УДК 517.9

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ІЗ ЗАГАЛЬНОЮ СТОХАСТИЧНОЮ МІРОЮ

М. Ф. Городній, Д. М. Полюля

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64

We find sufficient conditions for existence of a weak solution of the Neumann problem for the heat equation with stochastic action described by an integral and a general stochastic measure.

Приведены достаточные условия существования слабого решения задачи Неймана для уравнения теплопроводности со случайным воздействием, описываемым с помощью интеграла по общей стохастической мере.

1. Вступ. У роботі [1] встановлено існування слабкого розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності з випадковим впливом, який описується за допомогою інтеграла за загальною стохастичною мірою. Для випадку n просторових змінних такий розв'язок визначається як деякий узагальнений випадковий процес V_t, $t > 0$, такий, що при фіксованому $t > 0$ V_t є узагальненою випадковою функцією, визначеною на просторі Шварца $S(\mathbb{R}^n)$ швидкоспадних основних функцій. Аналогічний результат щодо існування слабкого розв'язку задачі Коші для хвильового рівняння з випадковим впливом отримано в [1] для $n = 1$ і у [2] для $n = 2, 3$. Про застосування хвильових рівнянь із стохастичними мірами див. [1, 3, 4] та наведені там посилання.

Мета цієї статті — довести твердження про існування слабкого розв'язку задачі Неймана для рівняння теплопровідності з таким випадковим впливом.

2. Необхідні теоретичні відомості. Позначимо через L_0 множину всіх випадкових величин, які задані на повному ймовірнісному просторі (Ω, F, P) і розглядаються з точністю до P-еквівалентності; збіжність в L_0 — це збіжність за ймовірністю. Нехай $D(\mathbb{R}^m)$ — простір дійсних основних функцій з компактним носієм (див., наприклад, [5, с. 85]).

Означення 1. *Узагальненою випадковою функцією* (*у.в.ф.*) *називається лінійне неперервне відображення* $\xi : D(\mathbb{R}^m) \to L_0$.

Набір усіх у.в.ф. позначатимемо через $D'_r(\mathbb{R}^m)$. Дії з у.в.ф. визначаються, як і для звичайних узагальнених функцій (див., наприклад, [5], § 5, 6).

Нехай $\mathbf{B}(\mathbb{R}^m)$ — σ-алгебра борелевих множин простору $\mathbb{R}^m$.

Означення 2. *Стохастичною мірою називається σ-адитивне відображення*

$$\mu : \mathbf{B}(\mathbb{R}^m) \to L_0.$$

У монографії [6] визначено $\int_A f d\mu$, в якому $A \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^m)$, f — дійсна вимірна (за Борелем) функція, та досліджено його властивості. Зокрема, кожна вимірна й обмежена на A функція є інтегровною по множині A за загальною стохастичною мірою, а також виконуються потрібні для подальшого викладу твердження.

Теорема 1 (аналог теореми Лебега (див. наслідок 1.2 [6])). *Нехай функції g, f_n, $n \geq 1$, інтегровні по множині A за загальною стохастичною мірою μ, а також виконуються такі умови:*

1) $\forall n \geq 1 \; \forall x \in A : |f_n(x)| \leq g(x)$;

2) $f_n \to f$ поточково на A.

Тоді f є інтегровною по множині A за загальною стохастичною мірою μ і

$$\mathrm{P} - \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu = \int\limits_A f\, d\mu.$$

Теорема 2 (про диференціювання інтеграла за загальною стохастичною мірою по параметру (див. лему 5 [1])). *Нехай функція $h : \mathbb{R}^m \times (a,b) \to \mathbb{R}$ задовольняє такі умови:*

1) для кожного фіксованого $t \in (a;b)$ функція $h(\cdot,t)$ є інтегровною по множині $\mathbb{R}^m$ за загальною стохастичною мірою λ;

2) для кожного фіксованого $x \in \mathbb{R}^m$ існує $\dfrac{\partial h(x,\cdot)}{\partial t}$ на $(a;b)$;

3) існує така інтегровна по множині $\mathbb{R}^m$ за загальною стохастичною мірою λ функція g, що

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^m \times (a,b) : \left| \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} \right| \leq g(x).$$

Тоді для випадкового процесу $\eta(t) = \int_{\mathbb{R}^m} h(x,t) d\lambda(x)$, $t \in (a,b)$, існує похідна в кожній точці інтервалу (a,b), причому

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial h(x,t)}{\partial t}\, d\lambda(x), \quad t \in (a,b).$$

Тут і далі похідна від випадкового процесу розглядається у сенсі збіжності за ймовірністю.

