УДК 517.9

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Н. В. Шарай, В. Н. Шинкаренко

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова
Украина, 65000, Одесса, ул. Дворянская, 2

We study asymptotic behavior of solutions for a certain class nonlinear nonautonomous third order differential equations.

Досліджується асимптотична поведінка розв'язків одного класу нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь третього порядку.

Введение. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{'''} = \alpha_0 p(t)|y|^{\lambda} L(y), \tag{1.1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $\lambda \in R$, $\lambda \neq 1$, $p : [a, \omega) \to (0, +\infty)$ — непрерывная функция, $\infty < a < < \omega \leq +\infty$, функция L непрерывна в односторонней окрестности Δ_{Y_0} точки Y_0 (Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$), положительна и является медленно меняющейся при $y \to Y_0$.

В работах [3, 4] исследован вопрос о существовании и асимптотическом поведении при $t \to \omega$ всех так называемых $P_w(\lambda_0)$-решений этого уравнения.

Решение y уравнения (1.1), заданное на промежутке $[t_y, w) \subset [a, w)$, называется $P_w(\lambda_0)$-решением, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{t \to w} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & \pm\infty, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \quad \lim_{t \to w} \frac{[y^{''}(t)]^2}{y^{'''}(t) y^{'}(t)} = \lambda_0. \tag{1.2}$$

Случай $\lambda = 1$ не охватывается результатами этих работ, так как методика исследования уравнения (1.1) предполагала наличие существенной нелинейности. При $\lambda = 1$ уравнение (1.1) является асимптотически близким (при $y \to Y_0$) к линейному уравнению

$$y^{'''} = \alpha_0 p(t) y \tag{1.3}$$

и поэтому представляет несомненный теоретический интерес.

В настоящей работе рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{'''} = \alpha_0 p(t) y |\ln |y||^{\sigma}, \tag{1.4}$$

где $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p : [a, \omega) \to (0, +\infty)$ — непрерывная функция, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\infty < a < \omega \leq +\infty$. В данном уравнении $L(y) = |\ln |y||^{\sigma}$ является медленно меняющейся функцией как при $y \to 0$, так и при $y \to \pm\infty$.

Введем необходимые для дальнейшего обозначения, полагая

$$\pi_w(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad w = +\infty, \\ t - w, & \text{если} \quad w < +\infty, \end{cases} \qquad I_A(t) = \int\limits_A^t \pi_w^2(\tau)p(\tau)d\tau,$$

где A принадлежит $\{w; a\}$ и выбирается таким образом, чтобы $I_A(t)$ стремился либо к нулю, либо к $+\infty$ при $t \to w$.

В работе [5] для уравнения (1.4) была доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть $\sigma \neq 1$. Тогда для существования $P_w(\lambda_0)$-решений, $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; 1; \frac{1}{2}\right\}$, уравнения (1.4) необходимо, а если*

$$\lambda_0 \neq \frac{-(2+\sigma) \pm \sqrt{(2+\sigma)^2 + 8}}{4}, \quad \lambda_0 \neq \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2},$$
$$\lambda_0 \neq \frac{-(2-\sigma) \pm \sqrt{(2-\sigma)^2 + 8}}{4}, \tag{1.5}$$

то и достаточно, чтобы

$$\lim_{t \to w} \frac{p(t)\pi_w^3(t)}{\left|\frac{(1-\sigma)(1-\lambda_0)^2}{\lambda_0} I_A(t)\right|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}} = \alpha_0 \frac{|\lambda_0||2\lambda_0 - 1|}{|\lambda_0 - 1|^3} \tag{1.6}$$

и было выполнено неравенство

$$\alpha_0\lambda_0(2\lambda_0 - 1)(\lambda_0 - 1)\pi_w(t) > 0. \tag{1.7}$$

Более того, для каждого такого решения при $t \to w$ имеют место асимптотические представления

$$\ln|y(t)| = \nu \left|(1-\sigma)\frac{(\lambda_0 - 1)^2}{\lambda_0} I_A(t)\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} (1 + o(1)),$$
$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{2\lambda_0 - 1}{(\lambda_0 - 1)\pi_w(t)}(1 + o(1)), \tag{1.8}$$
$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)\pi_w(t)}(1 + o(1)),$$

где

$$\nu = \operatorname{sign}(\alpha_0\lambda_0(1-\sigma)I_A(t)). \tag{1.9}$$

Замечание 1.1. В силу условия (1.6) и первой из асимптотических формул (1.8)

$$\lim_{t\to\omega}\left|\frac{(1-\sigma)(1-\lambda_0)^2}{\lambda_0}\,I_A(t)\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} = +\infty. \tag{1.10}$$

Из теоремы 1.1 при $\sigma = 0$, т. е. для линейного дифференциального уравнения (1.3), непосредственно вытекает такое следствие.

