УДК 517.9

АСИМПТОТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ У ВИПАДКУ КРАТНОГО СПЕКТРА ГОЛОВНОГО ОПЕРАТОРА

В. П. Яковець

Ун-т менеджменту освіти Нац. акад. пед. наук України
Україна, 01601, Київ, вул. Артема, 52-а

We propose a method for constructing the asymptotics for a solution of a Cauchy problem for linear singularly perturbed differential system if the main part of the system has a multiple eigen value with the corresponding elementary divisor having the same multiplicity.

The method is based on a use of a corresponding branching equation, Newton diagrams, and special vector and matrix notations that significantly facilitate the procedure of finding the coefficients of the corresponding asymptotic expansions.

Предложен метод построения асимптотики решения задачи Коши для линейной сингулярной возмущенной системы дифференциальных уравнений в случае, когда главная матрица системы имеет кратное собственное значение, которому соответствует элементарный делитель такой же кратности.

Метод основан на использовании соответствующего уравнения ветвления, диаграмм Ньютона и специальных векторно-матричных обозначений, которые значительно упрощают процедуру определения коэффициентов соответствующих асимптотических розложений.

Постановка задачі. У даній роботі розглядається задача Коші

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), \quad t \in [t_0; T], \tag{1}$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x_0(\varepsilon), \tag{2}$$

де $x(t,\varepsilon)$, $f(t,\varepsilon)$ — n-вимірні вектори, $A(t,\varepsilon)$ — квадратна матриця n-го порядку з дійсними або комплекснозначними елементами, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ — малий дійсний параметр, h — натуральне число.

Передбачається, що виконуються такі умови:

1°. Матриця $A(t,\varepsilon)$ і вектор $f(t,\varepsilon)$ допускають на заданому відрізку $[t_0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра:

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t), \tag{3}$$

$$f(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(t). \tag{4}$$

2°. Коефіцієнти розвинень (3), (4) нескінченно диференційовні на відрізку $[t_0; T]$.

3°. Головна матриця $A_0(t)$ має при всіх $t \in [t_0; T]$ єдине власне значення $\lambda_0(t)$ кратності n, і йому відповідає один елементарний дільник такої самої кратності.

4°. Початковий вектор $x_0(\varepsilon)$ зображується у вигляді розвинення за степенями ε:

$$x_0(\varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k x_{0k}. \tag{5}$$

На даний час добре розвинуто теорію побудови асимптотики загального розв'язку системи (1). Як відомо, перший результат отримав Дж. Біркгоф [1], вивівши асимптотичні формули, якими зображуються лінійно незалежні розв'язки скалярного диференціального рівняння n-го порядку у випадку простих коренів відповідного характеристичного рівняння. У [2] цей результат було узагальнено на систему вигляду (1).

Асимптотичні формули, отримані в [1, 2], виявились настільки ефективними, що з'явився інтерес щодо їх узагальнення й на випадок кратного спектра головної матриці $A_0(t)$.

У [3] було запропоновано в цьому випадку застосовувати так зване зрізаюче перетворення, за допомогою якого систему з кратним спектром головного оператора за певних умов можна звести до системи, головна матриця якої має простий спектр. Такий же спосіб пропонується і в монографії [4].

Метод безпосередньої побудови асимптотичних розвинень лінійно незалежних розв'язків однорідної системи вигляду

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x \tag{6}$$

у випадку, коли головна матриця $A_0(t)$ має кратне власне значення, якому відповідають кратні елементарні дільники, було розроблено в [5, 6]. Виявилось, що у випадку кратного спектра відповідні розвинення необхідно будувати за дробовими степенями малого параметра, показники яких залежать від структури збурювальних матриць $A_1(t), A_2(t), \ldots$.

У зв'язку з цим виникла проблема визначення дробових степенів, за якими слід будувати відповідні розвинення в залежності від структури збурювальних матриць. Цю проблему було розв'язано в [7] з використанням методу діаграм Ньютона.

Коефіцієнти рівняння розгалуження, виведеного в [7], містять повну інформацію щодо дробових показників степенів параметра, за якими слід побудувати асимптотичні розвинення лінійно незалежних розв'язків системи (6).

Пізніше [8] було виведено більш компактні і зручніші для практичного використання формули, якими виражаються коефіцієнти рівняння розгалуження.

Паралельно з розвитком теорії асимптотичного аналізу загального розв'язку системи (1) окремими авторами досліджувалось питання побудови асимптотики розв'язку початкової задачі (1), (2). Зокрема, у [9] для цього використано метод регуляризації, за допомогою якого сингулярно збурена задача зводиться до регулярно збуреної задачі з частинними похідними. Однак цей метод виявився ефективним лише у випадку простого спектра головної матриці. Спроба поширити його на випадок кратного спектра граничного оператора, здійснена в [10], призводить до надзвичайної громіздкості і величезних труднощів технічного характеру.