Зазначимо, що узагальнена стохастична міра μ і вимірна обмежена на $\mathbb{R}^m$ функція f визначають у.в.ф. $f\dot{\mu}$ за правилом

$$(f\dot{\mu}, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(x) d\mu(x), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^m).$$

3. Формулювання основного результату. Зафіксуємо натуральне число $n \geq 2$. Якщо $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, то $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, а отже, $x = (x', x_n)$, $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$, $(x,t) = (x', x_n, t)$, і при цьому t інтерпретується як часова, а $x_1, \ldots, x_n$ — як просторові координати; символом $\triangle_x = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ позначаємо оператор Лапласа, $\overline{A}$ — замикання множини A.

Нехай $\mu_k,\ k = 1, 2, 3,$ — стохастичні міри на $\mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$. Розглянемо задачу Неймана для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial V_{t,x_n}}{\partial t} = a^2 \triangle_x V_{t,x_n} + f\dot{\mu}_1, \quad t > 0, \quad x_n > 0, \tag{1}$$

$$V_{t,x_n}\Big|_{t=0} = g\dot{\mu}_2, \quad x_n > 0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial V_{t,x_n}}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = h\dot{\mu}_3, \quad t > 0, \tag{3}$$

відносно невідомого узагальненого випадкового відображення $V_{t,x_n},\ t > 0,\ x_n > 0,$ що набуває значень у $D_r'(\mathbb{R}^{n-1})$. Тут $f(x', t)$, $g(x')$, $h(x', t)$ — вимірні, обмежені, фінітні, дійсні функції, визначені відповідно на множинах $\mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$, $\mathbb{R}^{n-1}$ та $\mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$ і такі, що функція $\dfrac{\partial h}{\partial t}$ є визначеною й обмеженою на $\mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$.

Покладемо

$$G_1(t, x) = -\frac{2a^2}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right\}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$G_0(t, x, \xi) = (2a\sqrt{\pi t})^{-n} \exp\left\{-\frac{|x' - \xi'|^2}{4a^2 t}\right\} \left(\exp\left\{-\frac{(x_n - \xi_n)^2}{4a^2 t}\right\} + \right.$$
$$\left. + \exp\left\{-\frac{(x_n + \xi_n)^2}{4a^2 t}\right\}\right), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Означення 3. *Відображення $V_{t,x_n},\ t > 0,\ x_n > 0,$ називається розв'язком задачі Неймана (1) – (3), якщо для кожної $\varphi \in D(\mathbb{R}^{n-1})$ виконуються такі умови:*

a_1) для довільних $t > 0,\ x_n > 0$

$$\frac{\partial (V_{t,x_n}, \varphi)}{\partial t} = a^2 \left((V_{t,x_n}, \triangle_{x'}\varphi) + \frac{\partial^2 (V_{t,x_n}, \varphi)}{\partial x_n^2}\right) + \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x', t)\varphi(x')d\mu_1(x');$$

a_2) для довільного $x_n > 0$

$$\mathrm{P} - \lim_{t \to 0+} (V_{t,x_n}, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x')\varphi(x')d\mu_2(x');$$

a_3) для довільного $t > 0$

$$\mathrm{P} - \lim_{x_n \to 0+} \frac{\partial (V_{t,x_n}, \varphi)}{\partial x_n} = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} h(x', t)\varphi(x')d\mu_3(x').$$

Покладемо при $\varphi \in D(\mathbb{R}^{n-1})$, $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $t > 0$

$$r_1(x', x_n, t, \varphi) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} G_0(t-\tau, x, \xi) f(x', \tau)\varphi(\xi')d\xi,$$

$$r_2(x', x_n, t, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} G_0(t, x, \xi) g(x')\varphi(\xi')d\xi,$$

$$r_3(x', x_n, t, \varphi) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} G_1(t-\tau, x-\xi') h(x', \tau)\varphi(\xi')d\xi'$$

і при $k = 1, 2, 3$ визначимо узагальнене випадкове відображення $V_{t,x_n,k}$, $t > 0$, $x_n > 0$, за правилом

$$(V_{t,x_n,k}, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} r_k(x', x_n, t, \varphi)d\mu_k(x'), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Основним результатом цієї статті є наступна теорема.