Следствие 1.1. *Для существования $P_w(\lambda_0)$-решений, $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\left\{0;1;\dfrac{1}{2}\right\}$, уравнения (1.3) необходимо, а если $\lambda_0 \neq \dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$, то и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\alpha_0\lambda_0(2\lambda_0-1)(\lambda_0-1)\pi_w(t) > 0, \quad \lim_{t\to w} p(t)\pi_w^3(t) = \alpha_0\frac{|\lambda_0||2\lambda_0-1|}{|\lambda_0-1|^3}. \tag{1.11}$$

Более того, для каждого такого решения при $t \to w$ имеют место асимптотические представления

$$\ln|y(t)| = \nu\frac{(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0}\,I_A(t)(1+o(1)),$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{2\lambda_0-1}{(\lambda_0-1)\pi_w(t)}\,(1+o(1)),$$

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)\pi_w(t)}\,(1+o(1)),$$

где $\nu = \operatorname{sign}(\alpha_0\lambda_0 I_A(t))$.

Однако эти теоремы не дают точных асимптотических формул для $P_w(\lambda_0)$-решений.

Целью настоящей работы является установление условий, при которых уравнение (1.4) имеет решения указанного вида и асимптотические представления (1.8) могут быть записаны в явном виде.

Основные результаты. Для доказательства основных теорем нам потребуются два вспомогательных утверждения, вытекающие из работы [2], для системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dz_i}{d\tau} = f_i(\tau) + \sum_{j=1}^{3} p_{ij}(\tau)z_j + g_i(\tau)Z_i(\tau, z_1, z_2, z_3), \quad i = \overline{1,3}, \tag{2.1}$$

где $f_i, g_i : [\tau_0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $p_{ij} : [\tau_0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1,3}$, $Z_i : [\tau_0, +\infty) \times \mathbb{R}_b^3 \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,3}$, — непрерывные функции, $\mathbb{R}_b^3 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 : |z_i| \le b, b > 0\}$.

Для этой системы уравнений в силу теоремы 1.1 и замечания из работы [2] имеют место следующие утверждения.

Лемма 2.1. *Пусть*

$$p_{ii}(\tau) \neq 0 \quad \textit{при} \quad \tau \geq \tau_0, \quad \int\limits_{\tau_0}^{+\infty} |p_{ii}(\tau)| d\tau = +\infty, \quad i = \overline{1,3}, \tag{2.2}$$

и выполняются условия

$$\lim_{\tau\to+\infty} \frac{f_i(\tau)}{p_{ii}(\tau)} = 0, \quad \lim_{\tau\to+\infty} \frac{g_i(\tau)}{p_{ii}(\tau)} = \text{const}, \quad i = \overline{1,3}, \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} \lim_{\tau\to+\infty} \frac{p_{1i}(\tau)}{p_{11}(\tau)} = \text{const}, \quad i = 2,3, \quad \lim_{\tau\to+\infty} \frac{p_{21}(\tau)}{p_{22}(\tau)} = 0, \\ \lim_{\tau\to+\infty} \frac{p_{23}(\tau)}{p_{22}(\tau)} = \text{const}, \quad \lim_{\tau\to+\infty} \frac{p_{3i}(\tau)}{p_{33}(\tau)} = 0, \quad i = 1,2. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Пусть, кроме того,

$$\lim_{|z_1|+|z_2|+|z_3|\to 0} \frac{\partial Z_i(\tau, z_1, z_2, z_3)}{\partial z_k} = 0, \quad i,k = \overline{1,3}, \tag{2.5}$$

равномерно по $\tau \in [\tau_0, +\infty)$.

Тогда система дифференциальных уравнений (2.1) имеет хотя бы одно решение $(z_i)_{i=1}^3 : [\tau_1, +\infty) \to \mathbb{R}_b^3$, $\tau_1 \in [\tau_0, +\infty)$, *стремящееся к нулю при* $\tau \to +\infty$.

Лемма 2.2. *Пусть при* $i \neq 1$ *выполняются условия (2.2), (2.3). Пусть, кроме того,*

$$\begin{gathered} \lim_{\tau\to+\infty} \frac{p_{2i}(\tau)}{p_{22}(\tau)} = 0, \quad i = 1,3, \quad \lim_{\tau\to+\infty} \frac{p_{3i}(\tau)}{p_{33}(\tau)} = 0, \quad i = 1,2, \\ \int\limits_{\tau_0}^{+\infty} |p_{1k}(\tau)| d\tau < \infty, \quad k = \overline{1,3}, \quad \int\limits_{\tau_0}^{+\infty} |f_1(\tau)| d\tau < \infty, \quad \int\limits_{\tau_0}^{+\infty} |g_1(\tau)| d\tau < \infty \end{gathered} \tag{2.6}$$

и выполняются условия (2.5). Тогда система дифференциальных уравнений (2.1) имеет хотя бы одно решение $(z_i)_{i=1}^3 : [\tau_1, +\infty) \to \mathbb{R}_b^3$, $\tau_1 \in [\tau_0, +\infty)$, *стремящееся к нулю при* $\tau \to +\infty$.