У [11, 12] побудова асимптотики розв'язку задачі (1), (2) здійснюється з використанням асимптотики загального розв'язку системи (1), але й у цих роботах у випадку кратного власного значення матриці $A_0(t)$ застосовується досить складна і громіздка техніка.

У даній роботі пропонується більш загальний і, на думку автора, більш раціональний підхід до побудови розв'язку даної задачі з використанням відповідного рівняння розгалуження, діаграм Ньютона та спеціальних векторно-матричних методів.

Рівняння розгалуження і асимптотика загального розв'язку. З умови 4° випливає, що власному значенню $\lambda_0(t)$ матриці $A_0(t)$ відповідає жорданів ланцюжок завдовжки n, який складається із власного вектора $\varphi_1(t)$ та приєднаних векторів $\varphi_i(t)$, $i = \overline{2,n}$, що задовольняють співвідношення

$$\begin{gathered}(A_0(t) - \lambda_0(t)E)\varphi_1(t) = 0, \\ (A_0(t) - \lambda_0(t)E)\varphi_i(t) = \varphi_{i-1}(t), i = \overline{2,n},\end{gathered} \tag{7}$$

де E — одинична $(n \times n)$-матриця. При цьому рівняння

$$(A_0(t) - \lambda_0(t)E)y = \varphi_n(t) \tag{8}$$

нерозв'язне при всіх $t \in [t_0; T]$.

Визначивши власний вектор $\varphi_1(t)$ так, щоб усі його координати були нескінченно диференційовними, що є цілком можливим завдяки нескінченній диференційовності матриці $A_0(t)$ [13], і позначивши його для зручності символом $\varphi(t)$, приєднані вектори виразимо через нього за формулою $\varphi_i(t) = (H(t))^{i-1}\varphi(t)$, $i = \overline{2,n}$, де $H(t)$ — напівобернена матриця до матриці $A_0(t) - \lambda_0(t)E$, яку також визначимо так, щоб усі її елементи були нескінченно диференційовними [13, 14].

Із розв'язності рівнянь (7) і нерозв'язності рівняння (8) випливає, що скалярні добутки $(H^{i-1}\varphi, \psi) \equiv 0$ при $i = \overline{1, n-1}$, а $(H^{n-1}\varphi, \psi) \neq 0 \; \forall t \in [t_0; T]$, де $\psi(t)$ — власний вектор матриці $A_0^*(t)$, спряженої з $A_0(t)$. З огляду на те, що вектор $\psi(t)$ визначається з точністю до довільного скалярного множника, визначимо його так, щоб $(H^{n-1}\varphi, \psi) = 1$ і $\psi(t) \in C^\infty[t_0; T]$. Тоді, беручи до уваги, що [15, с. 36]

$$H^k = 0 \quad \text{при} \quad k \geq n, \tag{9}$$

маємо

$$(H^{i-1}\varphi, \psi) = \delta_{i,n}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

де δ_{ij} — символ Кронекера.

Виходячи з цього, у [8, с. 123] доведено, що однорідна система рівнянь (6) має формальний розв'язок вигляду

$$x_i(t, \varepsilon) = u_i(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_{t_0}^{t} (\lambda_0(\tau) + \lambda^{(i)}(\tau, \varepsilon))\, d\tau\right) \tag{11}$$

тоді і тільки тоді, коли функції $\lambda^{(i)}(t, \varepsilon)$ формально задовольняють рівняння розгалуження

$$(\lambda^{(i)})^n + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{0s} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{ks}[(\lambda^{(i)})^k] = 0, \tag{12}$$

коефіцієнти якого виражаються формулами

$$L_{ks}[(\lambda^{(i)})^k] = (\widetilde{L}_{ks}[(\lambda^{(i)})^k]\varphi, \psi), \tag{13}$$

$$\widetilde{L}_{0s} = \sum_{j=1}^{s}(-1)^j P_j^s(H\Gamma), s = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

$$\widetilde{L}_{ks}[(\widetilde{\lambda}^{(i)})^k] = \sum_{j=0}^{[\frac{s}{h}]}\sum_{r=0}^{s-jh}(-1)^r D^j[(\lambda^{(i)})^k]P_{j+k,r}^{s-jh}(H, H\Gamma), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad s = 0, 1, \ldots. \tag{15}$$

Символом $P_{j,r}^s(H, H\Gamma)$ тут позначено суму всіх можливих „добутків" (з перестановками) j матричних множників H і r операторних множників $H\Gamma_{k_1}, H\Gamma_{k_2}, \ldots, H\Gamma_{k_j}$ з натуральними індексами, сума яких дорівнює s. При цьому перший множник H у всіх цих множників „відбирається", а

$$\Gamma_k(t) = A_k(t) - \delta_{k,h}\frac{d}{dt}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

