УДК 517.929

УМОВИ ІСНУВАННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З ДИСКРЕТНИМ АРГУМЕНТОМ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
Україна, 33000, Рівне, вул. Соборна, 11
e-mail: V.Ye.Slyusarchuk@NUWM.rv.ua

We obtain conditions for nonlinear almost periodic difference equations with discrete argument in a Banach space to have almost periodic solutions without using the $\mathcal{H}$-classes of these equations.

Получены условия существования почти периодических решений нелинейных почти периодических разностных уравнений с дискретным аргументом в банаховом пространстве, в которых не используются $\mathcal{H}$-классы этих уравнений.

1. Основні позначення та об'єкт досліджень. Нехай $\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел, $\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел і E — довільний банаховий простір із нормою $\|\cdot\|_E$. Позначимо через $\mathfrak{M}$ банаховий простір двосторонніх послідовностей $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, де $x_n \in E$, для кожної з яких $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|_E < \infty$, з нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|_E$$

і нульовим елементом $\mathbf{0}$.

У просторі $\mathfrak{M}$ визначимо оператор зсуву S_m, $m \in \mathbb{Z}$, формулою

$$(S_m\mathbf{x})_n = x_{n+m}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Елемент $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$ називається *майже періодичним* (за Бохнером) (див. [1]), якщо замикання множини $\{S_m\mathbf{y} : m \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $\mathfrak{M}$ є компактною підмножиною цього простору.

Множина $\mathfrak{B}$ майже періодичних елементів простору $\mathfrak{M}$ є підпростором цього простору з нормою $\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{B}} = \|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}}$.

Нехай Ω — область простору E і $\mathcal{K}$ — множина всіх непорожніх компактних підмножин $K \subset \Omega$.

Розглянемо відображення $\mathbf{f} : \Omega \to \mathfrak{M}$, що визначається формулою

$$\mathbf{f}(x) = (f_n(x))_{n\in\mathbb{Z}}, \quad x \in \Omega,$$

де $f_n : \Omega \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, — неперервні відображення, і задовольняє умови:

1) $\mathbf{f}(x)$ як векторна функція зі значеннями в $\mathfrak{M}$ неперервна по x на Ω і, отже, рівномірно неперервна по x на кожній множині $K \in \mathcal{K}$ (див. [2, с. 112]);

2) $\mathbf{f}(x)$ як послідовність майже періодична рівномірно по x на кожній множині $K \in \mathcal{K}$.

Неважко показати, що для кожної множини $K \in \mathcal{K}$

$$\sup_{x \in K} \|\mathbf{f}(x)\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{n \in \mathbb{Z},\, x \in K} \|f_n(x)\|_E < +\infty$$

(див. [2, с. 113]) і для довільної послідовності $(m_k)_{k \geq 1}$ цілих чисел існує підпослідовність $(m_{k_l})_{l \geq 1}$, для якої послідовність $\left(S_{m_{k_l}} \mathbf{f}(x)\right)_{l \geq 1}$ збігається рівномірно на множині K.

Вважатимемо, що послідовність $\left(S_{m_{k_l}} \mathbf{f}(x)\right)_{l \geq 1}$ збігається рівномірно на кожній множині $K \in \mathcal{K}$ і граничне відображення $\mathbf{g} : \Omega \to \mathfrak{M}$, що визначається співвідношеннями

$$\mathbf{g}(x) = (g_n(x))_{n \in \mathbb{Z}},$$

$$g_n(x) = \lim_{l \to \infty} f_{n+m_{k_l}}(x), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

або формулою

$$\mathbf{g}(x) = \lim_{l \to \infty} S_{m_{k_l}} \mathbf{f}(x), \tag{3}$$

задовольняє умови 1 і 2. Наведена вимога виконується, якщо, наприклад, простір E скінченновимірний (див. аналогічні дослідження в [3, с. 429] у випадку диференціальних рівнянь). Зазначимо, що у статті ця вимога відіграватиме допоміжну роль і не буде використовуватися при отриманні основного результату.

