негладкості в нулі, однорідності $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $a(\lambda\sigma) = \lambda^\gamma a(\sigma)$, $\lambda > 0, \gamma > 0$, еліптичності

$$\operatorname{Re} a(\sigma) \ge a_0 > 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad |\sigma| = 1, \tag{3}$$

$$|D_\sigma^\chi a(\sigma)| \le C|\sigma|^{\gamma - |\chi|}, \quad \sigma \ne 0, \quad \gamma > 0. \tag{4}$$

При цьому ПДО A трактується як гіперсингулярний інтеграл (ГСІ) [16] — інтеграл з особливістю, порядок якої вищий за розмірність простору і регуляризований за допомогою скінченних різниць. Припустимо також, що для будь яких $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ існують $C > 0$ і β, $0 < \beta \le \gamma - \varepsilon$, такі, що

$$|u_0(x,t)| \le C(1 + |x|)^\beta.$$

Якщо $\Pi \equiv \{(x,t,u) | x \in \mathbb{R}^n, t > 0, u \in C_{x,t}^{[\gamma]+1,1}\}$, $[\gamma]$ — ціла частина $\gamma > 0$, то для будь-яких $\varepsilon > 0$, $(x,t,u) \in \Pi$ існують $C > 0$, $\beta \le \gamma - \varepsilon$, $f : \Pi \to \mathbb{R}$, $f \in C(\Pi)$ такі, що

$$|f(x,t,u)| \le C(1+|x|)^\beta, \quad |f(x,t,u) - f(y,t,u)| \le C|x-y|^\lambda, \quad 0 < \lambda < 1.$$

На шукану функцію u накладаються умови по аргументах $x \in \mathbb{R}^n$ та $t > 0$, а залежність її від T означає, що мова йде про нелокальну задачу, пов'язану із заданням вихідної множини для цієї нелокальної задачі (1), (2). Якщо функція $u \in S(\mathbb{R}^n) \times C_t^1$, а $F_{x\to\sigma}[u(x,t)](\sigma,t) \equiv v(\sigma,t)$, $F^{-1}_{\sigma\to x}[v(\sigma,t)](x,t) \equiv u(x,t)$ — відповідно пряме і обернене перетворення Фур'є функції u, то

$$Au(x,t) \equiv F^{-1}_{\sigma\to x}[a(\sigma)F_{x\to\sigma}[u(x,t)]], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

— псевдодиференціальна операція з символом $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Якщо функція u належить $C_{x,t}^{[\gamma]+1,1}$, $\gamma \ge 1$, то ПДО A визначена в [16] і трактується як гіперсингулярна операція.

2. Метод кроків. Методом кроків зводимо нелокальну задачу для псевдодиференціального рівняння з аргументом, що відхиляється, до нелокальної задачі для рівняння без відхилення аргументу. Нехай $mh \le t \le (m+1)h$, $x \in \mathbb{R}^n$. Тоді задача (1), (2) набирає вигляду

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + (Au)(x,t) = f(x,t,u_0(x,t-mh)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad mh \le t \le (m+1)h, \tag{5}$$

$$\mu u(x,mh) = \nu u(x, T+mh) + u_0(x,mh), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Позначимо $f(x,t,u_0(x,t-mh)) \equiv f_0(x,t,t-mh)$.

Розв'язок задачі (5), (6) формально шукаємо за допомогою перетворення Фур'є по просторових змінних і отримуємо таку задачу:

$$\frac{dv(\sigma,t)}{dt} + A(\sigma)v(\sigma,t) = \tilde{f}_0(\sigma,t,t-mh), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad mh \le t \le (m+1)h, \tag{7}$$

$$\mu v(\sigma,mh) = \nu v(\sigma,T+mh) + \tilde{u}_0(\sigma,mh), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Загальний розв'язок рівняння (7) набирає вигляду

$$v(\sigma,t) = Ce^{-a(\sigma)t} + \int\limits_{mh}^{t} e^{-a(\sigma)(t-\tau)}\tilde{f}_0(\sigma,\tau,\tau-mh)d\tau, \tag{9}$$

$$\sigma \in \mathbb{R}^n, \quad mh \le t \le (m+1)h.$$

Підставивши (9) у (8), отримаємо вираз для C:

$$C = \frac{\nu}{\mu-\nu e^{-a(\sigma)T}} \int\limits_{mh}^{T+mh} e^{-a(\sigma)(T-\tau)}\tilde{f}_0(\sigma,\tau,\tau-mh)d\tau + \frac{e^{a(\sigma)mh}}{\mu-\nu e^{-a(\sigma)T}}\,\tilde{u}_0(\sigma,mh).$$