$P_j^s(H\Gamma)$ — утворена аналогічним чином сума всіх можливих „добутків" j операторних множників $H\Gamma_{k_1}, H\Gamma_{k_2}, \ldots, H\Gamma_{k_j}$, сума індексів яких дорівнює s, з усіх доданків яких „відбирається" перший множник H. За означенням покладається $P_0^s(H\Gamma) = 0$ при $s > 0$, $P_0^0(H\Gamma) = E$ і аналогічно $P_{0,0}^s(H, H\Gamma) = 0$ при $s > 0$, $P_{0,0}^0(H, H\Gamma) = E$. Наприклад, $P_2^3(H\Gamma) = \Gamma_2 H\Gamma_1 + \Gamma_1 H\Gamma_2$, $P_{2,2}^3(H, H\Gamma) = H^2\Gamma_1 H\Gamma_2 + \Gamma_1 H^2\Gamma_2 + \Gamma_1 H\Gamma_2 H + H^2\Gamma_2 H\Gamma_1 + {}+\Gamma_2 H^2\Gamma_1 + \Gamma_2 H\Gamma_1 H$.

$D^j[\lambda^k]$ — скалярний вираз, що є сумою всіх можливих „добутків" k функцій $\lambda(t, \varepsilon)$ і j операторів диференціювання $D = \dfrac{d}{dt}$, причому останнім множником у всіх доданках цього виразу має бути λ. Наприклад, $D^2[\lambda^2] = D^2\lambda^2 + D\lambda D\lambda + \lambda D^2\lambda = (\lambda^2)'' + (\lambda\lambda')' + \lambda\lambda''$.

У [8] також встановлено, що коли функція $\lambda^{(i)}(t, \varepsilon)$ задовольняє рівняння розгалуження (12), то відповідний вектор $u_i(t, \varepsilon)$ зображується у вигляді формального розвинення

$$u_i(t, \varepsilon) = \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} H\widetilde{L}_{k0}[(\lambda^{(i)})^k]\varphi + \sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s H\widetilde{L}_{0s}\varphi + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s H\widetilde{L}_{ks}[(\lambda^{(i)})^k]\varphi. \tag{17}$$

Оскільки згідно з (15)

$$\widetilde{L}_{k0}[(\widetilde{\lambda}^{(i)})^k] = (\lambda^{(i)})^k P_{k,0}^0(H, H\Gamma) = (\lambda^{(i)})^k H^{k-1},$$

то, взявши до уваги (9), розвинення (17) подамо у вигляді

$$u_i(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{n-1}(\lambda^{(i)})^k H^k\varphi + \sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s H\widetilde{L}_{0s}\varphi + \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k H\widetilde{L}_{ks}[(\lambda^{(i)})^k]\varphi. \tag{18}$$

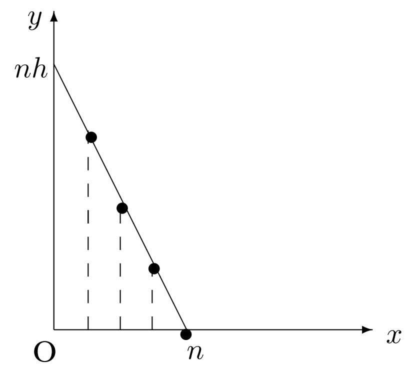

Рис. 1

Застосовуючи до рівняння розгалуження (12) метод діаграм Ньютона, описаний у [7, 16], наносячи на координатну площину цілочисельні координати точок $(k; s)$, що відповідають відмінним від нуля коефіцієнтам L_{ks} даного рівняння, встановлюємо, що це рівняння завжди має n малих розв'язків. Це випливає з того, що незалежно від поведінки елементів матриць $A_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, які входять до складу операторів $\Gamma_k(t)$, на координатній площині завжди є точка $(n; 0)$, а також точки $(k; (n-k)h)$, $k = \overline{1, n-1}$, розміщені на прямій $h(x-n) + y = 0$ (рис. 1), оскільки згідно з (15), (13), (10) відповідні коефіцієнти виражаються формулою

$$L_{k,h(n-k)}[\lambda^k] = \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{r=0}^{(n-k-j)h} (-1)^r D^j[\lambda^k] P_{j+k,r}^{(n-k-j)h}(H; H\Gamma) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-k} D^j[\lambda^k](P_{j+k,0}^{(n-k-j)h}(H; H\Gamma)\varphi, \psi) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{r=1}^{(n-k-j)h} (-1)^r [\lambda^k](P_{j+k,r}^{(n-k-j)h}(H; H\Gamma)\varphi, \psi) =$$

$$= D^{n-k}[\lambda^k] + \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{r=1}^{(n-k-j)h} (-1)^r [\lambda^k](P_{j+k,r}^{(n-k-j)h}(H; H\Gamma)\varphi, \psi),$$