Теорема 3. *Відображення*

$$(V_{t,x_n}, \varphi) = \sum_{k=1}^{3} (V_{t,x_n,k}, \varphi), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^{n-1}),$$

є розв'язком задачі Неймана (1) – (3).

4. Доведення теореми 3. Спочатку перевіримо, що відображення $V_{t,x_n,1}$, $t > 0$, $x_n > 0$, є розв'язком задачі Неймана

$$\frac{\partial W_{t,x_n}}{\partial t} = a^2 \triangle_{x'} W_{t,x_n} + f\dot{\mu}_1, \quad t > 0, \quad x_n > 0, \tag{4}$$

$$W_{t,x_n}\big|_{t=0} = 0, \quad x_n > 0, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial W_{t,x_n}}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = 0, \quad t > 0. \tag{6}$$

Зафіксуємо $\varphi \in D(\mathbb{R}^{n-1})$ і при кожному фіксованому $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ розглянемо задачу Неймана для класичного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial r(y,t)}{\partial t} = a^2 \triangle_y r(y,t) + f(x', t)\varphi(y'), \quad (y, t) = (y', y_n, t) \in \mathbb{R}^n_+ \times (0, \infty), \tag{7}$$

$$r(y,t)\big|_{t=0} = 0, \quad y \in \mathbb{R}^n_+, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial r(y,t)}{\partial y_n}\right|_{y_n=0} = 0, \quad y' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad t > 0. \tag{9}$$

Оскільки f фінітна по t і φ належить $D(\mathbb{R}^{n-1})$, то задача Неймана (7) – (9) має класичний розв'язок $r_x(y,t)$ (див., наприклад, [7, с. 67]), що належить простору Гельдера $C^{2+\alpha}\times \times(\overline{\mathbb{R}^n_+ \times (0,\infty)}, \mathbb{R})$ і зображується у вигляді

$$r_x(y,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} G_0(t-\tau, y, \xi) f(x',\tau)\varphi(\xi')d\xi, \quad (y,t) \in \mathbb{R}^n_+ \times (0,\infty).$$

Використавши явний вигляд G_0, можна переконатися, що

$$r_x(y,t) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|\eta'|^2} f(x',\tau)\varphi(y' + 2a\eta'\sqrt{t-\tau})d\eta', \tag{10}$$

$$(y,t) \in \mathbb{R}^n_+ \times (0,\infty).$$

Тому, поклавши в (10) $y = x$ і застосувавши теорему про диференціювання інтеграла від числової функції по параметру, для кожної $(x,t) \in \mathbb{R}^n_+ \times (0,\infty)$ матимемо

$$r_1(x', x_n, t, \varphi) = r_x(x,t), \tag{11}$$

$$\frac{\partial r_1(x', x_n, t, \varphi)}{\partial t} = \frac{\partial r_x(y,t)}{\partial t}\Big|_{y=x} = a^2 \triangle_y r_x(y,t)\big|_{y=x} + f(x',t)\varphi(x') =$$

$$= a^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|\eta'|^2} f(x',\tau)(\varphi''_{11}(x' + 2a\eta'\sqrt{t-\tau}) + \ldots$$

$$\ldots + \varphi''_{n-1 n-1}(x' + 2a\eta'\sqrt{t-\tau}))d\eta' = a^2 r_1(x', x_n, t, \triangle_{x'}\varphi) + f(x',t)\varphi(x'). \tag{12}$$

Із (10), (11) випливає, що при фіксованих $t > 0$, $x_n > 0$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^{n-1})$ функція $r_1(x', x_n, t, \varphi)$ є вимірною за змінною x', а також

$$\sup_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} |r_1(x', x_n, t, \varphi)| \leq t\|f\|_\infty \|\varphi\|_\infty.$$

Тут і в подальшому $\|\cdot\|_\infty$ позначає sup-норму для обмеженої на своїй області визначення числової функції. Враховуючи також лінійність $r_1(x', x_n, t, \varphi)$ по $\varphi \in D(\mathbb{R}^{n-1})$ і теорему 1, робимо висновок, що $V_{t,x_n,1} \in D'_r(\mathbb{R}^{n-1})$ для довільних $t > 0$, $x_n > 0$.