Тоді розв'язок задачі (7), (8) набирає вигляду

$$v(\sigma,t) = \frac{\nu}{\mu-\nu e^{-a(\sigma)T}} \int\limits_{mh}^{T+mh} e^{-a(\sigma)(T+t-\tau)}\tilde{f}_0(\sigma,\tau,\tau-mh)\,d\tau + \frac{e^{-a(\sigma)(t-mh)}}{\mu-\nu e^{-a(\sigma)T}}\,\tilde{u}_0(\sigma,mh) +$$

$$+ \int\limits_{mh}^{t} e^{-a(\sigma)(t-\tau)}\tilde{f}_0(\sigma,\tau,\tau-mh)\,d\tau, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad mh \le t \le (m+1)h. \tag{10}$$

Останній доданок із (10) запишемо як суму

$$\frac{\mu}{\mu-\nu e^{-a(\sigma)T}} \int\limits_{mh}^{t} e^{-a(\sigma)(t-\tau)}\tilde{f}_0(\sigma,\tau,\tau-mh)d\tau - \frac{\nu}{\mu-\nu e^{-a(\sigma)T}} \int\limits_{mh}^{t} e^{-a(\sigma)(T+t-\tau)}\tilde{f}_0(\sigma,\tau,\tau-mh)d\tau$$

і, підставивши у (10), отримаємо

$$v(\sigma,t) = \frac{\nu}{\mu-\nu e^{-a(\sigma)T}} \int\limits_{t}^{T+mh} e^{-a(\sigma)(T+t-\tau)}\tilde{f}_0(\sigma,\tau,\tau-mh)d\tau +$$

$$+ \frac{\mu}{\mu-\nu e^{-a(\sigma)T}} \int\limits_{mh}^{t} e^{-a(\sigma)(t-\tau)}\tilde{f}_0(\sigma,\tau,\tau-mh)d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\mu-\nu e^{-a(\sigma)T}}\,e^{-a(\sigma)(t-mh)}\tilde{u}_0(\sigma,mh), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad mh \le t \le (m+1)h. \tag{11}$$

Розв'язок задачі (5), (6) набирає вигляду

$$u(x,t) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x,\sigma)\}v(\sigma,t)d\sigma = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\nu}{\mu - \nu e^{-a(\sigma)T}} \exp\{i(x,\sigma)\}\,d\sigma\times$$

$$\times \int\limits_t^{T+mh} \exp\{-a(\sigma)(T+t-\tau)\}\tilde{f}_0(\sigma,\tau,\tau-mh)d\tau +$$

$$+ (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\mu}{\mu - \nu e^{-a(\sigma)T}} \exp\{i(x,\sigma)\}d\sigma \int\limits_{mh}^{t} \exp\{-a(\sigma)(t-\tau)\}\tilde{f}_0(\sigma,\tau,\tau-mh)d\tau +$$

$$+ (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\mu - \nu e^{-a(\sigma)T}} \exp\{i(x,\sigma)\}\exp\{-a(\sigma)(t-mh)\}\tilde{u}_0(\sigma,mh)d\sigma \equiv$$

$$\equiv J_1 + J_2 + J_3, \tag{12}$$

де

$$\tilde{f}_0(\sigma,\tau,\tau-mh) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-i(\xi,\sigma)\}f_0(\xi,\tau,\tau-mh)d\xi,$$

$$\tilde{u}_0(\sigma,mh) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-i(\xi,\sigma)\}u_0(\xi,mh)d\xi, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad mh \le t \le (m+1)h.$$

Розглянемо кожен інтеграл у формулі (12) окремо. Функція

$$J_1 = \int\limits_t^{T+mh} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G^1(x-\xi,t-\tau,T)f_0(\xi,\tau,\tau-mh)d\xi, \tag{13}$$

де

$$G^1(x-\xi,t-\tau,T) = \frac{\nu}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k G^1_k(x-\xi,t-\tau,T), \tag{14}$$

а

$$G^1_k(x-\xi,t-\tau,T) \equiv (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-\xi,\sigma)-a(\sigma)((k+1)T+t-\tau)}d\sigma, \tag{15}$$

$$k = 0,1,2,\ldots, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad mh \le t \le (m+1)h.$$

Отже, з урахуванням (14), (15) функція J_1 із (13) набирає вигляду

$$J_1(x,t,T,mh) \equiv \frac{\nu}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \int\limits_t^{T+mh} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G^1_k(x-\xi,t-\tau,T)f_0(\xi,\tau,\tau-mh)d\xi, \tag{16}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad mh \le t \le (m+1)h.$$