в якій перший доданок не залежить від збурювальних операторів. Тому згідно з методом діаграм Ньютона рівняння (12) завжди має n різних розв'язків $\lambda^{(i)}(t, \varepsilon)$, лише один з яких може бути нульовим (коли всі $L_{0s} = 0$ і, отже, на осі ординат не буде жодної точки). Оскільки $\lambda_0(t) + \lambda^{(i)}(t, \varepsilon)$ є власними значеннями оператора $A_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma_k(t)$, а $u_i(t, \varepsilon)$ — відповідними їм власними векторами, то ці вектори будуть лінійно незалежними. Отже, знайдені таким чином розв'язки (11) системи (6) утворюють фундаментальну систему її розв'язків.

Побудова цих розв'язків здійснюється шляхом знаходження функцій $\lambda^{(i)}(t, \varepsilon)$ і відповідних їм векторів $u_i(t, \varepsilon)$ у вигляді формальних розвинень за дробовими степенями па-

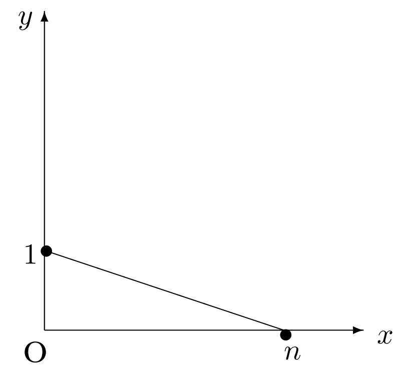

Рис. 2

раметра ε. Показники цих степенів залежать від коефіцієнтів рівняння розгалуження і визначаються за допомогою діаграм Ньютона.

Для прикладу розглянемо два найпростіших випадки.

1. Припустимо, що

$$L_{01}(t) = -(\Gamma_1(t)\varphi(t), \psi(t)) = -(A_1(t)\varphi(t), \psi(t)) + (\varphi'(t), \psi(t)) \neq 0 \;\; \forall t \in [t_0; T]. \tag{19}$$

Тоді відповідна діаграма Ньютона — це відрізок, що з'єднує точки $(0;1)$ і $(n;0)$ (рис. 2), оскільки точки, зображені на рис. 1, лежать вище цього відрізка.

Тангенс кута, який утворює цей відрізок з від'ємним напрямом осі абсцис, дорівнює $\frac{1}{n}$. Тому відповідно до методу Ньютона рівняння розгалуження (12) має n розв'язків, які можна побудувати у вигляді розвинень за степенями $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{n}}$:

$$\lambda^{(i)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_k^{(i)}(t). \tag{20}$$

При цьому перший коефіцієнт цих розвинень повинен задовольняти визначальне рівняння, яке в даному випадку має вигляд

$$(\lambda_1^{(j)}(t))^n + L_{01}(t) = 0. \tag{21}$$

Завдяки умові (19) воно має n різних відмінних від нуля коренів

$$\lambda_1^{(j)}(t) = \sqrt[n]{|L_{01}|}\left(\cos\frac{\arg(-L_{01}) + 2\pi(j-1)}{n} + i\sin\frac{\arg(-L_{01}) + 2\pi(j-1)}{n}\right), \;\; j = \overline{1, n}. \tag{22}$$

Згідно з (18) за степенями μ можна побудувати й відповідні розвинення для векторів $u_i(t, \varepsilon)$:

$$u_i(t, \varepsilon) = \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k u_k^{(i)}(t). \tag{23}$$

Коефіцієнти розвинень (20), (23) можна знайти так, як це зроблено у [5, 6], а саме, підставити вираз (11) у вихідну систему, прирівняти в одержаній тотожності коефіцієнти при однакових степенях μ і розв'язати утворену в такий спосіб нескінченну систему алгебраїчних рівнянь. Однак, маючи виведене рівняння розгалуження і готовий вираз (18) для векторів $u_i(t, \varepsilon)$, доцільніше діяти інакше: функції $\lambda_k^{(i)}(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, знайти методом невизначених коефіцієнтів, підставивши (20) у рівняння розгалуження, а вектори $u_k^{(i)}(t)$ — підставивши знайдене розвинення (20) у (18) і, перегрупувавши доданки, зібрати вирази з однаковими степенями μ.

