УДК 517.956

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И ПУАНКАРЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ ГЕЛЛЕРСТЕДТА

С. А. Алдашев

Казах. нац. пед. ун-т им. Абая
Казахстан, 050012, Алматы, ул. Толеби, 86
e-mail: aldash51@mail.ru

We prove that Dirichlet and Poincare problems in a cylindrical domain for degenerate many dimensional hyperbolic equations with Gellerstedt operator have unique solutions. We find a criterion for uniqueness of regular solutions of these problems.

Показано, що задачі Діріхле та Пуанкаре в циліндричній області для вироджуваних багатовимірних гіперболічних рівнянь з оператором Геллерстедта мають єдиний розв'язок. Встановлено критерій єдиності регулярних розв'язків цих задач.

В [1] было показано, что на плоскости одна из фундаментальных задач математической физики — изучение поведения колеблющейся струны — некорректна в случае, когда краевые условия заданы на всей границе области. Как отмечено в [2, 3], задача Дирихле некорректна не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений. В [4] показано, что решение задачи Дирихле существует в прямоугольных областях. В дальнейшем эта задача исследовалась методами функционального анализа [5], применение которых в приложениях затруднено.

В пространстве [6, 7] получены теоремы единственности решения задачи Дирихле для строго гиперболических уравнений, а в [8, 9] доказана корректность задачи Дирихле и Пуанкаре для многомерного волнового уравнения.

Насколько известно автору, многомерные задачи Дирихле и Пуанкаре для вырождающихся гиперболических уравнений исследованы мало [10].

1. Постановка задач и результат. Пусть D_β — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \beta > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через Γ_β, S_β и S_0 соответственно.

В области D_β рассмотрим взаимно сопряженные вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения с оператором Геллерстедта

$$Lu \equiv t^p \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0, \tag{1}$$

$$L^* \upsilon \equiv t^p \Delta_x \upsilon - \upsilon_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i \upsilon_{x_i} - b \upsilon_t + d\upsilon = 0, \tag{1*}$$

где $p = \mathrm{const} > 0$, Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \geq 2$, а $d(x,t) = c - \sum_{i=1}^{m} a_{ix_i} - b_t$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, \ldots, m-1$.

В качестве многомерных задач Дирихле и Пуанкаре рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области D_β из класса $C^1(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S_\beta} = \varphi(r,\theta), \quad u|_{\Gamma_\beta} = \psi(t,\theta), \quad u|_{S_0} = \tau(r,\theta) \tag{2}$$

или

$$u|_{S_\beta} = \varphi(r,\theta), \quad u|_{\Gamma_\beta} = \psi(t,\theta), \quad u|_{S_0} = \nu(r,\theta), \tag{3}$$

при этом $\varphi(1,\theta) = \psi_1(\beta,\theta), \varphi(0,\theta) = \tau(1,\theta)$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S_0)$, $l = 0, 1, \ldots,$ — пространства Соболева.

Имеет место следующая лемма [11].

Лемма 1. *Пусть функция $f(r,\theta)$ принадлежит $W_2^l(S_0)$. Если $l \geq m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. *Для того чтобы функция $f(r,\theta)$ принадлежала $W_2^l(S_0)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам*

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = \mathrm{const}.$$

Через $\tilde{a}_{in}^k(r,t)$, $a_{in}^k(r,t)$, $\tilde{b}_n^k(r,t)$, $\tilde{c}_n^k(r,t)$, $\tilde{d}_n^k(r,t)$, ρ_n^k, $\bar{\varphi}_n^k(r)$, $\psi_n^k(t)$, $\bar{\tau}_n^k(r)$, $\bar{\nu}_n^k(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4) соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i \dfrac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, \ldots, m$, $\varphi(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, H — единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(r,\theta,t), b(r,\theta,t), c(r,\theta,t) \in W_2^l(D_\beta) \subset C(\overline{D}_\beta)$, $l \geq m+1$, $i = 1, \ldots, m$.

Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если $\varphi(r,\theta) \in W_2^p(S_\beta)$, $\psi(t,\theta) \in W_2^p(\Gamma_\beta)$, $\tau(r,\theta), \nu(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$, $p \geq \dfrac{3m}{2}$, и выполняется условие*

$$\cos \mu_{s,n}\beta' \neq 0, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

то задача 1 имеет единственное решение, где $\mu_{s,n}$ — *положительные нули функций Бесселя первого рода* $J_{n+\frac{m-2}{2}}(z)$, $\beta' = \dfrac{2}{2+p}\beta^{\frac{2+p}{2}}$.