Множина всіх визначених формулою (3) відображень $\mathbf{g}$ називається *$\mathcal{H}$-класом* відображення $\mathbf{f}$ і позначається через $\mathcal{H}(\mathbf{f})$.

Розглянемо різницеве рівняння

$$x_{n+1} = f_n(x_n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

$\mathcal{H}$-класом цього рівняння називається множина всіх різницевих рівнянь

$$y_{n+1} = g_n(y_n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

права частина яких визначається за допомогою (2).

Метою статті є встановлення умов існування майже періодичних розв'язків рівняння (4) без використання елементів $\mathcal{H}$-класу цього рівняння. При дослідженні рівняння (4) будемо використовувати функціонал, визначений на множині обмежених розв'язків цього рівняння (множини значень цих розв'язків — підмножини компактних множин $K \in \mathcal{K}$). Означення цього функціонала наведемо в наступному пункті.

2. Функціонал δ. Відокремлені та сильно відокремлені розв'язки рівняння (4). Позначимо через $\mathcal{N}(\mathbf{f}, K)$ множину всіх обмежених розв'язків $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ рівняння (4), для кожного з яких замикання $\overline{R(\mathbf{x})}$ множини

$$R(\mathbf{x}) = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$$

є підмножиною множини $K \in \mathcal{K}$ і $\overline{R(\mathbf{x})} \neq K$.

Зафіксуємо довільну множину $K \in \mathcal{K}$ і обмежений розв'язок $\mathbf{x}^* \in \mathcal{N}(\mathbf{f}, K)$ рівняння (4). Вважаємо, що

$$\mathcal{N}(\mathbf{f}, K) \neq \varnothing.$$

Покладемо

$$r(\mathbf{x}^*, K) = \sup\left\{\|x - y\|_E : x \in \overline{R(\mathbf{x}^*)},\ y \in K\right\}. \tag{5}$$

Завдяки нерівності $\overline{R(\mathbf{x})} \neq K$

$$r(\mathbf{x}^*, K) > 0.$$

Також зафіксуємо довільне число $\varepsilon \in [0, r(\mathbf{x}^*, K)]$. Позначимо через $\Omega(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon)$ множину всіх елементів $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$, для кожного з яких

$$R(\mathbf{x}^* + \mathbf{y}) \subset K \tag{6}$$

і

$$\|\mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}} \geq \varepsilon. \tag{7}$$

Аналогічним чином можна визначити множину $\Omega(\mathbf{z}, K, \varepsilon)$ для будь-якого іншого елемента $\mathbf{z} \in \mathfrak{M}$, для якого $R(\mathbf{z}) \subset K$.

Розглянемо функціонал

$$\delta(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon) = \inf_{y \in \Omega(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon)} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left\|x^*_{n+1} + y_{n+1} - f_n(x^*_n + y_n)\right\|_E. \tag{8}$$

Означення 1. *Розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{f}, K)$ рівняння (4) називається відокремленим на множині $\mathbb{Z} \times K$, якщо цей розв'язок або є єдиним на множині $\mathbb{Z} \times K$, або для кожного іншого розв'язку $\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ зі значеннями в K виконується нерівність*

$$\inf_{n \in \mathbb{Z}} \|z_n - u_n\|_E \geq \rho,$$

де ρ — додатна стала, залежна тільки від $\mathbf{z}$.

Означення 2. *Розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{f}, K)$ рівняння (4) називається сильно відокремленим на множині $\mathbb{Z} \times K$, якщо*

$$\delta(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon) > 0$$

для кожного $\varepsilon \in (0, r(\mathbf{z}, K))$.

Очевидно, що кожний сильно відокремлений на множині $\mathbb{Z} \times K$ розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{f}, K)$ рівняння (4) є відокремленим на множині $\mathbb{Z} \times K$ розв'язком цього рівняння. Однак відокремлений на множині $\mathbb{Z} \times K$ розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{f}, K)$ рівняння (4) може не бути сильно відокремленим на множині $\mathbb{Z} \times K$ розв'язком цього рівняння. Це підтверджується наступним прикладом.