Підставивши розвинення (20) у рівняння (12) і врахувавши, що

$$(\mu\lambda_1^{(i)} + \mu^2\lambda_2^{(i)} + \ldots)^k = \sum_{j=k}^{\infty} \mu^k P_k^j(\lambda^{(i)}),$$

де

$$P_k^j(\lambda^{(i)}) = \sum_{s_1+\ldots+s_k=j} \lambda_{s_1}^{(i)}\lambda_{s_2}^{(i)}\ldots\lambda_{s_k}^{(i)}$$

— сума всіх можливих добутків k множників $\lambda_{s_1}^{(i)}\lambda_{s_2}^{(i)}\ldots\lambda_{s_k}^{(i)}$, сума індексів яких дорівнює j, дістанемо

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mu^k P_n^k(\lambda^{(i)}) + \sum_{s=1}^{\infty} \mu^{ns} L_{0s} + \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} \mu^{ns+j} L_{ks}[P_k^j(\lambda^{(i)})] = 0. \tag{24}$$

Змінивши порядок підсумовування в третьому доданку цієї рівності, запишемо її у вигляді

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mu^k P_n^k(\lambda^{(i)}) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu^k L_{0,\frac{k}{n}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^k \sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{n}]} \sum_{j=1}^{k-ns} L_{js}[P_j^{k-ns}(\lambda^{(i)})] = 0, \tag{25}$$

де $L_{0,\frac{k}{n}} = 0$, якщо k не ділиться на n, а оператор L_{js} діє на кожний доданок виразу $P_j^{k-ns}(\lambda^{(i)})$ за тим самим правилом, що й на $(\lambda^{(i)})^k$ згідно з (13), (15).

Прирівнявши в (25) вирази при однакових степенях μ, дістанемо нескінченну систему рівнянь

$$P_n^k(\lambda^{(i)}) + L_{0,\frac{k}{n}} + \sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{n}]} \sum_{j=1}^{k-ns} L_{js}[P_j^{k-ns}(\lambda^{(i)})] = 0, \quad k = n, n+1, \ldots. \tag{26}$$

Перше рівняння цієї системи (при $k = n$) збігається з визначальним рівнянням (21). Поклавши в ній $n + k$ замість k, отримаємо

$$P_n^{n+k}(\lambda^{(i)}) + L_{0,\frac{k+n}{n}} + \sum_{s=1}^{[\frac{n+k-1}{n}]} \sum_{j=1}^{n+k-ns} L_{js}[P_j^{n+k-ns}(\lambda^{(i)})] = 0.$$

Неважко переконатися, що третій доданок у лівій частині цієї рівності містить тільки ті $\lambda_j^{(i)}$, індекси яких j не перевищують k. Що ж стосується першого доданка, то його можна подати у вигляді

$$P_n^{n+k}(\lambda^{(i)}) = n(\lambda_1^{(i)})^{n-1}\lambda_{k+1}^{(i)} + \widetilde{P}_n^{n+k}(\lambda^{(i)}), \tag{27}$$

де $\widetilde{P}_n^{n+k}(\lambda^{(i)})$ також містить лише ті $\lambda_j^{(i)}$, індекси яких $j \le k$. Звідси, врахувавши (27), дістанемо таку рекурентну формулу для визначення коефіцієнтів $\lambda_{k+1}^{(i)}$, $k = 1, 2, \ldots$:

$$\lambda_{k+1}^{(i)}(t) = -\frac{1}{n(\lambda_1^{(i)})^{n-1}}\left[\widetilde{P}_n^{n+k}(\lambda^{(i)}) + L_{0,\frac{k+n}{n}} + \sum_{s=1}^{[\frac{n+k-1}{n}]}\sum_{j=1}^{n+k-ns} L_{js}[P_j^{n+k-ns}(\lambda^{(i)})]\right]. \tag{28}$$

Підставляючи розвинення (20) у вираз (18) і групуючи в ньому доданки з однаковими степенями μ, отримуємо

$$u_i(t,\varepsilon) = \varphi + \sum_{k=1}^{n-1}\mu^k\sum_{j=1}^{k}P_j^k(\lambda^{(i)})H^j\varphi +$$
$$+\sum_{k=n}^{\infty}\mu^k\left[\sum_{j=1}^{n-1}P_j^k(\lambda^{(i)})H^j\varphi + H\widetilde{L}_{0,\frac{k}{n}}\varphi + \sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{n}]}\sum_{j=1}^{k-sn}H\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-sn}(\lambda^{(i)})]\varphi\right],$$

звідки випливає, що коефіцієнти ряду (23) виражаються через власний вектор $\varphi(t)$ за формулами

$$u_k^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^{k}P_j^k(\lambda^{(i)})H^j\varphi, \quad k = \overline{1, n-1}, \tag{29}$$

$$u_k^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^{n-1}P_j^k(\lambda^{(i)})H^j\varphi + H\widetilde{L}_{0,\frac{k}{n}}\varphi + \sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{n}]}\sum_{j=1}^{k-sn}H\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-sn}(\lambda^{(i)})]\varphi, \ \ k = n, n+1, \ldots. \tag{30}$$

Зазначимо, що цей результат збігається з відповідною теоремою, доведеною іншим способом у [5, с. 124 – 140; 6, с. 131 – 141].