Теорема 2. *Решение задачи 1 единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие (5).*

Отметим, что эти теоремы для многомерного уранения Геллерстедта получены в [10].

2. Разрешимость задачи 1. В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$Lu \equiv t^p\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{\delta u}{r^2}\right) - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} + b(r,\theta,t)u_t + c(r,\theta,t)u = 0, \quad (6)$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right), \;\; g_1 = 1, \;\; g_j = (\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{j-1})^2, \;\; j > 1.$$

Известно [11], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Решение задачи 1 будем искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \quad (7)$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставив (7) в (6), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H, для $\bar{u}_n^k$ получим [12, 13]

$$t^p\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r}t^p\rho_0^1 + \sum_{i=0}^{m}a_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1 + \widetilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1 + \widetilde{c}_0^1\bar{u}_0^1 +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{t^p\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r}t^p\rho_n^k + \sum_{i=1}^{m}a_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k + \widetilde{b}_n^k\bar{u}_{nt}^k + \right.$$

$$\left. + \left[\widetilde{c}_n^k - \lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}t^p + \sum_{i=1}^{m}(\widetilde{a}_{in-1}^k - na_{in}^k)\right]\bar{u}_n^k\right\} = 0. \quad (8)$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$t^p\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r}t^p\rho_0^1\bar{u}_{0r}^1 = 0, \quad (9)$$

$$t^p\rho_1^k\bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k\bar{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r}t^p\rho_1^k\bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2}t^p\rho_1^k\bar{u}_1^k =$$

$$= -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{i0}^1\bar{u}_{0r}^1 + \widetilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1 + \widetilde{c}_0^1\bar{u}_0^1\right), \quad n = 1, \quad k = \overline{1, k_1}, \quad (10)$$

$$t^p \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} t^p \rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} t^p \rho_n^k \bar{u}_n^k =$$

$$= -\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \widetilde{b}_{n-1}^k \bar{u}_{n-1t}^k + \right.$$

$$\left. + \left[\widetilde{c}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^{m} (\widetilde{a}_{in-2}^k - (n-1) a_{in-1}^k) \right] \bar{u}_{n-1}^k \right\}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3, \ldots . \tag{11}$$

Просуммировав уравнение (10) от 1 до k_1, уравнение (11) от 1 до k_n, а затем сложив полученные выражения вместе с (9), приходим к уравнению (8). Отсюда следует, что если $\{\bar{u}_n^k\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots,$ — решение системы (9) – (11), то оно является решением уравнения (8).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (9) – (11) можно представить в виде

$$t^p \left(\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k \right) - \bar{u}_{ntt}^k = f_n^k(r, t), \tag{12}$$

где $f_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0^1(r,t) \equiv 0$.

Далее, из краевых условий (2) и (3) в силу (7) с учетом леммы 1 будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r, \beta) = \bar{\varphi}_n^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1, t) = \psi_n^k(t), \quad \bar{u}_n^k(r, 0) = \bar{\tau}_n^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{13}$$

$$\bar{u}_n^k(r, \beta) = \bar{\varphi}_n^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1, t) = \psi_n^k(t), \quad \bar{u}_{nt}^k(r, 0) = \bar{\nu}_n^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{14}$$

Выполнив замену $\bar{u}_n^k(r,t) = r^{\frac{1-m}{2}} u_n^k(r,t)$ и положив затем $r = r$, $x_0 = \dfrac{2}{2+p} t^{\frac{2+p}{2}}$, задачи (12), (13) и (12), (14) сведем к следующим задачам:

$$L_\alpha \upsilon_{\alpha,n}^k \equiv \upsilon_{\alpha,nrr}^k - \upsilon_{\alpha,nx_0x_0}^k - \frac{\alpha}{x_0} \upsilon_{\alpha,nx_0}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} \upsilon_{\alpha,n}^k = f_{\alpha,n}^k(r, x_0), \tag{15_α}$$

$$\upsilon_{\alpha,n}^k(r, \beta') = \varphi_n^k(r), \quad \upsilon_{\alpha,n}^k(1, x_0) = \psi_n^k(x_0), \quad \upsilon_{\alpha,n}^k(r, 0) = \tau_n^k(r), \tag{16}$$

$$\upsilon_{\alpha,n}^k(r, \beta') = \varphi_n^k(r), \quad \upsilon_{\alpha,n}^k(1, x_0) = \psi_n^k(x_0), \quad \lim_{x_0 \to 0} x_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x_0} \upsilon_{\alpha,n}^k = \nu_n^k(r), \tag{17}$$