Приклад 1. Використаємо неперервну майже періодичну на $\mathbb{R}$ функцію

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin \frac{t}{2k+1}$$

та парну невід'ємну і необмежену на $\mathbb{R}$ функцію

$$F(t) = \int_0^t f(s)\, ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} \sin^2 \frac{t}{2(2k+1)},$$

для якої (див., наприклад, [3, с. 436])

$$F(t_m) > \ln(2m+1), \quad m \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

де

$$t_m = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2m+1)\pi.$$

Розглянемо лінійне різницеве рівняння

$$x_{n+1} = e^{F(n+1)-F(n)} x_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{10}$$

в якому коефіцієнт $e^{F(n+1)-F(n)}$ є майже періодичним, оскільки

$$F(n+1) - F(n) = \int_n^{n+1} f(t)\, dt$$

і функція $f(t)$ є майже періодичною. Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$x_n = ce^{F(n)}, \tag{11}$$

де c — довільна дійсна стала.

Оскільки (див. [4, с. 453])

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

то

$$|F([t_m]) - F(t_m)| < \frac{\pi^2}{8}, \quad m \in \mathbb{N},$$

де $[t_m]$ — ціла частина числа t_m, і завдяки (9)

$$F([t_m]) > \ln(2m+1) - \frac{\pi^2}{8}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Тому кожний ненульовий розв'язок (11) рівняння (10) (коли $c \neq 0$) є необмеженим на $\mathbb{Z}$.

Отже, нульовий розв'язок рівняння (10) є відокремленим на кожній множині $\mathbb{Z}\times[-\mu,\mu]$, $\mu > 0$. Однак цей розв'язок не є сильно відокремленим на жодній з множин $\mathbb{Z}\times[-\mu,\mu]$, $\mu > 0$. Справді, завдяки нерівностям (12), парності функції $F(t)$ та зображенню загального розв'язку (11) рівняння (10) нульовий розв'язок цього рівняння не є експоненціально дихотомічним [5]. Тому лінійний неперервний і майже періодичний різницевий оператор $\mathfrak{A} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, що визначається співвідношенням

$$(\mathfrak{A}\mathbf{x})_n = x_{n+1} - e^{F(n+1)-F(n)}x_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

не має неперервного оберненого оператора і, отже,

$$\inf_{\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}}=\mu} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left| x_{n+1} - e^{F(n+1)-F(n)}x_n \right| = 0 \tag{13}$$

для кожного $\mu > 0$ (якщо припустити, що для деякого $\mu_0 > 0$

$$\inf_{\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}}=\mu_0} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left| x_{n+1} - e^{F(n+1)-F(n)}x_n \right| > 0,$$

то на підставі [5] та однорідності оператора $\mathfrak{A}$ цей оператор матиме обернений неперервний оператор, що суперечитиме відсутності експоненціальної дихотомії для нульового розв'язку рівняння (10)).

Із (13) випливає, що для функціонала δ у випадку різницевого рівняння (10) виконується співвідношення

$$\delta(\mathbf{0}, [-\mu,\mu], \varepsilon) = 0$$

для кожного $\varepsilon \in (0,\mu]$. Це означає, що нульовий розв'язок рівняння (10) не є сильно відокремленим на жодній із множин $\mathbb{Z}\times[-\mu,\mu]$, $\mu > 0$.

Застосування функціонала δ до дослідження майже періодичних нелінійного різницевого рівняння (4) та аналогічного лінійного різницевого рівняння наведемо в наступних пунктах.

Інший функціонал для дослідження нелінійних майже періодичних різницевого рівняння з неперервним аргументом

$$x(t+1) = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

і диференціального рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

в яких відображення $f : \mathbb{R}\times\Omega \to E$, де Ω — довільна область простору E, є неперервним, використовувався автором у [6, 7].

3. Основний результат. Наведемо умови існування майже періодичних розв'язків рівняння (4), в яких на відміну від відомої теореми Амеріо про майже періодичні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь (див. [3, 8]) не використовуються $\mathcal{H}$-клас рівняння (4) та відокремленість обмежених розв'язків рівнянь $\mathcal{H}$-класу цього рівняння.