2. Припустимо, що $n > 2$ і

$$L_{01}(t) = -(\Gamma_1\varphi, \psi) \equiv 0, \tag{31}$$

$$L_{02}(t) = -(\Gamma_2\varphi, \psi) + (\Gamma_1 H\Gamma_1\varphi, \psi) \ne 0 \ \ \forall t \in [t_0; T], \tag{32}$$

$$L_{11}(t) = ((H\Gamma_1 + \Gamma_1 H)\varphi, \psi) \ne 0 \ \ \forall t \in [t_0; T]. \tag{33}$$

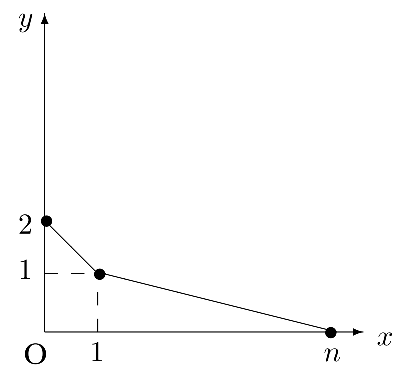

Рис. 3

У цьому випадку відповідна діаграма складається з двох ланок — відрізків, що з'єднують точки $(0; 2)$ і $(1; 1)$ та $(1; 1)$ і $(n; 0)$ (рис. 3).

Оскільки нахил першої ланки дорівнює 1, а другої — $\dfrac{1}{p}$, $p = n - 1$, то p розв'язків рівняння розгалуження можна побудувати у вигляді розвинення (20) за степенями $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{p}}$, а один — за цілими степенями ε:

$$\lambda_n(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k^{(n)}(t). \tag{34}$$

При цьому перші коефіцієнти цих розвинень знаходяться з відповідних визначальних рівнянь

$$\lambda_1^{(i)}(t) L_{11} + (\lambda_1^{(i)}(t))^n = 0, \tag{35}$$

$$L_{02}(t) + \lambda_1(t) L_{11}(t) = 0. \tag{36}$$

Завдяки умовам (32), (33) з цих рівнянь знайдемо n різних функцій $\lambda_1^{(j)}(t)$:

$$\lambda_1^{(j)}(t) = \sqrt[p]{|L_{11}|} \left(\cos \frac{\arg(-L_{11}) + 2\pi(j-1)}{p} + i \sin \frac{\arg(-L_{11}) + 2\pi(j-1)}{p} \right), \ j = \overline{1,p}, \tag{37}$$

$$\lambda_1^{(n)}(t) = -\frac{L_{02}}{L_{11}}. \tag{38}$$

Для знаходження наступних коефіцієнтів відповідних розвинень застосуємо той же метод, що і в попередньому випадку. Підставивши ряд (20) у рівняння розгалуження, отримаємо тотожність, яка відрізняється від (25) тільки тим, що в другому і третьому доданках у лівій частині число n замінено на p:

$$\sum_{k=n}^{\infty}\mu^k P_n^k(\lambda^{(i)})+\sum_{k=p}^{\infty}\mu^k L_{0,\frac{k}{p}}+\sum_{k=p+1}^{\infty}\mu^k\sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{p}]}\sum_{j=1}^{k-sp}L_{js}[P_j^{k-sp}(\lambda^{(i)})]=0. \tag{39}$$

Прирівнявши в цій тотожності вирази при однакових степенях μ і взявши до уваги (31), прийдемо до нескінченної системи рівнянь, перше з яких збігається з (35), а наступні мають вигляд

$$P_n^k(\lambda^{(i)})+L_{0,\frac{k}{p}}+\sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{p}]}\sum_{j=1}^{k-sp}L_{js}[P_j^{k-sp}(\lambda^{(i)})]=0,\quad k=p+2,p+3,\ldots.$$

Поклавши в них $k+p$ замість k і взявши до уваги, що $n=p+1$, дістанемо

$$P_{p+1}^{p+k}(\lambda^{(i)})+L_{0,\frac{p+k}{p}}+\sum_{s=1}^{[\frac{p+k-1}{p}]}\sum_{j=1}^{p+k-sp}L_{js}[P_j^{p+k-sp}(\lambda^{(i)})]=0.$$

Відокремлюючи доданки, які містять $\lambda_k^{(i)}$, маємо

$$(p+1)(\lambda_1^{(i)})^p\lambda_k^{(i)}+\lambda_k^{(i)}L_{11}+\widetilde{P}_{p+1}^{p+k}(\lambda^{(i)})+L_{0,\frac{p+k}{p}}+$$
$$+\sum_{s=2}^{[\frac{p+k-1}{p}]}\sum_{j=1}^{p+k-sp}L_{js}[P_j^{p+k-sp}(\lambda^{(i)})]+\sum_{j=2}^{k}L_{j1}[P_j^k(\lambda^{(i)})]=0.$$