где

$$0 < \alpha = \frac{p}{2+p} < 1, \quad \bar{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m) - 4\lambda_n}{4},$$

$$\upsilon_{\alpha,n}^k(r, x_0) = u_n^k \left[r, \left(\frac{x_0}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \right],$$

$$f_{\alpha,n}^k(r,x_0) = r^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{-2\alpha} f_n^k\left[r, \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right],$$

$$\varphi_n^k(r) = r^{\frac{m-1}{2}} \bar{\varphi}_n^k(r), \quad \psi_n^k(x_0) = \psi_n^k\left[\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right],$$

$$\tau_n^k(r) = r^{\frac{m-1}{2}} \bar{\tau}_n^k(r), \quad \nu_n^k(r) = r^{\frac{m-1}{2}} \bar{\nu}_n^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1 \ldots .$$

Наряду с уравнением (15_α) рассмотрим уравнение

$$L_0 \upsilon_{0,n}^k \equiv \upsilon_{0,nrr}^k - \upsilon_{0,nx_0x_0}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_{0,n}^k = f_{0,n}^k(r,x_0). \tag{15_0}$$

Как доказано в [12, 13] (см. также [14]), существует следующая функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (15_α) и (15_0).

Утверждение 1. *Если $\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$ — решение задачи Коши для уравнения (15_0), удовлетворяющее условиям*

$$\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,0) = \tau_n^k(r), \quad \frac{\partial}{\partial x_0}\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,0) = 0, \tag{18}$$

то функция

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0) = \gamma_\alpha \int\limits_0^1 \upsilon_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}d\xi \equiv 2^{-1}\gamma_\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) x_0^{1-\alpha} D_{0x_0^2}^{-\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0^2}\right] \tag{19}$$

при $\alpha > 0$ является решением уравнения (15_α) с условиями (18).

Утверждение 2. *Если $\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$ — решение задачи Коши для уравнения (15_0), удовлетворяющее условиям*

$$\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,0) = \frac{\nu_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)\ldots(2q+1-\alpha)}, \quad \frac{\partial}{\partial x_0}\,\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,0) = 0, \tag{20}$$

то при $0 < \alpha < 1$ функция

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0) = \gamma_{2-k+2q}\left(\frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^q \left[x_0^{1-\alpha+2q}\int\limits_0^1 \upsilon_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}}d\xi\right] \equiv$$

$$\equiv \gamma_{2-k+2q} 2^{q-1}\Gamma\left(q - \frac{\alpha}{2} + 1\right) D_{0x_0^2}^{\frac{\alpha}{2}-1}\left[\frac{\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0}\right] \tag{21}$$

является решением уравнения (15_α) с начальными условиями

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,0) = 0, \quad \lim_{x_0 \to 0} x_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x_0}\upsilon_{\alpha,n}^{k,2} = \nu_n^k(r), \tag{22}$$

где $\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_\alpha = 2\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$, $\Gamma(z)$ *— гамма-функция,* D_{0t}^{α} *— оператор Римана–Лиувилля [15], а* $q \geq 0$ *— наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству* $2 - \alpha + 2q \geq \geq m - 1$.

При этом функции $f_{\alpha,n}^{k}(r, x_0)$, $f_{0,n}^{k}(r, x_0)$ *связаны формулами (19) в случае утверждения 1 и формулами (21) в случае утверждения 2.*

Решение задачи (15_α), (16) будем искать в виде

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k}(r, x_0) = \upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r, x_0) + \upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r, x_0), \tag{23}$$

где $\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r, x_0)$ — решение задачи Коши (15_α), (18), а $\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r, x_0)$ — решение краевой задачи для уравнения

$$L_\alpha \upsilon_{\alpha,n}^{k,2} = 0 \tag{24_α}$$

с условиями

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r, \beta') = \varphi_n^k(r) - \upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r, \beta'), \quad \upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(1, x_0) = \psi_n^k(x_0) - \upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(1, x_0), \quad \upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r, 0) = 0. \tag{25}$$