Нехай Λ — обмежена підмножина простору E. Визначимо діаметр $\operatorname{diam}\Lambda$ множини Λ рівністю

$$\operatorname{diam}\Lambda = \sup\{\|x-y\|_E : x, y \in \Lambda\}.$$

Теорема 1. *Нехай $K \in \mathcal{K}$. Якщо для розв'язку $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{f}, K)$ рівняння (4) $\operatorname{diam} R(\mathbf{z}) \neq 0$ і виконується нерівність*

$$\delta(\mathbf{z}, K, \varepsilon) > 0 \tag{14}$$

для кожного $\varepsilon \in (0, r(\mathbf{z}, K))$, то цей розв'язок є майже періодичним.

Зауваження 1. Розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{f}, K)$ рівняння (4), для якого $\operatorname{diam} R(\mathbf{z}) = 0$, є сталим і, отже, майже періодичним.

Доведення. Припустимо, що розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{f}, K)$ рівняння (4) не є елементом простору $\mathfrak{B}$. Тоді існує послідовність $\left(S_{m_p}\mathbf{z}\right)_{p\geq 1}$, для якої кожна підпослідовність $\left(S_{k_p}\mathbf{z}\right)_{p\geq 1}$ буде розбіжною. Отже, для деяких послідовностей $(p_r)_{r\geq 1}$, $(q_r)_{r\geq 1}$ натуральних чисел і числа $\gamma \in (0, \operatorname{diam} R(\mathbf{z}))$

$$\left\|S_{k_{p_r}}\mathbf{z} - S_{k_{q_r}}\mathbf{z}\right\|_{\mathfrak{M}} \geq \gamma, \quad r \geq 1. \tag{15}$$

Зазначимо, що $\operatorname{diam} R(\mathbf{z}) \leq r(\mathbf{z}, K)$. Не обмежуючи загальності можна вважати, що послідовність $\left(S_{k_p}\mathbf{f}(x)\right)_{p\geq 1}$ збігається рівномірно на K. Тоді

$$\lim_{p,q\to\infty} \sup_{x\in K} \left\|S_{k_p}\mathbf{f}(x) - S_{k_q}\mathbf{f}(x)\right\|_{\mathfrak{M}} = 0. \tag{16}$$

Розглянемо елементи

$$\mathbf{y}_r = S_{k_{p_r}}\mathbf{z} - S_{k_{q_r}}\mathbf{z}, \quad r \geq 1,$$

простору $\mathfrak{M}$. Очевидно, що

$$\mathbf{y_r} \in \Omega(S_{k_{q_r}}\mathbf{z}, K, \gamma), \quad r \geq 1. \tag{17}$$

Покажемо, що

$$\delta(z, K, \gamma) = 0. \tag{18}$$

Завдяки (8), (17) та тому, що

$$z_{n+1+k_{p_r}} - f_{n+k_{p_r}}(z_{n+k_{p_r}}) \equiv 0, \quad r \geqslant 1,$$

виконуються співвідношення

$$\delta(\mathbf{z}, K, \gamma) = \inf_{\mathbf{y} \in \Omega(\mathbf{z}, K, \gamma)} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|z_{n+1} + y_{n+1} - f_n(z_n + y_n)\|_E =$$

$$= \inf_{\mathbf{y} \in \Omega(S_{k_{q_r}}\mathbf{z}, K, \gamma)} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|z_{n+1+k_{q_r}} + y_{n+1} - f_{n+k_{q_r}}(z_{n+k_{q_r}} + y_n)\|_E \le$$

$$\le \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|z_{n+1+k_{q_r}} + (z_{n+1+k_{p_r}} - z_{n+1+k_{q_r}}) - f_{n+k_{q_r}}(z_{n+k_{q_r}} + (z_{n+k_{p_r}} - z_{n+k_{q_r}}))\|_E =$$

$$= \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|z_{n+1+k_{p_r}} - f_{n+k_{q_r}}(z_{n+k_{p_r}})\|_E \le$$

$$\le \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|z_{n+1+k_{p_r}} - f_{n+k_{p_r}}(z_{n+k_{p_r}})\|_E + \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left\|f_{n+k_{p_r}}(z_{n+k_{p_r}}) - f_{n+k_{q_r}}(z_{n+k_{p_r}})\right\|_E =$$

$$= \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left\|f_{n+k_{p_r}}(z_{n+k_{p_r}}) - f_{n+k_{q_r}}(z_{n+k_{p_r}})\right\|_E,$$

з яких на підставі (16) випливає співвідношення (18), що суперечить (14).