Враховуючи, що згідно з (35) $(\lambda_1^{(i)})^p=-L_{11}$, звідси знаходимо

$$\lambda_k^{(i)}(t)=\frac{1}{pL_{11}}\left[\widetilde{P}_{p+1}^{p+k}(\lambda^{(i)})+L_{0,\frac{p+k}{p}}+\sum_{j=2}^{k}L_{j1}[P_j^k(\lambda^{(i)})]+\right.$$
$$\left.+\sum_{s=2}^{[\frac{p+k-1}{p}]}\sum_{j=1}^{p+k-sp}L_{js}[P_j^{p+k-ps}(\lambda^{(i)})]\right],\quad k=2,3,\ldots. \tag{40}$$

Аналогічно, підставивши в рівняння (12) розвинення (34), дістанемо

$$\sum_{k=n}^{\infty}\varepsilon^k P_n^k(\lambda^{(n)})+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k L_{0k}+\sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{s=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s}L_{js}[P_j^{k-s}(\lambda^{(n)})]=0.$$

Ця тотожність одержується з (39), якщо в останній покласти $p=1$ і μ замінити на ε. Прирівнявши в ній вирази при однакових степенях ε і взявши до уваги (31), прийдемо до нескінченної системи рівнянь, перше з яких (при $k = 2$) збігається з визначальним рівнянням (36), а наступні мають вигляд

$$P_n^k(\lambda^{(n)}) + L_{0k} + \sum_{s=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s} L_{js}[P_j^{k-s}(\lambda^{(n)})] = 0, \quad k = 3, 4, \ldots . \tag{41}$$

Поклавши в них $k+1$ замість k і виділивши доданки, які містять $\lambda_k^{(n)}$, отримаємо

$$\lambda_k^{(n)}(t) = -\frac{1}{L_{11}}\Bigg[P_n^{k+1}(\lambda^{(n)}) + L_{0,k+1} + \sum_{j=2}^{k} L_{j1}[P_j^k(\lambda^{(n)})] + $$
$$+ \sum_{s=2}^{k}\sum_{j=1}^{k+1-s} L_{js}[P_j^{k+1-s}(\lambda^{(n)})]\Bigg], \quad k = 2, 3, \ldots . \tag{42}$$

Підставивши розвинення (20) у вираз (18) і перегрупувавши доданки, як і в попередньому випадку, одержимо відповідні розвинення для векторів $u_i(t, \varepsilon)$:

$$u_i(t,\varepsilon) = \varphi + \sum_{k=1}^{p-1}\mu^k \sum_{j=1}^{k} P_j^k(\lambda^{(i)})H^j\varphi + \sum_{k=p}^{\infty}\mu^k\left[\sum_{j=1}^{p} P_j^k(\lambda^{(i)})\right]H^j\varphi +$$
$$+ H\widetilde{L}_{0,\frac{k}{p}}\varphi + \sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{p}]}\sum_{j=1}^{k-sp} H\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-sp}(\lambda^{(i)})]\varphi, \quad i = \overline{1,p}.$$

Так само, підставивши у (18) розвинення (34), дістанемо відповідне розвинення для вектора $u_n(t, \varepsilon)$:

$$u_n(t,\varepsilon) = \varphi + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\left[\sum_{j=1}^{\min(k,n-1)} P_j^k(\lambda^{(n)})H^j\varphi + H\widetilde{L}_{0k}\varphi + \sum_{s=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s} H\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-s}(\lambda^{(n)})]\varphi\right]. \tag{43}$$

Аналогічно можна розглянути будь-який інший випадок, пов'язаний з поведінкою коефіцієнтів рівняння розгалуження (12). Методами [8, 15] можна довести, що коли функція $\operatorname{Re}\lambda_0(t)$ зберігає сталий знак на заданому відрізку $[t_0; T]$, то формальні розв'язки системи (6), які будуються описаним способом, є асимптотичними розвиненнями при $\varepsilon \to 0$ фундаментальної системи точних розв'язків системи (6).

Для побудови загального розв'язку неоднорідної системи (1) необхідно ще знайти її частинний розв'язок. Припустивши для спрощення викладок, що

$$\det A_0(t) \neq 0 \ \ \forall t \in [t_0; T], \tag{44}$$

цей розв'язок легко побудуємо у вигляді розвинення

$$v(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(t). \tag{45}$$

Підставивши його в систему (1) і прирівнявши вирази при однакових степенях ε, дістанемо такі рекурентні формули для визначення коефіцієнтів $v_k(t)$:

$$v_0(t) = -A_0^{-1}(t)f_0(t),$$

$$v_k(t) = -A_0^{-1}[f_k - \sum_{s=1}^{k} A_s v_{k-s} - v'_{k-h}], \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{46}$$

Побудова асимптотики розв'язку задачі Коші. Покажемо тепер, як, користуючись отриманими вище асимптотичними розвиненнями розв'язків системи (6), (1), побудувати асимптотику розв'язку початкової задачі (1), (2).