Учитывая формулы (19), (21), а также обратимость оператора D_{0t}^{α} [15], задачи (15_α), (18) и (24_α), (25) соответственно сводим к задаче Коши (15_0), (18), имеющей единственное решение [12, 13], и к задаче для уравнения

$$L_0 \upsilon_{0,n}^{k,1} = 0 \tag{24_0}$$

с условиями

$$\upsilon_{0,n}^{k,1}(r, \beta') = \varphi_{1n}^k(r), \quad \upsilon_{0,n}^{k,1}(1, x_0) = \psi_{1n}^k(x_0), \quad \frac{\partial}{\partial x_0}\upsilon_{0,n}^{k,1}(r, 0) = 0, \tag{26}$$

где $\varphi_{1n}^k(r)$, $\psi_{1n}^k(x_0)$ — функции, вырождающиеся соответственно через $\varphi_n^k(r)$, $\tau_n^k(r)$ и $\psi_n^k(x_0)$, $\tau_n^k(r)$.

В [9] показано, что если выполняется условие (5), то задача (24_0), (26) однозначно разрешима.

Далее, используя утверждения 1 и 2, устанавливаем однозначную разрешимость задач (15_α), (18) и (24_α), (25).

Теперь будем решать задачу (15_α), (17) в виде (23), где $\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r, x_0)$ — решение задачи (15_α), (22), а $\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r, x_0)$ — решение задачи (24_α) с условиями

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r, \beta') = \varphi_n^k(r) - \upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r, \beta'), \quad \upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(1, x_0) = \psi_n^k(x_0) - \upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(1, x_0), \quad \frac{\partial}{\partial x_0}\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r, 0) = 0. \tag{27}$$

Использовав формулы (21), (19), задачи (15_α), (22) и (24_α), (27) соответственно сведем к задаче Коши (15_0), (20) и к задаче (24_0), (26), где $\varphi_{1n}^k(r)$, $\psi_{1n}^k(x_0)$ — функции, теперь вырождающиеся соответственно через $\varphi_n^k(r)$, $\nu_n^k(r)$ и $\psi_n^k(x_0)$, $\nu_n^k(r)$.

Таким образом, задача (15_α), (17) также имеет единственное решение.

Следовательно, сначала решив задачу (9), (13) $(n = 0)$, а затем (10), (13) $(n = 1)$ и т. д., найдем последовательно все $\upsilon^k_{\alpha,n}(r,x_0)$ из (23), где $\upsilon^{k,1}_{\alpha,n}(r,x_0)$, $\upsilon^{k,2}_{\alpha,n}(r,x_0)$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1,\ldots$, находятся из двумерных задач.

Итак, в области D_β

$$\int\limits_H \rho(\theta) Lu dH = 0. \tag{28}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0, V_0$ плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1, V_1$ плотна в $L_2((0,\beta))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in V, V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ плотна в $L_2(D_\beta)$ [16].

Отсюда и из (28) следует, что

$$\int\limits_{D_\beta} f(r,\theta,t) Lu dD_\beta = 0, \quad Lu = 0 \quad \forall (r,\theta,t) \in D_\beta.$$

Таким образом, решением задачи 1 является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{1-m}{2}} u^k_n(r,t) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{29}$$

где $u^k_n(r,t)$ находятся из (15_α), (16) в случае задачи (1), (2) и из (15_α), (17) в случае задачи (1), (3).

Учитывая следующие свойства нулей функций Бесселя [17]:

1^0) если $\mu_{\nu,1}, \mu_{\nu,2}, \ldots$ — положительные нули функций $J_\nu(z)$, упорядоченные по возрастанию значений, то

$$0 < \mu_{\nu,1} < \mu_{\nu+1,1} < \mu_{\nu,2} < \mu_{\nu+1,2} < \mu_{\nu,3} < \ldots, \quad \nu > -1;$$

2^0) пусть μ_ν, μ'_ν, μ''_ν являются наименьшими положительными нулями функций $J_\nu(z)$, $J'_\nu(z)$, $J''_\nu(z)$ соответственно, тогда

$$\sqrt{\nu(\nu+2)} < \mu_\nu < \sqrt{2(\nu+1)(\nu+3)}, \quad \nu > 0,$$

$$\sqrt{\nu(\nu+2)} < \mu'_\nu < \sqrt{2\nu(\nu+1)}, \quad \nu > 0,$$

$$\sqrt{\nu(\nu-1)} < \mu''_\nu < \sqrt{(\nu^2-1)}, \quad \nu > 1,$$

формулы [17, 18]

$$\sin z = z\left(1 - z\sum_{n=1}^{\infty}(4n^2-1)^{-1}[J_n(nz)]^2\right),$$

$$2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z), J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \quad \nu \geq 0, \tag{30}$$