Функція

$$J_2 = \int_{mh}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G^2(x-\xi, t-\tau) f_0(\xi, \tau, \tau - mh)\, d\xi, \tag{17}$$

де

$$G^2(x-\xi, t-\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k G_k^2(x-\xi, t-\tau, T), \tag{18}$$

$$G_k^2(x-\xi, t-\tau, T) \equiv (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-\xi,\sigma) - a(\sigma)(kT+t-\tau)} d\sigma, \tag{19}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad mh \le t \le (m+1)h.$$

Підставляючи (18), (19) у (17), отримуємо

$$J_2(x,t,T,mh) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \int_{mh}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_k^2(x-\xi, t-\tau, T) f_0(\xi, \tau, \tau - mh) d\xi, \tag{20}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad mh \le t \le (m+1)h.$$

Функція

$$J_3 = \int_{\mathbb{R}^n} G^3(x-\xi, t-mh) u_0(\xi, mh) d\xi, \tag{21}$$

де

$$G^3(x-\xi, t-mh) = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k G_k^3(x-\xi, t-mh, T), \tag{22}$$

а

$$G_k^3(x-\xi, t-mh, T) \equiv (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-\xi,\sigma) - a(\sigma)(kT+t-mh)} d\sigma, \tag{23}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad mh \le t \le (m+1)h.$$

Підставляючи (22) і (23) в (21), одержуємо

$$J_3(x,t,T,mh) \equiv \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \int_{\mathbb{R}^n} G_k^3(x-\xi, t-mh, T) u_0(\xi, mh) d\xi, \tag{24}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad mh \le t \le (m+1)h.$$

3. Дослідження властивостей функцій G^i, $i = 1, 2, 3$, та дії на них диференціальних і псевдодиференціальних операцій. Справджується така теорема.

Теорема 1. *Розв'язок задачі (5), (6) набирає вигляду суми (12), де доданки визначені формулами (16), (20) та (24).*

Доведення. Для доведення потрібно провести оцінювання функцій G_k^i, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, 3$, та за допомогою них оцінити функції G_i, $i = 1, 2, 3$, із (14), (18), (22).

Оскільки G^i, $i = 1, 2, 3$, виражаються через G_k^i, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, 3$, а останні відрізняються лише множниками біля $a(\sigma)$, то досить розглянути одну з них, наприклад G_k^3, $k = 0, 1, \ldots$, де

$$G_k^3(x, t, T) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\sigma) - a(\sigma)(kT+t)} d\sigma, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Оскільки для будь-яких $\sigma \in \mathbb{R}^n$, $t_0 > 0$ і $t \geq t_0$

$$|\exp\{i(x, \sigma) - a(\sigma)(kT + t)\}| \leq \exp\{-a(\sigma)(kT + t_0)\}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

то для довільної смуги $\tilde{\Pi}_{t_0} \equiv \{(x, t) | 0 < t_0 \leq t \leq \tilde{T}, x \in \mathbb{R}^n\}$ інтеграл (22) збігається рівномірно і тому функції G_k^3, $k = 0, 1, \ldots$, є неперервними в $\tilde{\Pi}_0 \equiv \{(x, t) | 0 < t \leq \tilde{T}, x \in \mathbb{R}^n\}$. Аналогічно доводиться диференційовність по t функцій G_k^3, $k = 0, 1, \ldots$. Для $G_k^i(\bar{t}, \bar{x})$, $k = 0, 1, \ldots$, $i = 1, 2, 3$, позначимо $\bar{x} \equiv x - \xi$, а $\bar{t}_k \equiv (k + 1)T + t - \tau$ для G_k^1 із (15), $\bar{t}_k \equiv kT + t - \tau$ для G_k^2 із (19) і $\bar{t}_k \equiv kT + t - mh$ для G_k^3 із (22). Для функцій G_k^i, $k = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3$, правильними є оцінки [16, 17]

$$|D_x^\chi G_k^i(\bar{x}, \bar{t})| \leq C_\chi \bar{t}_k (\bar{t}_k^{1/\gamma} + |\bar{x}|)^{-(n+\gamma+|\chi|)}, \tag{25}$$

$$|D_t G_k^i(\bar{x}, \bar{t})| \leq C(\bar{t}_k^{1/\gamma} + |\bar{x}|)^{-(n+\gamma)}. \tag{26}$$

Використавши (25), (26), для G^i при $i = 2$ отримаємо

$$|D_x^\chi G^i(\bar{x}, \bar{t})| \leq C_\chi \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \frac{\bar{t}_k}{(\bar{t}_k^{1/\gamma} + |\bar{x}|)^{n+\gamma+|\chi|}}, \tag{27}$$

$$|D_t G^i(\bar{x}, \bar{t})| \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k (\bar{t}_k^{1/\gamma} + |\bar{x}|)^{-(n+\gamma)}, \tag{28}$$

для G^i при $i = 1$ перед сумою є множник $\dfrac{\nu}{\mu}$, а для G^i при $i = 3$ — множник $\dfrac{1}{\mu}$.