Отже, припущення, що розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{f}, K)$ рівняння (4) не є майже періодичним, хибне.

Теорему 1 доведено.

Зазначимо, що виконання в теоремі 1 нерівності (14) означає, що розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{f}, K)$ рівняння (4) є сильно відокремленим на множині $\mathbb{Z} \times K$. Тому цю теорему можна сформулювати в наступному вигляді.

Теорема 2. *Нехай $K \in \mathcal{K}$. Якщо розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{f}, K)$ рівняння (4) сильно відокремлений на множині $\mathbb{Z} \times K$, то цей розв'язок є майже періодичним.*

Зауваження 2. Якщо розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{f}, K)$ рівняння (4) не є сильно відокремленим на множині $\mathbb{Z} \times K$, то цей розв'язок або може бути майже періодичним, або ні. Це підтверджується наступними двома прикладами.

Приклад 2. Розглянемо нелінійне автономне різницеве рівняння

$$x_{n+1} = x_n^3, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{19}$$

та його обмежений розв'язок $\mathbf{z} = (z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, для якого

$$z_0 = \frac{1}{2}.$$

Цей розв'язок не є майже періодичним, оскільки

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = 0$$

і

$$\lim_{n \to -\infty} z_n = 1.$$

Очевидно, що

$$R(\mathbf{z}) \subset [0, 1].$$

Зафіксуємо замкнений відрізок $[-1,2]$. Тоді елемент $\mathbf{y} = -\mathbf{z}$ простору $\mathfrak{M}$ (у випадку $E = \mathbb{R}$) є елементом множини $\Omega(\mathbf{z},[-1,2],\varepsilon)$ для кожного $\varepsilon \in (0,1)$. Тому для $\varepsilon \in (0,1)$

$$\delta(\mathbf{z},[-1,2],\varepsilon) = \inf_{\mathbf{x}\in\Omega(\mathbf{z},[-1,2],\varepsilon)} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left| z_{n+1} + x_{n+1} - z_n^3 - x_n^3 \right| \le$$

$$\le \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left| z_{n+1} + (-z_{n+1}) - z_n^3 - (-z_n^3) \right| = 0.$$

Отже, для кожного $\varepsilon \in (0,1)$

$$\delta(\mathbf{z},[-1,2],\varepsilon) = 0,$$

тобто розв'язок $\mathbf{z}$ рівняння (19) не є сильно відокремленим на множині $\mathbb{Z}\times[-1,2]$.

Зазначимо, що розв'язок $\mathbf{z}$ рівняння (19) також не є відокремленим на множині $\mathbb{Z}\times\times[-1,2]$, оскільки обмеженими розв'язками цього рівняння також є $\mathbf{z}_1 = (z_{n,1})_{n\in\mathbb{Z}}$ і $\mathbf{z}_2 = = (z_{n,2})_{n\in\mathbb{Z}}$, де $z_{n,1} \equiv 0$, $z_{n,2} \equiv 1$, і

$$\inf_{n\in\mathbb{Z}} |z_n - z_{n,1}| = \inf_{n\in\mathbb{Z}} |z_n - z_{n,2}| = 0.$$

Приклад 3. Розглянемо лінійне автономне різницеве рівняння

$$x_{n+1} = x_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, що розв'язки цього рівняння мають вигляд

$$x_n = c, \quad n \in \mathbb{Z},$$

де c — довільна дійсна стала. Тому всі вони є майже періодичними. Усі ці розв'язки не є відокремленими і, отже, не є сильно відокремленими на множинах $\mathbb{Z}\times[a,b]$ ($a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