Используя эти леммы, для уравнения (1.4) докажем справедливость следующих утверждений.

Теорема 2.1. *Пусть* $\sigma(1-\sigma) \neq 0$ *и выполняются условия (1.6). Пусть, кроме того,* $\lambda_0 \neq -1 \pm \sqrt{3}$ *и функции*

$$h_1(t) = \frac{p(t)\pi_\omega^3(t)}{\left|\frac{(1-\sigma)(1-\lambda_0)^2}{\lambda_0} I_A(t)\right|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}} - \frac{\alpha_0|\lambda_0||2\lambda_0 - 1|}{|\lambda_0 - 1|^3},$$

$$h_2(t) = \left|(1-\sigma)\frac{(\lambda_0 - 1)^2}{\lambda_0} I_A(t)\right|^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

таковы, что

$$\lim_{t\to\omega}\frac{h_1(t)}{h_2(t)} = 0. \tag{2.7}$$

Тогда дифференциальное уравнение (1.4) имеет $P_w(\lambda_0)$-решение, допускающее при $t \to \to w$ асимптотические представления

$$\begin{aligned} y(t) &= (\pm 1 + o(1)) e^{\nu |(1-\sigma)\frac{(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0} I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}}, \\ y^{'}(t) &= \frac{2\lambda_0 - 1}{(\lambda_0-1)\pi_w(t)}(\pm 1 + o(1)) e^{\nu |(1-\sigma)\frac{(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0} I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}}, \\ y^{''}(t) &= \frac{\lambda_0(2\lambda_0 - 1)}{(\lambda_0-1)^2\pi_w^2(t)}(\pm 1 + o(1)) e^{\nu |(1-\sigma)\frac{(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0} I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Доказательство. Выбрав число $c \in \{-1, 1\}$, уравнение (1.4) с помощью преобразований

$$\begin{aligned} y(t) &= (c + v_1(\tau)) e^{\nu |(1-\sigma)\frac{(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0} I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}}, \\ y^{'}(t) &= \frac{2\lambda_0 - 1}{(\lambda_0-1)\pi_w(t)}(c + v_2(\tau)) e^{\nu |(1-\sigma)\frac{(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0} I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}}, \\ y^{''}(t) &= \frac{\lambda_0(2\lambda_0 - 1)}{(\lambda_0-1)^2\pi_w^2(t)}(c + v_3(\tau)) e^{\nu |(1-\sigma)\frac{(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0} I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где

$$\tau = \beta \ln|\pi_w(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad w = +\infty, \\ -1 & \text{при} \quad w < +\infty, \end{cases}$$

сведем к системе дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} v_1^{'} &= \frac{\beta(2\lambda_0-1)}{\lambda_0 - 1}\left[-c\delta_1(\tau) + v_2 - (1+\delta_1(\tau))v_1\right], \\ v_2^{'} &= \frac{\beta}{\lambda_0-1}\left(\lambda_0(c+v_3) - (c+v_2)(\lambda_0 + (2\lambda_0-1))\delta_1(\tau)\right), \\ v_3^{'} &= \frac{\beta}{\lambda_0-1}\left(R(\tau, v_1)(c+v_1) - (c+v_3)(1 + (2\lambda_0-1)\delta_1(\tau))\right), \end{aligned} \tag{2.10}$$

в которой

$$\delta_1(\tau) = \frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0-1)}h_1(t), \quad \delta_2(\tau) = \nu h_2(t),$$

$$R(\tau, v_1) = (1+\delta_1(\tau))\left|1 + \delta_2(\tau)\ln\left|1 + \frac{v_1}{c}\right|\right|^{\sigma}.$$

Здесь $\tau(t) = \beta \ln |\pi_\omega(t)| \to +\infty$ при $t \to \omega$ и $\tau'(t) = \dfrac{\beta}{\pi_\omega(t)} > 0$ при $t \in [a, \omega)$. Согласно (1.6), (1.10) и (2.7)

$$\lim_{\tau \to +\infty} \delta_1(\tau) = \frac{\alpha_0(\lambda_0 - 1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0 - 1)} \lim_{t \to \omega} h_1(t) = 0,$$

$$\lim_{\tau \to +\infty} \delta_2(\tau) = \nu \lim_{t \to \omega} h_2(t) = 0, \quad \lim_{t \to \omega} \frac{\delta_1(t)}{\delta_2(t)} = 0. \tag{2.11}$$

Кроме того,

$$\delta_2'(\tau) = \frac{\beta(2\lambda_0 - 1)}{1 - \lambda_0}(1 + \delta_1(\tau))\delta_2^2(\tau),$$

откуда

$$\delta_2(\tau) = \frac{\beta(\lambda_0 - 1)}{(2\lambda_0 - 1)\tau}(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad \tau \to +\infty. \tag{2.12}$$

Выберем теперь с учетом условия (2.11) число $\tau_0 > \max\{1, \beta \ln |\pi_\omega(a)|\}$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство $|\delta_2(\tau)| \le \dfrac{1}{2}$ при $\tau \ge \tau_0$, и рассмотрим систему (2.10) на множестве $\Omega = [\tau_0, +\infty) \times R_b^3$, где $\mathbb{R}_b^3 = \left\{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : |v_i| \le \dfrac{1}{2}\right\}$.