Врахувавши (27), (28), для $i = 1, 2, 3$ отримаємо рівності

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right) G^i(\bar{x}, \bar{t}) = 0, \tag{29}$$

які при $a(\sigma) \equiv |\sigma|$ перевіряються безпосередньо.

Справджуються рівності

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G^i(\overline{x}-y,\overline{t})dy = \frac{C_i}{\mu-\nu}, \quad i=1,2,3, \tag{30}$$

де $C_1=\nu$, $C_2=\mu$, $C_3=1$, які випливають із (29). Враховуючи (26), із (30) отримуємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} G^i(\overline{x}-y,\overline{t})dy = 0, \quad i=1,2,3. \tag{31}$$

Оцінки (25) забезпечують збіжність інтегралів (13), (17), (21) для степенево зростаючих функцій u_0 та f (див. п. 1).

4. Дослідження властивостей функції u та дії на неї диференціальних і псевдодиференціальних операцій. Функція u, визначена рівністю (12), є сумою трьох доданків, визначених для $x\in\mathbb{R}^n$, $mh\le t\le(m+1)h$. Розглянемо кожен доданок окремо. Інтеграл J_3 із (21) можна диференціювати по t та застосовувати до нього ПДО A під знаком інтеграла [16]. Законність таких операцій забезпечується оцінками функції G^3, її похідних (25) – (28). Враховуючи (29), отримуємо

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+A\right)J_3 = 0. \tag{32}$$

Розглянемо J_2, визначений виразом (17), і запишемо його у вигляді суми

$$J_2 = \int\limits_{mh}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0^2(x-\xi,t-\tau) f_0(\xi,\tau,\tau-mh)d\xi +$$

$$+\int\limits_{mh}^{t} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k G_k^2(x-\xi,t-\tau,T) f_0(\xi,\tau,\tau-mh)\,d\xi \equiv J_{20}+J_{21}, \tag{33}$$

$$x\in\mathbb{R}^n, \quad mh\le t\le(m+1)h.$$

Існування похідної по t і формулу

$$\frac{\partial}{\partial t}J_{20} = \int\limits_{mh}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} G_0^2(x-\xi,t-\tau)[f_0(\xi,\tau,\tau-mh)-f_0(x,\tau,\tau-mh)]\,d\xi +$$

$$+ f_0(x,t,t-mh), \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad mh\le t\le(m+1)h, \tag{34}$$

встановлено в [5, 16, 18]. Має місце формула

$$\frac{\partial}{\partial t}J_{21} = \int\limits_{mh}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \frac{\partial}{\partial t} G_k^2(x-\xi,t-\tau,T) f_0(\xi,\tau,\tau-mh)d\xi +$$

$$+\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k G_k^2(x-\xi,0,T)f_0(\xi,\tau,\tau-mh)d\xi, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad mh\le t\le(m+1)h. \tag{35}$$

Розглянемо J_1, визначений виразом (13). Як і для J_2, похідну від функції J_1 по t можна обчислювати за формулою похідної від інтеграла, залежного від параметра t, у випадку, коли межі інтеграла також залежать від цього параметра t. Об'єднуючи формули (34), (35), отримуємо вираз для похідної по t суми J_1+J_2.

Треба встановити формулу для дії ГСІ D_Ω^α на функції J_1, J_2, визначені формулами (13) і (20) відповідно [16]. При цьому слід розрізняти випадки $\alpha<\gamma$ і $\alpha=\gamma$. У першому випадку можна застосовувати ГСІ D_Ω^α безпосередньо під знаком інтеграла, а в другому випадку потрібно створювати спеціальну формулу, яка вимагає розуміння ГСІ D_Ω^α як границі при $\varepsilon\to 0$ $D_{\Omega,\varepsilon}^\gamma$ [16].

Оскільки A_Ω^α діє по аргументу x, від якого залежать функції G^i, $i=1,2,3$, то спочатку треба вивчити дію ГСІ D_Ω^α на функції G^i, $i=1,2,3$. Для цього потрібно мати оцінку $\Delta_h^l G^i$, $i=1,2,3$, при $|h|\le(t-\mu)^{1/\gamma}$ та при $|h|\ge(t-\mu)^{1/\gamma}$.