Внаслідок (12) при фіксованих $b > 0$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^{n-1})$

$$\sup_{t \in (0,b),\ x \in \mathbb{R}^n_+} \left| \frac{\partial r_1(x', x_n, t, \varphi)}{\partial t} \right| \leq b\|f\|_\infty \|\triangle_{x'}\varphi\|_\infty + \|f\|_\infty \|\varphi\|_\infty.$$

Тому до $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} r_1(x', x_n, t, \varphi) d\mu_1(x')$ можна застосувати теорему 2, а отже, з урахуванням (12) при фіксованих $t > 0$, $x_n > 0$ матимемо

$$\frac{\partial(V_{t,x_n,1}, \varphi)}{\partial t} = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial r_1(x', x_n, t, \varphi)}{\partial t} d\mu_1(x') =$$

$$= a^2 \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} r_1(x', x_n, t, \triangle_{x'}\varphi) d\mu_1(x') + \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x', t)\varphi(x') d\mu_1(x') =$$

$$= a^2 (V_{t,x_n}, \triangle_{x'}\varphi) + \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x', t)\varphi(x') d\mu_1(x'). \tag{13}$$

Із фінітності f за змінною t на $(0, \infty)$ випливає, що

$$\exists t_0 > 0\, \forall t \in (0, t_0]\, \forall (x', x_n) \in \mathbb{R}^n_+\, \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^{n-1}) : r_1(x', x_n, t, \varphi) = 0.$$

Тому при фіксованих $x_n > 0$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^{n-1})$

$$\mathrm{P} - \lim_{t \to 0+} (V_{t,x_n,1}, \varphi) = 0. \tag{14}$$

Також внаслідок (10), (11) при фіксованих $t > 0$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^{n-1})$ випадковий процес $\eta(x_n) :=$ $:= (V_{t,x_n,1}, \varphi)$, $x_n > 0$, не залежить від x_n. Тому

$$\mathrm{P} - \lim_{x_n \to 0+} \frac{\partial(V_{t,x_n,1}, \varphi)}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial^2(V_{t,x_n,1}, \varphi)}{\partial x_n^2} = 0, \quad x_n > 0. \tag{15}$$

Згідно з (13) – (15) відображення $V_{t,x_n,1}$ є розв'язком задачі Неймана (4) – (6).

Міркуючи аналогічно, можна встановити, що відображення $V_{t,x_n,2}$, $t > 0$, $x_n > 0$, є розв'язком задачі Неймана

$$\frac{\partial W_{t,x_n}}{\partial t} = a^2 \triangle_{x'} W_{t,x_n}, \quad t > 0, \quad x_n > 0, \tag{16}$$

$$W_{t,x_n}\big|_{t=0} = g\dot{\mu}_2, \quad x_n > 0, \tag{17}$$

$$\left.\frac{\partial W_{t,x_n}}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = 0, \quad t > 0. \tag{18}$$

Доведемо тепер, що узагальнене випадкове відображення $V_{t,x_n,3}$, $t > 0$, $x_n > 0$, є розв'язком задачі Неймана

$$\frac{\partial W_{t,x_n}}{\partial t} = a^2 \triangle_{x'} W_{t,x_n}, \quad t > 0, \quad x_n > 0, \tag{19}$$

$$W_{t,x_n}\big|_{t=0} = 0, \quad x_n > 0, \tag{20}$$

$$\left.\frac{\partial W_{t,x_n}}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = h\dot{\mu}_3, \quad t > 0. \tag{21}$$

Для цього зауважимо, що при фіксованих $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^{n-1})$ задача Неймана для класичного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial w(y,t)}{\partial t} = a^2 \triangle_y w(y,t), \quad (y,t) \in \mathbb{R}^n_+ \times (0,\infty), \tag{22}$$

$$w(y,t)\big|_{t=0} = 0, \quad y \in \mathbb{R}^n_+, \tag{23}$$

$$\left.\frac{\partial w(y,t)}{\partial y_n}\right|_{y_n=0} = h(x',t)\varphi(y'), \quad y' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad t > 0, \tag{24}$$