На этом множестве правые части системы непрерывны и после выделения во втором и третьем уравнениях линейной части ее можно записать в виде

$$v' = \frac{\beta}{\lambda_0 - 1}\left(q(\tau) + (A + B(\tau))v + V(\tau, v)\right), \tag{2.13}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -(2\lambda_0 - 1) & 2\lambda_0 - 1 & 0 \\ 0 & -\lambda_0 & \lambda_0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_1 \end{pmatrix}, \quad q(\tau) = c\begin{pmatrix} -(2\lambda_0 - 1)\delta_1 \\ (2\lambda_0 - 1)\delta_1 \\ \lambda_0\delta_1 \end{pmatrix},$$

$$B(\tau) = \begin{pmatrix} -(2\lambda_0 - 1)\delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -(2\lambda_0 - 1)\delta_1 & 0 \\ \delta_3 & 0 & -(2\lambda_0 - 1)\delta_1 \end{pmatrix},$$

$$V_1(\tau, v) = (1 + \delta_1(\tau))\left((c + v_1)\left(\left(1 + \delta_2(\tau)\ln\left(1 + \frac{v_1}{c}\right)\right)^\sigma - 1\right) - \sigma\delta_2(\tau)v_1\right),$$

$$\delta_3(\tau) = \delta_1(\tau) + \sigma\delta_2(\tau)(1 + \delta_1(\tau)).$$

Для функции $V_1(\tau, v)$, которая входит в нелинейное слагаемое этой системы, имеем

$$\frac{\partial V_1(\tau, v)}{\partial v_1} = (1 + \delta_1(\tau))\left\{\left[\left(1 + \delta_2(\tau)\ln\left(1 + \frac{v_1}{c}\right)\right)^\sigma - 1\right] + \right.$$

$$\left. + \sigma\delta_2(\tau)\left[\left(1 + \delta_2(\tau)\ln\left(1 + \frac{v_1}{c}\right)\right)^{\sigma - 1} - 1\right]\right\}.$$

Отсюда ясно, что

$$\frac{1}{\delta_2}\,\frac{\partial V_1(\tau,v)}{\partial v_1} \to 0 \quad \text{при} \quad v_1 \to 0 \quad \text{равномерно по} \quad \tau \in [\tau_0,+\infty). \tag{2.14}$$

Положим $\eta_1 = \sqrt{\lambda_0^2 - 8\lambda_0 + 4}$, $\eta_2 = \eta_1(3\lambda_0 - 1) + 5\lambda_0^2 - 7\lambda_0 + 2$, $\eta_3 = 4\lambda_0^2 + \lambda_0 - 2$ и применим к системе (2.13) дополнительное преобразование

$$v = \begin{pmatrix} \dfrac{2-3\lambda_0+\eta_1}{2} & \dfrac{2-3\lambda_0-\eta_1}{2} & 1 \\[2ex] \dfrac{\lambda_0(\lambda_0+\eta_1)}{2(1-2\lambda_0)} & \dfrac{\lambda_0(\lambda_0-\eta_1)}{2(1-2\lambda_0)} & 1 \\[2ex] 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

матрицей преобразования которого являются собственные векторы матрицы A, соответствующие собственным значениям

$$\lambda_1 = \frac{-3\lambda_0 + \eta_1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-3\lambda_0 - \eta_1}{2}, \quad \lambda_3 = 0.$$

В результате получим систему дифференциальных уравнений (2.1), в которой

$$f_1(\tau) = \frac{\beta c}{2(\lambda_0 - 1)}\left(7\lambda_0^2 + \lambda_0(\eta_1 - 5) + 1 - \eta_1 + \frac{\eta_2(1-\lambda_0)}{1-2\lambda_0}\right)\delta_1(\tau),$$

$$f_2(\tau) = \frac{\beta c(2\lambda_0 - 1)}{\eta_1\eta_3(\lambda_0 - 1)}\left(7\lambda_0^2 - \lambda_0(\eta_1 + 3) + \eta_1 - \frac{\eta_2(1-\lambda_0)}{1-2\lambda_0}\right)\delta_1(\tau),$$

$$f_3(\tau) = \frac{2\beta c(1-2\lambda_0)(\lambda_0-1)}{\eta_3}\,\delta_3(\tau),$$