Враховуючи різні зображення для скінченних різниць та оцінки (25), отримуємо, що при малих h (зокрема, при $|h|\le(t-\mu)^{1/\gamma}$) виконуються нерівності

$$|(\Delta_h^l G^i)(t,T,x,\mu)|\le C|h|^{[\alpha]+1}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}\times$$

$$\times\sum_{\nu=0}^{l}\frac{t+kT}{[(t+kT)^{1/\gamma}+|x-\theta_\nu\nu h|]^{n+\gamma+[\alpha]+1}}, \quad i=1,2,3, \tag{36}$$

а при великих h (зокрема, при $|h|\ge(t-\mu)^{1/\gamma}$) отримуємо

$$|(\Delta_h^l G^i)(t,T,x,\mu)|\le C\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}\sum_{\nu=0}^{l}\frac{t+kT}{[(t+kT)^{1/\gamma}+|x-\nu h|]^{n+\gamma}}, \quad i=1,2,3. \tag{37}$$

Зауважимо, що оцінка (36) забезпечує збіжність ГСІ $D_\Omega^\alpha G^i$, $i=1,2,3$, при $|h|\le 1$, а (37) — його збіжність при $|h|\ge 1$. Вони існують, якщо символ ПДО $a(\sigma)$ має гладкість порядку $N=2n+2[\gamma]+1$. Тоді гладкість G^i, $i=1,2,3$, має порядок $N-2n-[\gamma]$, $\gamma\ge 1$; при $0<\gamma<1$ символ вважається нескінченно гладким по просторових змінних.

Із цих оцінок та теореми Фубіні при $\alpha<\gamma$ отримуємо, що ГСІ $D_\Omega^\alpha J_2$ є абсолютно збіжним і його можна застосовувати під знаком інтеграла

$$(D_\Omega^\alpha J_2)=\int_{mh}^{t}d\tau\int_{\mathbb{R}^n}G_\Omega^2(t-\tau,T,x-\xi,\mu)f(\tau,\xi)d\xi, \tag{38}$$

де

$$D_\Omega^\alpha G_\Omega^2=(2\pi)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k\int_{\mathbb{R}^n}\tilde{\Omega}(\sigma)\exp\{i(x-\xi,\sigma)-a(\sigma)(kT+t-\tau)\}\,d\sigma, \tag{39}$$

$$(t,x)\in\Pi, \quad \mu>1.$$

Використовуючи (39), можна переконатися, що формула (38) є правильною для цілого непарного $\alpha < \gamma$ і парної характеристики Ω. Зауважимо, що коли за символом $a(\sigma) \equiv a_\alpha(\sigma)$ будувати символ $\tilde{\Omega}(\sigma)$, то $\tilde{\Omega}(\sigma) = a_\alpha(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, де a_α — символ ПДО порядку однорідності $\alpha < \gamma$. Тут ГСІ D^α_Ω з характеристикою Ω є більш ширшим оператором і його символ визначається формулою [16]

$$\tilde{\Omega}(x,\xi) = \frac{1}{d_{nl}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} h|^{-n-\alpha}(1-\exp\{i\xi h\})^l \Omega\left(x; \frac{h}{|h|}\right) dh.$$

Розглянемо тепер ГСІ порядку γ з символом $\tilde{\Omega}(\sigma)$. Якщо ПДО побудовано за символом $a_\gamma(\sigma)$, то $\tilde{\Omega}(\sigma) = a_\gamma(\sigma)$. Додатково потрібно припускати, що $\tilde{\Omega}(\sigma)$ має при $\sigma \neq 0$ $N \geq 2n+2[\gamma]+1$ неперервних похідних, якщо $\gamma \geq 1$, або є нескінченно диференційовною функцією при $0 < \gamma < 1$, $\tilde{\Omega}(\sigma) \neq 0$ при $\sigma \neq 0$ і

$$|D^{æ}_\sigma \tilde{\Omega}(\sigma)| \leq C_n |\sigma|^{\gamma-|æ|}.$$

Окремо розглянемо випадок цілого γ. Тоді при непарному γ і парній характеристиці $\tilde{\Omega}$ не є поліномом по σ. Припустимо, що в розкладі за сферичними гармоніками

$$[\tilde{\Omega}(\sigma)]^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\delta_{2\nu}} C_{2\nu,\mu} Y_{2\nu,\mu}(\sigma), \quad |\sigma| = 1,$$

коефіцієнти $C_{2\nu,\mu} = 0$, якщо $\gamma = 2+2\nu+2k$, $k = 0,1,2,\ldots$. Якщо $\tilde{\Omega}$ є поліномом по σ, то цей випадок не розглядається, тому що він охоплюється теорією параболічних диференціальних рівнянь [19, 20].