Отже, *властивість сильної відокремленості обмеженого розв'язку майже періодичного різницевого рівняння (4) не є необхідною (а є лише достатньою) умовою для майже періодичності цього розв'язку.*

4. Випадок лінійного рівняння (4). Розглянемо майже періодичну послідовність $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ лінійних неперервних операторів, майже періодичний елемент $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$ та відповідне лінійне різницеве рівняння

$$x_{n+1} = A_n x_n + h_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{20}$$

Оскільки це рівняння є окремим випадком рівняння (4), то на підставі теореми 2 справджується наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай $K \in \mathcal{K}$. Сильно відокремлений на множині $\mathbb{Z}\times K$ розв'язок $\mathbf{z} = = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ рівняння (20), для якого $\overline{R(\mathbf{z})} \ne K$, є майже періодичним.*

На завершення зазначимо, що наведені умови існування майже періодичних розв'язків рівнянь (4) і (20) є новими. На відміну від уже згадуваної теореми Амеріо в теоремах 1 і 2 не використовуються $\mathcal{H}$-клас рівняння (4) та умова відокремлення обмежених розв'язків рівнянь $\mathcal{H}$-класу цього рівняння і банаховий простір E може бути нескінченновимірним. Аналогічно в теоремі 3 також не використовується $\mathcal{H}$-клас рівняння (20).

Крім того, зауважимо, що дослідженню розв'язків майже періодичних рівнянь присвячено багато публікацій. Відмітимо лише частину з них. Для звичайних лінійних диференціальних рівнянь перші теореми про майже періодичні розв'язки були доведені Фаваром у роботі [9], а для нелінійних диференціальних рівнянь — Амеріо в роботі [8]. У цих роботах суттєво використовуються $\mathcal{H}$-класи досліджуваних рівнянь, а у [8] використовується також вимога відокремленості обмежених розв'язків рівнянь. Результати Фавара були покращені Е. Мухамадієвим [10, 11]. Узагальненням теорем Мухамадієва присвячено роботи [12 – 14]. Важливі результати в цьому напрямку також належать Б. М. Левітану [1], Амеріо [15] та В. В. Жикову [16]. Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом та диференціальних рівнянь без використання $\mathcal{H}$-класів цих рівнянь отримано автором у [6, 7].

Умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь (вимога існування таких розв'язків у теоремах 1 і 2 є суттєвою) отримано в [17 – 19].

1. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. — М.: Гостехиздат, 1953. — 396 с.
2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1968. — 496 с.
3. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
4. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. — М.: Наука, 1966. – Т. 3. — 656 с.
5. *Слюсарчук В. Е.* Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем // Укр. мат. журн. — 1983. — **35**, № 1. — С. 109 – 115.
6. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання — 2013. — **16**, № 1. — С. 118 – 124.
7. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 2. — С. 307 – 312.
8. *Amerio L.* Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. mat. pura ed appl. — 1955. — **39**. — P. 97 – 119.
9. *Favard J.* Sur les équations différentielles à coefficients presquepériodiques // Acta math. — 1927. — **51**. — P. 31 – 81.
10. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. — 1972. — **11**, № 3. — С. 269 – 274.
11. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Мат. заметки. — 1981. — **30**, № 3. — С. 443 – 460.
12. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. — 1981. — **116(158)**, № 4(12). — С. 483 – 501.
13. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. — 1986. — **130**(172), № 1(5). — С. 86 – 104.
14. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. — 1987. — **42**, № 2. — С. 262 – 267.
15. *Amerio L.* Sull equazioni differenziali quasi-periodiche astratte // Ric. mat. — 1960. — **30**. — P. 288 – 301.
16. *Жиков В. В.* Доказательство теоремы Фавара о существовании почти-периодического решения в случае произвольного банахова пространства // Мат. заметки. — 1978. — **23**, № 1. — С. 121 – 126.

17. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2009. — Вип. 454. — С. 88 – 94.

18. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 3. — С. 368 – 378.

19. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локального лінійного наближення нелінійних різницевих операторів слабко регулярними операторами // Нелінійні коливання. — 2012. — **15**, № 1. — С. 112 – 126.

Одержано 21.03.13