$$g_i(\tau) = \frac{\beta\eta_2}{(\lambda_0-1)\eta_1\eta_2}\,\delta_2(\tau), \quad i = 1,2,3,$$

$$p_{11}(\tau) = \frac{\beta(2\lambda_0-1)}{(\lambda_0-1)\eta_3}\left(\lambda_0\delta_3(\tau) - 0,5\eta_3\delta_1(\tau)\right),$$

$$p_{12}(\tau) = \frac{\beta(2\lambda_0-1)\lambda_0(2-3\lambda_0-\eta_1)}{(\lambda_0-1)\eta_3}\delta_3(\tau),$$

$$p_{13}(\tau) = \frac{\beta(2\lambda_0-1)\lambda_0(2-3\lambda_0+\eta_1)}{(\lambda_0-1)\eta_3}\delta_3(\tau),$$

$$p_{21}(\tau) = \frac{\beta(2\lambda_0-1)^2}{2(\lambda_0-1)\eta_1\eta_3}\delta_1(\tau),$$

$$p_{22}(\tau) = \frac{\beta}{\lambda_0-1}\left(-\frac{3\lambda_0+\eta_1}{2} - \frac{(2\lambda_0-1)(\lambda_0^2+\eta_1(3\lambda_0-1)}{\eta_1\eta_3}\,\delta_1(\tau)\right),$$

$$p_{23}(\tau) = \frac{\beta\lambda_0(2\lambda_0-1)(\eta_1+4-\lambda_0)}{(\lambda_0-1)\eta_1\eta_3}\delta_1(\tau),$$

$$p_{31}(\tau) = \frac{\beta}{2(\lambda_0-1)\eta_1\eta_3}\left(\eta_2\delta_3(\tau)+2(2\lambda_0-1)(1-\lambda_0)\delta_1(\tau)\right),$$

$$p_{32}(\tau) = \frac{\beta\eta_2}{(\lambda_0-1)\eta_1\eta_3}\left((2-3\lambda_0-\eta_1)\delta_3(\tau)+2(2\lambda_0-1)\delta_1(\tau)\right),$$

$$p_{33}(\tau) = \frac{\beta}{(\lambda_0-1)\eta_1\eta_3}\left(\frac{(-3\lambda_0+\eta_1)\eta_1\eta_3}{2}+\eta_2(\delta_3(\tau)(\eta_1+2-3\lambda_0)+2(2\lambda_0-1)\delta_1(\tau))\right),$$

$$Z_1(\tau,z_1,z_2,z_3) = \frac{2\lambda_0(2\lambda_0-1)\eta_1}{\eta_2}\,\frac{V_1\left(\tau, z_1+\frac{2-3\lambda_0-\eta_1}{2}\,z_2+\frac{2-3\lambda_0+\eta_1}{2}\,z_3\right)}{\delta_2(\tau)},$$

$$Z_2(\tau,z_1,z_2,z_3) = -\frac{V_1\left(\tau, z_1+\frac{2-3\lambda_0-\eta_1}{2}\,z_2+\frac{2-3\lambda_0+\eta_1}{2}\,z_3\right)}{\delta_2(\tau)},$$

$$Z_3(\tau,z_1,z_2,z_3) = \frac{V_1\left(\tau, z_1+\frac{2-3\lambda_0-\eta_1}{2}\,z_2+\frac{2-3\lambda_0+\eta_1}{2}\,z_3\right)}{\delta_2(\tau)}.$$

В силу условий (2.11) и (2.12)

$$p_{11}(\tau) = \frac{\beta\sigma(2\lambda_0-1)}{(\lambda_0-1)\eta_3}\,\delta_2(\tau)[1+o(1)] = \frac{\sigma}{\eta_3}\,\frac{1}{\tau}[1+o(1)],$$

$$p_{22}(\tau) = \frac{\beta(-3\lambda_0-\eta_1)}{2(\lambda_0-1)}[1+o(1)], \quad p_{33}(\tau) = \frac{\beta(-3\lambda_0+\eta_1)}{2(\lambda_0-1)}[1+o(1)],$$

поэтому при некотором большом τ_0 выполняются условия (2.2). Не ограничивая общности, будем считать, что значение τ_0 совпадает с уже выбранным ранее. Далее, с учетом (2.11) имеем

$$\lim_{\tau\to+\infty}\frac{f_i(\tau)}{p_{ii}(\tau)} = 0, \quad i=1,2,3, \quad \lim_{\tau\to+\infty}\frac{p_{2i}(\tau)}{p_{22}(\tau)} = 0, \quad i=1,3,$$

$$\lim_{\tau\to+\infty}\frac{p_{3i}(\tau)}{p_{33}(\tau)} = 0, \quad i=1,2, \quad \lim_{\tau\to+\infty}\frac{p_{12}(\tau)}{p_{11}(\tau)} = \eta_1+2-3\lambda_0,$$

$$\lim_{\tau\to+\infty}\frac{p_{13}(\tau)}{p_{11}(\tau)} = -\eta_1+2-3\lambda_0,$$

$$\lim_{\tau\to+\infty}\frac{g_i(\tau)}{p_{ii}(\tau)} = 0, \quad i=2,3, \quad \lim_{\tau\to+\infty}\frac{g_1(\tau)}{p_{11}(\tau)} = \frac{\eta_2}{\eta_1\sigma}.$$