Зауважимо також, що функція G визначається через G^1_k із (15), а до всіх решти доданків ГСІ D^γ_Ω можна застосувати безпосередньо під знаком інтеграла.

Теорема 2. *При вказаних вище умовах на $\tilde{\Omega}(\sigma)$ ГСІ $D^\gamma_\Omega J_2$ існує в сенсі умовної збіжності [16] і*

$$(D^\gamma_\Omega J_2) = \int\limits_{mh}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G^2_{0\Omega}(x-\xi, t-\tau, T)(f_0(\xi,\tau,\tau-mh) - f_0(x,\tau,\tau-mh))d\xi +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \int\limits_{mh}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G^2_{k\Omega}(x-\xi, t-\tau+kT, T) f_0(\xi,\tau,\tau-mh)d\xi, \tag{40}$$

а ГСІ $D^\gamma_\Omega J_1$ — в звичайному сенсі і

$$(D^\gamma_\Omega J_1) = \int\limits_{t}^{T+mh} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G^1_\Omega(x-\xi, t-\tau, T) f_0(\xi,\tau,\tau-mh)d\xi, \ \ (t,x) \in \Pi. \tag{41}$$

Доведення. Нехай $0 < \theta < 1$ і позначимо

$$J_{20}^{\theta} \equiv \int\limits_{mh}^{t-\theta} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{0\Omega}^{2}(x-\xi, t-\tau) f_0(\xi, \tau, \tau - mh) d\xi.$$

Із (36) і (37) випливає абсолютна збіжність ГСІ $D_{\Omega}^{\gamma} J_{20}^{\theta}$ і формула

$$D_{\Omega}^{\gamma} I_{20}^{\theta} = \int\limits_{mh}^{t-\theta} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_{\Omega}^{\gamma} G_{0}^{2}(x-\xi, t-\tau) f_0(\xi, \tau, \tau - mh) d\xi.$$

Враховуючи (36), (37), отримуємо $\int_{\mathbb{R}^n} D_{\Omega}^{\gamma} G_0^2(\xi, t) d\xi = 0$. Справджується також оцінка

$$|D_{\Omega}^{\gamma} G_0^2(x-\xi, t-\tau)| \leq C[(t-\tau)^{1/\gamma} + |x-\xi|]^{-n-\gamma}. \tag{42}$$

Тоді

$$D_{\Omega}^{\gamma} J_{20}^{\theta} = \int\limits_{mh}^{t-\theta} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_{\Omega}^{\gamma} G_0^2(x-\xi, t-\tau)[f_0(\xi, \tau, \tau - mh) - f_0(x, \tau, \tau - mh)] d\xi.$$

Із оцінки (42) і умови на дані задачі випливає збіжність останніх інтегралів.

Остання формула показує, що рівномірно по $x \in \mathbb{R}^n$

$$D_{\Omega}^{\gamma} J_{20} = \lim_{\theta \to 0} J_{20}^{\theta}.$$

До всіх інших доданків функції J_2 і до всіх доданків функції J_1 можна застосувати ГСІ D_{Ω}^{γ} безпосередньо під знаком інтеграла, оскільки для $D_{\Omega}^{\gamma} G_k^i$, $k = 1, 2, \ldots, i = 1, 2$, справджується оцінка (42), де у правій частині замість $(t-\tau)^{1/\gamma}$ слід писати $(t - \tau + kT)^{1/\gamma}$, $k \geq 1$.

Теорему доведено.

5. Приклади.

Приклад 1. Нехай $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$; $T > 0$, μ, ν — числа,

$$u_t(x,t) + A_1 u(x,t) = f(x, t, \mu u(x, t-h) - \nu u(x, T+t-h)), \;\; t > h, \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; T >> h, \tag{43}$$

$$\mu u(x,t) = \nu u(x,t) + u_0(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq t \leq h, \quad \mu > 0, \quad \nu > 0, \tag{44}$$

де

$$A_1 u(x,t) \equiv F_{\sigma \to x}^{-1}[|\sigma| F_{x \to \sigma}[u(x,t)]], \quad t > 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{45}$$

є ПДО з символом $|\sigma|$, визначеним лише на спадних функціях по x, або [21]

$$A_1 u(t,x) \equiv \frac{2}{\pi} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \mathbb{R}\to\infty}} \int\limits_{\varepsilon\le|\overline{h}|\le R} \frac{\Delta_{\overline{h}} u(t,x)}{|\overline{h}|^2} d\overline{h}, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{46}$$

$$\Delta_{\overline{h}} u(x,t) = u(x+\overline{h},t) - u(x,t).$$

Якщо $u(x,t) \equiv C$, то $\Delta_{\overline{h}} C = 0$ і в (46) $A_1 C = 0$ у класичному сенсі, а в (45) — у сенсі теорії узагальнених функцій.