и оценки [11]

$$|k_n| \le c_1 n^{m-2}, \quad \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta)\right| \le c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad q = 0, 1, \ldots,$$

а также леммы, ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\varphi(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, как в [8, 9], можно показать, что полученное решение (29) принадлежит искомому классу $C^1(\bar{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$.

Следовательно, разрешимость задачи 1 установлена.

3. Единственность решения задачи 1. Сначала рассмотрим задачу (1), (2) и докажем единственность ее решения. Для этого построим решение задачи Дирихле для уравнения (1*) с условиями

$$\upsilon|_{S_\beta \cup \Gamma_\beta} = 0, \quad \upsilon|_{S_0} = \tau(r,\theta) = \bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{31}$$

где $\bar{\tau}_n^k(r) \in V$, V — множество функций $\tau(r)$ из класса $C^1([0,1]) \cap C^2((0,1))$. Множество V плотно всюду в $L_2((0,1))$ [16]. Решение задачи (1*), (31) будем искать в виде (7), где функции $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)$ будут определены ниже. Тогда, как и в п. 2, функции $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)$ удовлетворяют системе уравнений (9)–(11), где $\tilde{a}_{in}^k$, a_{in}^k, $\tilde{b}_n^k$ заменены соответственно на $-\tilde{a}_{in}^k$, $-a_{in}^k$, $-\tilde{b}_n^k$, а $\tilde{c}_n^k$ — на $\tilde{d}_n^k$, $i = 1, \ldots, m$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$.

Далее, из краевого условия (31) в силу (7) получим

$$\bar{\upsilon}_n^k(r,\beta) = \bar{\upsilon}_n^k(1,t) = 0, \quad \bar{\upsilon}_n^k(r,0) = \bar{\tau}_n^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{32}$$

Как ранее отмечено, каждое уравнение системы (9)–(11) представимо в виде (12). В п. 2 показано, что задача (12), (32) имеет единственное решение.

Таким образом, решение задачи (1*), (31) в виде ряда (29), которое в силу оценок (30) принадлежит классу $C^1(\bar{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, построено.

Из определения сопряженных операторов L, L^* [19] имеем

$$\upsilon L u - u L^* \upsilon = -\upsilon P(u) + u P(\upsilon) - u\upsilon Q,$$

где

$$P(u) = t^p \sum_{i=1}^m u_{x_i} \cos\left(N^\perp, x_i\right) - u_t \cos\left(N^\perp, t\right), \quad Q = \sum_{i=1}^m a_i \cos\left(N^\perp, x_i\right) - b\cos\left(N^\perp, t\right),$$

а $N^\perp$ — внутренняя нормаль к границе ∂D_β, а по формуле Грина находим

$$\int\limits_{D_\beta} (\upsilon L u - u L^* \upsilon)\, dD_\beta = \int\limits_{\partial D_\beta} \left[\left(\upsilon \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial \upsilon}{\partial N}\right) M + u\upsilon Q\right] ds, \tag{33}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial N} = t^p \sum_{i=1}^m \cos\left(N^\perp, x_i\right) \frac{\partial}{\partial x_i} - \cos\left(N^\perp, t\right) \frac{\partial}{\partial t}, \quad M^2 = t^{2p} \sum_{i=1}^m \cos^2\left(N^\perp, x_i\right) + \cos^2\left(N^\perp, t\right).$$

Из (33) с учетом однородных граничных условий (2) получим

$$\int_{S_0} \tau(r,\theta) u_t(r,\theta,0) ds = 0. \tag{34}$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\{\bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна в $L_2(S_0)$ [16], из (34) заключаем, что $u_t(r,\theta,0) = 0 \ \forall (r,\theta) \in S_0$.

Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши: $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$ для уравнения (1) [19] имеем $u(x,t) = 0 \ \forall (x,t) \in D_\beta$.