Следовательно, выполнены условия (2.3) и (2.4). Кроме того, в силу (2.14) выполняются и условия (2.5). Значит, согласно лемме 2.1 полученная система вида (2.1) имеет хотя бы одно решение, стремящееся к нулю при $\tau \to +\infty$. Каждому из них в силу замен переменных (2.15) и (2.9) соответствует решение $y(t)$ дифференциального уравнения (1.4), допускающее при $t \to w$ асимптотические соотношения (2.8).

Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. *Пусть* $\lambda_0 \in R \setminus \left\{0, 1, -1, \frac{1}{2}\right\}$, *выполняются условия (1.11) и функция*

$$h(t) = p(t)\pi_\omega^3(t) - \frac{\alpha_0\lambda_0(2\lambda_0 - 1)}{\lambda_0 - 1} \tag{2.16}$$

такова, что

$$\int\limits_a^\omega \left|\frac{h(t)}{\pi_\omega(t)}\right| dt < +\infty. \tag{2.17}$$

Тогда для любого вещественного $c \neq 0$ *уравнение (1.3) имеет* $P_w(\lambda_0)$*-решение, допускающее при* $t \to \omega$ *асимптотические представления*

$$\begin{aligned} y(t) &= (c + o(1))\, e^{[\alpha_0 \frac{(\lambda_0 - 1)^2}{\lambda_0} I_A(t)]}, \\ y^{'}(t) &= \frac{2\lambda_0 - 1}{(\lambda_0 - 1)\pi_w(t)}\,(c + o(1))\, e^{[\alpha_0 \frac{(\lambda_0 - 1)^2}{\lambda_0} I_A(t)]}, \\ y^{''}(t) &= \frac{\lambda_0(2\lambda_0 - 1)}{(\lambda_0 - 1)^2\pi_w^2(t)}\,(c + o(1))\, e^{[\alpha_0 \frac{(\lambda_0 - 1)^2}{\lambda_0} I_A(t)]}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Доказательство. Выбрав произвольным образом вещественное число $c \neq 0$, уравнение (1.3) с помощью преобразования

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(c + z_1 + \frac{2 - 3\lambda_0 - \eta_1}{2}\, z_2 + \frac{2 - 3\lambda_0 + \eta_1}{2}\, z_3\right) e^{[\alpha_0 \frac{(\lambda_0 - 1)^2}{\lambda_0} I_A(t)]}, \\ y^{'}(t) &= \frac{2\lambda_0 - 1}{(\lambda_0 - 1)\pi_w(t)} \left(c + z_1 + \frac{\lambda_0(\lambda_0 - \eta_1)}{2(1 - 2\lambda_0)}\, z_2 + \frac{\lambda_0(\lambda_0 + \eta_1)}{2(1 - 2\lambda_0)}\, z_3\right) e^{[\alpha_0 \frac{(\lambda_0 - 1)^2}{\lambda_0} I_A(t)]}, \\ y^{''}(t) &= \frac{\lambda_0(2\lambda_0 - 1)}{(\lambda_0 - 1)^2\pi_w^2(t)}\,(c + z_1 + z_2 + z_3)\, e^{[\alpha_0 \frac{(\lambda_0 - 1)^2}{\lambda_0} I_A(t)]}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

где

$$\tau = \beta \ln|\pi_w(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad w = +\infty, \\ -1 & \text{при} \quad w < +\infty, \end{cases}$$

сведем к системе дифференциальных уравнений вида

$$z_i^{'} = f_i(\tau) + \sum_{k=1}^{3} p_{ik}(\tau) z_k, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.20}$$

в которой

$$f_1(\tau)=\frac{\beta c(\eta_2+\eta_1(3\lambda_0-1))\delta(\tau)}{(\lambda_0-1)(2\lambda_0-1)\eta_1\eta_3},\quad f_2(\tau)=\frac{\beta c(-\eta_2+\eta_1(3\lambda_0-1))\delta(\tau)}{(\lambda_0-1)(2\lambda_0-1)\eta_1\eta_3},\quad f_3(\tau)=\frac{\beta c\delta(\tau)}{1-\lambda_0},$$

$$p_{11}(\tau)=\frac{\beta\delta(\tau)}{2\eta_1\eta_3(\lambda_0-1)}\left(\frac{\eta_3}{2}(\eta_1-\lambda_0)(\eta_1+2-3\lambda_0)-\lambda_0(\eta_1+\lambda_0)(\eta_1+3\lambda_0)-\right.$$