Формула для розв'язку задачі (43), (44) при $x\in\mathbb{R}$, $mh\le t\le(m+1)h$ набирає вигляду (12), де в формулах (13)–(24) $a(\sigma)\equiv|\sigma|$, $\sigma\in\mathbb{R}$. Тоді функції G_k^i, $k=0,1,\ldots$, $i=1,2,3$, безпосередньо підраховуються [21] і, отже,

$$J_1 = \frac{\nu}{\pi\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \int\limits_t^{T+mh} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{((k+1)T+t-\tau)f_0(\xi,\tau,\tau-mh)d\xi}{((k+1)T+t-\tau)^2+|x-\xi^2},$$

$$J_2 = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \int\limits_{mh}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{(kT+t-\tau)f_0(\xi,\tau,\tau-mh)d\xi}{(kT+t-\tau)^2+|x-\xi|^2},$$

$$J_3 = \frac{1}{\pi\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{(kT+t-mh)u_0(\xi,mh)d\xi}{(kT+t-mh)^2+|x-\xi|^2},$$

$$x\in\mathbb{R}, \quad mh\le t\le(m+1)h.$$

Якщо $f_0\equiv C_1$, $u_0\equiv C_2$, то при $mh\le t\le(m+1)h$, $x\in\mathbb{R}$

$$u(x,t) = \frac{1}{\mu-\nu}\left[\nu T+(\mu-\nu)(t-mh)C_1+C_2\right].$$

Оскільки $\dfrac{\partial u}{\partial t} = C_2$, то рівняння (43) задовольняються у класичному сенсі, оскільки функція u не залежить від x і $A_1 u = 0$, тому що $\Delta_{\overline{h}} u(x,t) = 0$. Умові (44) відповідає умова $\mu u(x,mh) - \nu\mu(x,T+mh) = C_2$, яка виконується, бо

$$\mu u(x,mh) = \frac{\mu}{\mu-\nu}(\nu T+C_2), \quad \nu u(x,T+mh) = \frac{\nu}{\mu-\nu}\left[(\nu T+(\mu-\nu)T)C_1+C_2\right].$$

Приклад 2. Розглянемо нелокальну задачу

$$u_t(x,t) + A_1 u(x,t) = \mu u(x,t-h) - \nu u(x,T+t-h), \quad t>h, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{47}$$

$$\mu u(x,t) - \nu u(x,t+T) = e^t, \quad 0\le t\le h, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{48}$$

Методом кроків для $x \in \mathbb{R}, mh \leq t \leq (m+1)h$ із (47), (48) отримуємо

$$u_t(x,t) + A_1 u(x,t) = e^{t-mh}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq mh, \tag{49}$$

$$\mu u(x,mh) - \nu u(x,T+mh) = e^{mh}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{50}$$

Функції

$$J_1 = \frac{\nu}{\mu-\nu}\left[e^T - e^{t-mh}\right], \ J_2 = \frac{\mu}{\mu-\nu}\left[e^{t-mh} - 1\right], \ J_3 = \frac{1}{\mu-\nu}\,e^{mh}, \ x \in \mathbb{R}, \quad t \geq mh,$$

і розв'язок задачі (49), (50) має вигляд

$$u(x,t) = \frac{1}{\mu-\nu}\left[\nu e^T + (\mu-\nu)e^{t-mh} - \mu + e^{mh}\right], \quad x \in \mathbb{R}, \quad mh \leq t \leq (m+1)h.$$

Рівняння (49) задовольняється очевидно, оскільки $A_1 u = 0$ і

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\mu-\nu}\,(\mu-\nu)e^{t-mh} = e^{t-mh}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad m \leq t \leq (m+1)h.$$

Нелокальна умова (50) перевіряється безпосередньо.

Зауваження 1. Даний результат залишається справедливим для задачі (1), (2), якщо у рівнянні (1)

$$(Au)(x,t) = \sum_{k=0}^{m}(A_k u)(x,t),$$

де A_k є ПДО з символами $a_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $0 \leq k \leq m$, однорідними порядків γ_k, $0 \leq k \leq$ $\leq m$, таких, що $\gamma_0 > \gamma_1 > \ldots > \gamma_m$, гладкими по σ при $\sigma \neq 0$, або з символами, залежними від часової змінної $t > 0$ і просторових змінних $x \in \mathbb{R}^n$.