Таким образом, единственность решения задачи (1), (2) доказана. Ее справедливость для задачи (1), (3) показывается аналогично, если $b(r,\theta,0) = 0 \ \forall (r,\theta) \in S_0$.

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Если выполняется условие (5), то из теоремы 1 следует, что решение задачи 1 единственно.

Пусть теперь условие (5) не выполняется хотя бы для одного $s = l$. В этом случае в [20] показано, что нетривиальным решением однородной задачи, соответствующей задаче (15_0), (26), является функция

$$\mu_{l,n} \upsilon_{0,n}^{k,1}(r,x_0) = \sqrt{r} \left[\cos \mu_{l,n} x_0 + (\cos \mu_{l,n} x_0) \int_0^{x_0} a_{l,n}(\xi) \sin \mu_{l,n} \xi d\xi - \right.$$

$$\left. - (\sin \mu_{l,n} x_0) \int_0^{x_0} a_{l,n}(\xi) \cos \mu_{l,n} \xi d\xi \right] J_\nu(\mu_{l,n} r), \tag{35}$$

где

$$a_{l,n}(x_0) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{l,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} f_{0,n}^k(\xi,x_0) J_\nu(\mu_{l,n}\xi) d\xi, \quad \nu = n + \frac{m-2}{2}.$$

Далее, из (19), (21), (35) следует, что однородные задачи (15_α), (16) и (15_α), (17) имеют решения вида

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0) = \gamma_\alpha \int_0^1 \upsilon_{0,n}^{k,1}(r,\xi,x_0)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} d\xi$$

и

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0) = \gamma_{2-k+2q} \left(\frac{1}{x_0} \frac{\partial}{\partial x_0} \right)^q \left[x_0^{1-\alpha+2q} \int_0^1 \upsilon_{0,n}^{k,2}(r,\xi,x_0)(1-\xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}} d\xi \right].$$

Следовательно, нетривиальным решением однородной задачи, соответствующей задаче 1, является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-l} r^{\frac{1-m}{2}} u_{jn}^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta),$$

где $u_{1n}^k(r,t) = \upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)$ в случае задачи (1), (2), $u_{2n}^k(r,t) = \upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)$ в случае задачи (1), (3), при этом из оценок (30) следует, что она принадлежит искомому классу, если $l > \dfrac{3m}{2}$.

Теорема 2 доказана.

1. *Hadamard J.* Sur les problemes aux derivees partielles et leur signification physique // Princeton Univ. Bull. — 1902. — **13**. — P. 49–52.
2. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. — 164 с.
3. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнения в частных производных. — М.: Наука, 2006. — 287 с.
4. *Bourgin D. G., Duffin R.* The Dirichlet problem the vibrating string equation // Bull. Amer. Math. Soc. — 1939. — **45**. — P. 851–858.
5. *Fox D. W., Pucci C.* The Dirichlet problem the wave equation // Ann. mat. pura ed appl. — 1958. — **46**. — P. 155–182.
6. *Нахушев А. М.* Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Дифференц. уравнения. — 1970. — **6**, № 1. — С. 190–191.
7. *Dunninger D. R., Zachmanoglou E. C.* The condition for uniqueness of the Dirichlet problem for hyperbolic equations in cylindrical domains // J. Math. and Mech. — 1969. — **18**, № 8.
8. *Aldashev S. A.* The well-posedness of the Dirichlet problem in the cylindric domain for the multidimensional wave equation // Math. Probl. Eng. — 2010. — **2010.** — Article ID 653215. — 7 p.
9. *Aldashev S. A.* The well-posedness of the Poincare problem in a cylindrical domain for the higher-dimensional wave equation // J. Math. Sci. — 2011. — **173**, № 2. — P. 150–154.
10. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Геллерстедта // Укр. мат. журн. — 2012. — **64**, № 3. — С. 426–432.
11. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. — М.: Физматгиз, 1962. — 254 с.
12. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. — Алматы: Гылым, 1994. — 170 с.
13. *Алдашев С. А.* Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. — Орал: ЗКАТУ, 2007. — 139 с.
14. *Терсенов С. А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. — Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1973. — 94 с.
15. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1985. — 301 с.
16. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 543 с.
17. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1974. — Т. 2. — 295 с.
18. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. — 724 с.
19. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. — М.: Наука, 1981. — Т. 4. — 550 с.
20. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором // Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. академии наук. — 2011. — **13**, № 1. — С. 21–29.

Получено 04.09.13