$$\left.-\,2(\eta_2+\eta_1(3\lambda_0-1))\right),$$

$$p_{12}(\tau)=\frac{\beta\delta(\tau)}{2\eta_1\eta_3(\lambda_0-1)}\left(\frac{\eta_3}{2}(\eta_1-\lambda_0)(-\eta_1+2-3\lambda_0)-\lambda_0(\eta_1+3\lambda_0)(-\eta_1+\lambda_0)-\right.$$

$$\left.-\,2(\eta_2+\eta_1(3\lambda_0-1))\right),$$

$$p_{13}(\tau)=\frac{\beta\delta(\tau)}{2\eta_1\eta_3(\lambda_0-1)}\left(\eta_3(\eta_1-\lambda_0)+2(2\lambda_0-1)(3\lambda_0+\eta_1)-2(\eta_2+\eta_1(3\lambda_0-1))\right),$$

$$p_{21}(\tau)=\frac{\beta\delta(\tau)}{2(2\lambda_0-1)(\lambda_0-1)}\left(\frac{2-3\lambda_0+\eta_1}{2\eta_1}-\lambda_0(2\lambda_0-1)(-3\lambda_0+\eta_1)(\eta_1+\lambda_0)-\right.$$

$$\left.-\,\eta_1(3\lambda_0-1)+\eta_1\right),$$

$$p_{22}(\tau)=\frac{\beta}{\lambda_0-1}\left(\frac{-3\lambda_0+\eta_1}{2}+\frac{\delta(\tau)}{2(1-2\lambda_0)}\left(\frac{2-3\lambda_0-\eta_1}{2\eta_1}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\,\frac{\lambda_0(2\lambda_0-1)(-3\lambda_0+\eta_1)(\eta_1+\lambda_0)}{\eta_1\eta_3}+\eta_2-\eta_1(3\lambda_0-1)\right)\right),$$

$$p_{23}(\tau)=\frac{\beta\lambda_0(2\lambda_0-1)(\eta_1+4-\lambda_0)}{(\lambda_0-1)\eta_1\eta_3}\,\delta_1(\tau),$$

$$p_{31}(\tau)=\frac{\lambda_0\delta(\tau)}{\eta_3}\,(\eta_1+2-3\lambda_0),\quad p_{32}(\tau)=\frac{\beta\lambda_0\delta(\tau)}{(\lambda_0-1)\eta_1}\,(-\eta_1+2-3\lambda_0),$$

$$p_{33}(\tau)=\frac{\beta}{\lambda_0-1}\left(\frac{-3\lambda_0+\eta_1}{2}+\frac{2(1-2\lambda_0)(1+\lambda_0)\delta(\tau)}{\eta_3}\right).$$

В силу условий (1.11)

$$\lim_{\tau\to+\infty}\delta(\tau)=\lim_{t\to\omega}\frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^3}{\lambda_0}\,h(t)=\frac{(\alpha_0(\lambda_0-1)^3}{\lambda_0}\,\lim_{t\to\omega}h(t)=0,$$

$$\lim_{\tau\to+\infty} p_{22}(\tau) = \frac{\beta(3\lambda_0+\eta_1)}{2(\lambda_0-1)} \neq 0, \quad \lim_{\tau\to+\infty} p_{33}(\tau) = \frac{\beta(-3\lambda_0+\eta_1)}{2(\lambda_0-1)} \neq 0,$$

$$\lim_{\tau\to+\infty} \frac{p_{2i}(\tau)}{p_{22}(\tau)} = 0, \quad i=1,3, \quad \lim_{\tau\to+\infty} \frac{p_{3i}(\tau)}{p_{33}(\tau)} = 0, \quad i=1,2, \tag{2.21}$$

$$\lim_{\tau\to+\infty} \frac{f_2(\tau)}{p_{22}(\tau)} = 0, \quad \lim_{\tau\to+\infty} \frac{f_3(\tau)}{p_{33}(\tau)} = 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что существует число $\tau_0 > \max\{1, \beta\ln|\pi_\omega(a)|\}$, для которого при $i=2,3$ выполняются условия (2.2) и (2.3). Кроме того, с учетом (2.17) имеем

$$\int_{\tau_0}^{+\infty} |\delta(\tau)|d\tau = \left|\frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^3}{\lambda_0}\right| \int_{t_0}^{\omega} \left|\frac{h(t)}{\pi_\omega(t)}\right| dt < +\infty, \tag{2.22}$$

где $\tau_0 = \beta\ln|\pi_\omega(t_0)|\}$.