Зауваження 2. Даний результат залишається правильним для системи параболічних псевдодиференціальних рівнянь вигляду (1) з умовою вигляду (2).

1. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971. — 296 с.
2. *Гурли А. С., Соу Дж.В.-Х., Ву Дж. Х.* Нелокальные уравнения реакции диффузии с запаздыванием: биологические модели и нелинейная динамика // Соврем. математика. Фундам. направления. — 2003. — **1**. — С. 84 – 120.
3. *Эйдельман С.Д., Дринь Я. М.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решений задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений // Приближенные методы математического анализа. – Киев: Изд-во КГПИ им. А. М. Горького, 1974. — С. 60 – 69.
4. *Дрінь Я. М.* Вивчення одного класу параболічних псевдодиференціальних операторів у просторах гельдерових функцій // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1974. — № 1. — С. 19 – 21.
5. *Дринь Я. М.* Фундаментальное решение задачи Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных уравнений // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1977. — № 3. — С. 198 – 203.

6. *Дрінь Я. М., Петришин Р. І.* Задача Коші для автономних квазілінійних параболічних псевдодиференціальних рівнянь з відхиленням аргументу // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 1. — С. 29–37. (Англ. переклад: *Drin' Ya. M., Petryshyn R. I.* Cauchy problem for autonomous quasilinear parabolic pseudodifferential equations with deviating argument // J. Math. Sci. — 2014. — **197**, Issue 1. — P. 29–38. DOI: 10.1007/s 10985-014-1699-0.)

7. *Городецький В. В., Дрінь Я. М.* Задача Діріхле для одного класу еволюційних рівнянь // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2007. — Вип. 336-337. — С. 63–78.

8. *Дрінь Я. М.* Багатоточкова задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь // Доп. НАН України. — 2010. — № 7. — С. 7–11.

9. *Дрінь Я. М.* Нелокальна багатоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2010. — Вип. 501. — С. 24–32.

10. *Drin' Ya. M.* Nonlocal problem for one class equations of diffusion in space of generalized functions // Proc. Spie 9066. Eleventh Int. Conf. Correlation Optics, 9066OU. — P. 1–12.

11. *Gorodetsky V. V., Drin' Ya. M.* Investigation of Cauchy and nonlocal problems of diffusion equation // Proc. Spie 9066. Eleventh Int. Conf. Correlation Optics, 9066OT. — P. 13–20.

12. *Городецкий В. В., Дринь Я М.* Нелокальная по времени двухточечная задача и задача оптимального управления для эволюционных псевдодифференциальных уравнений // Проблемы управления и информатики. — 2014. — № 2. — С. 63–79. (Англ. переклад: *Gorodetsky V. V., Drin' Y. M.* Time-nonlocal two-point problem and optimal control problem for evolutionary pseudodifferential equations // J. Automat. and Inform. Sci. — 2014. — **46**, Issue 4. — P. 20–37. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v46.i4.30.)

13. *Городецький В. В., Дрінь Я. М.* Нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами в просторах періодичних функцій // Буков. мат. журн. — 2014. — **2**, № 1. — С. 54–70.

14. *Городецький В. В., Дрінь Я. М.* Багатоточкова за часом задача для одного класу еволюційних псевдодиференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. — 2014. — **66**, № 5. — С. 619–633.

15. *Дрінь Я. М.* Нелокальна задача для автономних квазілінійних параболічних псевдодиференціальних рівнянь з відхиленням аргумента // Міжнар. мат. конф. «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» до 100-ліття від дня народження чл.-кор. НАН України Положого Г. М. (Київ, 23-24 квітня 2014 р.). — С. 60.

16. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. — Basel etc.: Birkhäuser, 2004. — 390 p.

17. *Літовченко В. А.* Задача Коші з оператором Рісса дробового диференціювання // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 12. — С. 1653–1667.

18. *Эйдельман С. Д., Дринь Я. М.* Построение и исследование классических фундаментальных решений задачи Коши равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений // Мат. исслед. — 1981. — **63**. — С. 18–33.

19. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. — М.: Наука, 1964. — 443 с.

20. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968. — 427 с.

21. *Дрінь Р. Я.* Дослідження якісних властивостей розв'язків параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Львів, 1997. — 115 с.

Одержано 20.11.14,
після доопрацювання — 03.02.15