має єдиний розв'язок $w_x(y,t)$ у просторі Гельдера $C^{2+\alpha}(\overline{\mathbb{R}^n_+ \times (0,\infty)}, \mathbb{R})$, і цей розв'язок записується у вигляді

$$w_x(y,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} G_1(t-\tau, y-\xi')h(x',\tau)\varphi(\xi')d\xi' =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|\eta'|^2} v(t-\tau, y_n)h(x',\tau)\varphi(y' + 2a\eta'\sqrt{t-\tau})d\eta',$$

$$(y,t) \in \mathbb{R}^n_+ \times (0,\infty),$$

де $v(t, y_n) = -\dfrac{a}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\dfrac{y_n^2}{4a^2 t}\right)$, $t > 0$, $y_n \in \mathbb{R}$. Тому аналогічно до (12)

$$\triangle_y w_x(y,t) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|\eta'|^2} v(t-\tau, y_n)h(x',\tau)(\varphi''_{11}(y' + 2a\eta'\sqrt{t-\tau}) + \ldots$$

$$\ldots + \varphi''_{n-1n-1}(y' + 2a\eta'\sqrt{t-\tau}))d\eta' +$$

$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|\eta'|^2} \frac{\partial^2 v(t-\tau, y_n)}{\partial y_n^2} h(x',\tau)\varphi(y' + 2a\eta'\sqrt{t-\tau})\, d\eta',$$

і при $y = x$ дістанемо

$$\frac{\partial r_3(x', x_n, t, \varphi)}{\partial t} = a^2 r_3(x', x_n, t, \triangle_{x'}\varphi) +$$

$$+ a^2 \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial^2 G_1(t-\tau, x-\xi')}{\partial x_n^2} h(x',\tau)\varphi(\xi')d\xi'. \tag{25}$$

Використавши теорему 2, можна переконатися, що для довільних $t > 0$, $x_n > 0$, $\varphi \in \in D(\mathbb{R}^{n-1})$ існує

$$\frac{\partial^2 (V_{t,x_n,3},\varphi)}{\partial x_n^2} = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} d\mu_3(x') \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial^2 G_1(t-\tau, x-\xi')}{\partial x_n^2} h(x',\tau)\varphi(\xi')d\xi'. \tag{26}$$

З урахуванням (25), (26) той факт, що відображення $V_{t,x_n,3}$, $t > 0$, $x_n > 0$, задовольняє умови a_1), a_2) з означення розв'язку задачі Неймана (19) – (21), перевіряється за допомогою міркувань, подібних до використаних для перевірки рівностей (13), (14). Для перевірки умови a_3) досить зауважити, що для довільних фіксованих $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $t > 0$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^{n-1})$

$$\frac{\partial r_3(x', x_n, t, \varphi)}{\partial x_n} \to h(x',t)\varphi(x'), \quad x_n \to 0+,$$

і застосувати теорему 1.

Залишилось зауважити, що сума розв'язків задач (4) – (6), (16) – (18), (19) – (21) є розв'язком задачі Неймана (1) – (3).

Теорему 3 доведено.

1. *Радченко В. Н.* Уравнение теплопроводности и волновое уравнение с общими случайными мерами // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 12. — С. 1675 – 1685.
2. *Радченко В., Городня Д.* Існування розв'язків задач Коші для хвильових рівнянь із стохастичними мірами // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Математика. Механіка. — 2011. — **25**. — С. 29 – 32.
3. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения глазами физика. — М.: Физматлит, 2001. — 528 с.
4. *Sturm A.* On convergence of population prosesses in random enviroments to the stochastic heat equation with colored noise // Electron. J. Probab. — 2003. — **8**, № 6. — P. 1 – 39.
5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981. — 512 с.
6. *Радченко В. Н.* Интегралы по общим случайным мерам // Труды Ин-та математики НАН Украины, 1999. — 196 с.
7. *Ивасишен С. Д.* Линейные параболические граничные задачи. — Киев: Вища шк., 1987. — 72 с.

Одержано 25.09.14