Система (2.20) является частным случаем системы (2.1), где $g_i(\tau)\equiv 0$ и $Z_i(\tau,z_1,z_2,z_3)\equiv$ $\equiv 0$, $i=1,2,3$. Поэтому в силу (2.21) и (2.22) для нее выполнены все условия леммы 2.2. Согласно этой лемме система (2.20) имеет хотя бы одно решение $(z_1,z_2,z_3): [\tau_1,+\infty) \to$ $\to R^3 (\tau_1 \geq \tau_0)$, стремящееся к нулю при $\tau\to+\infty$, которому в силу замен (2.19) соответствует решение $y(t)$ дифференциального уравнения (1.3), удовлетворяющее при $t\to\omega$ асимптотическим представлениям (2.18).

Теорема 2.2 доказана.

Следствие 2.1. *Пусть*

$$\lim_{t\to\omega} p(t)\pi_\omega^3(t) = c_0 \quad \text{и} \quad \int_a^{\omega} \left|\frac{p(t)\pi_\omega^3(t)-c_0}{\pi_\omega(t)}\right| dt < +\infty. \tag{2.23}$$

Тогда если

$$-\frac{16}{36} < \frac{c_0}{\alpha_0} < \frac{1}{3} \tag{2.24}$$

и

$$\left(32\left(\frac{\alpha_0}{c_0}\right)^3 + 36\left(\frac{\alpha_0}{c_0}\right)^2 - 2\frac{\alpha_0}{c_0} + 6\right)^2 - \left(32\left(\frac{\alpha_0}{c_0}\right)^3 - 2\left(\frac{\alpha_0}{c_0}\right)^2 + 24\frac{\alpha_0}{c_0}\right)^2 \left(1 + \frac{36c_0}{16\alpha_0}\right) < 0, \tag{2.25}$$

то дифференциальное уравнение (1.3) имеет фундаментальную систему решений y_i, $i=$ $=1,2,3$, допускающих при $t\to\omega$ асимптотические представления

$$y_i(t) = (1+o(1))e^{[\alpha_0\frac{(\lambda_i-1)^2}{\lambda_i}I_A(t)]},$$

$$y_i^{'}(t) = \frac{2\lambda_i-1}{(\lambda_i-1)\pi_w(t)}(1+o(1))e^{[\alpha_i\frac{(\lambda_i-1)^2}{\lambda_i}I_A(t)]}, \tag{2.26}$$

$$y_i''(t) = \frac{\lambda_i(2\lambda_i - 1)}{(\lambda_i - 1)^2\pi_w^2(t)}(1 + o(1))e^{[\alpha_0 \frac{(\lambda_i - 1)^2}{\lambda_i} I_A(t)]},$$

где λ_i, $i = 1, 2, 3,$ *— корни алгебраического уравнения*

$$\lambda^3 - \lambda^2 \left(3 + 2\frac{\alpha_0}{c_0}\right) + \lambda \left(3 + \frac{\alpha_0}{c_0}\right) - 1 = 0. \tag{2.27}$$

Доказательство. Поскольку выполнены неравенства (2.24) и (2.25), алгебраическое уравнение (2.27) имеет различные вещественные корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, причем $\lambda_i \neq \left\{0, 1, -1, \frac{1}{2}\right\}$ при $i = 1, 2, 3$. Для этих корней в силу (2.23) имеем

$$c_0 = \frac{\alpha_0(2\lambda_i - 1)}{(\lambda_i - 1)^3}, \quad i = 1, 2, 3.$$

В силу условий (2.24) и (2.25) следует, что для уравнения (1.3) выполняются условия (2.23) и (2.16) при замене в них λ_0 любым из полученных значений λ_i, $i = 1, 2, 3$. Поэтому согласно теореме 2.2 уравнение (1.3) имеет три решения y_i, $i = 1, 2, 3$, допускающие при $t \to \omega$ асимптотические представления (2.26). Эти решения в силу того, что $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \neq \lambda_3$, образуют, очевидно, фундаментальную систему решений.

Данные следствия дополняют известные результаты (см., например, монографию [1]) об асимптотических свойствах решений линейных дифференциальных уравнений (1.3).

Заключение. В настоящей работе исследован вопрос о существовании $P_w(\lambda_0)$-решений дифференциальных уравнений (1.4) в случае, когда $\lambda_0 \in R \setminus \left\{0, 1, -1, \frac{1}{2}\right\}$. При этом уточняются асимптотические формулы, полученные для данных уравнений в работе [5]. Асимптотические формулы при $t \to \omega$ для линейного уравнения дополняют известные результаты из монографии [1] (§ 6).

1. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1990. — 430 с.
2. *Евтухов В. М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 2003. — **39**, № 4. — С. 433–444.
3. *Стехун А. А.* Асимптотические представления исчезающих в окрестности особой точки решений нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка// Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика і механіка. — 2008. — **13**. — С. 95–111.
4. *Стехун А. О.* Асимптотична поведінка розв’язків одного класу звичайних диференціальних рівнянь третього порядку // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 2. — С. 246–260.
5. *Шарай Н. В.* Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, близких к линейным // Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика і механіка. — 2010. — **15**, вип. 18. — С. 88–101.

Получено 15.04.14