1. Розглянемо перший випадок, коли виконується умова (19).

Розв'язок задачі (1), (2) будемо шукати у вигляді суми лінійної комбінації побудованих вище розв'язків однорідної системи і частинного розв'язку (45) неоднорідної:

$$x(t,\varepsilon) = \frac{1}{\mu^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} u_i(t,\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_{t_0}^{t} (\lambda_0(\tau) + \lambda^{(i)}(\tau,\varepsilon))d\tau\right) c_i(\varepsilon) + v(t,\varepsilon), \tag{47}$$

де $c_i(\varepsilon)$ — скалярні множники, які підлягають визначенню. Наявність множника $\mu^{-(n-1)}$ обумовлена тим, що вектори $u_i(t,\varepsilon)$ будуть лінійно незалежними, якщо у їх відповідних розвиненнях (23) береться не менше ніж n членів. Як показано в [14], обернена матриця до матриці, складеної з цих векторів, має полюс $(n-1)$-го порядку в точці $\mu = 0$.

Підставивши вектор (47) у початкову умову (2), дістанемо

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(t_0,\varepsilon)c_i(\varepsilon) = \mu^{n-1}(x_0(\varepsilon) - v(t_0,\varepsilon)). \tag{48}$$

Підставивши сюди вирази (18), якими зображуються вектори $u_i(t,\varepsilon)$, будемо мати

$$\left(\Phi(t_0)\Lambda(t_0,\varepsilon) + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \left[\sum_{k=0}^{\infty} H\widetilde{L}_{ks}[(\lambda^{(1)})^k]\varphi, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} H\widetilde{L}_{ks}[(\lambda^{(n)})^k]\varphi \right]\right) c(\varepsilon) =$$

$$= \mu^{n-1}(x_0(\varepsilon) - v(t_0,\varepsilon)), \tag{49}$$

де

$$c(\varepsilon) = \operatorname{col}(c_1(\varepsilon), \ldots, c_n(\varepsilon)),$$

$$\Phi(t) = [\varphi, H\varphi, \ldots, H^{n-1}\varphi], \tag{50}$$

$$\Lambda(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda^{(1)}(t,\varepsilon) & \ldots & \lambda^{(n)}(t,\varepsilon) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\lambda^{(1)}(t,\varepsilon))^{n-1} & \ldots & (\lambda^{(n)}(t,\varepsilon))^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Розкладемо матриці біля $c(\varepsilon)$ в ряд за степенями параметра μ. Підставивши знайдені вище розвинення (20) для функцій $\lambda_i(t,\varepsilon)$, отримаємо

$$\Lambda(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \sum_{k=1}^{\infty}\mu^k P_1^k(\lambda^{(1)}) & \dots & \sum_{k=1}^{\infty}\mu^k P_1^k(\lambda^{(n)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=n-1}^{\infty}\mu^k P_{n-1}^k(\lambda^{(1)}) & \dots & \sum_{k=n-1}^{\infty}\mu^k P_{n-1}^k(\lambda^{(n)}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu^{n-1} \end{pmatrix} (\Lambda_0 + \mu\Lambda_1 + \mu^2\Lambda_2 + \dots),$$

$$\Lambda_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^{(1)}(t) & \dots & \lambda_1^{(n)}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\lambda_1^{(1)}(t))^{n-1} & \dots & (\lambda_1^{(n)}(t))^{n-1} \end{pmatrix}, \tag{51}$$

$$\Lambda_s(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ P_1^{s+1}(\lambda^{(1)}) & \dots & P_1^{s+1}(\lambda^{(n)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{n-1}^{n-1+s}(\lambda^{(1)}) & \dots & P_{n-1}^{n-1+s}(\lambda^{(n)}) \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2, \dots, \tag{52}$$

$$\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s \left[\sum_{k=0}^{\infty} H\widetilde{L}_{ks}[(\lambda^{(1)})^k]\varphi, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} H\widetilde{L}_{ks}[(\lambda^{(n)})^k]\varphi\right] =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}\mu^k \left[\sum_{s=1}^{[\frac{k}{n}]}\sum_{j=0}^{k-sn} H\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-sn}(\lambda^{(1)})]\varphi, \dots, \sum_{s=1}^{[\frac{k}{n}]}\sum_{j=0}^{k-sn} H\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-sn}(\lambda^{(n)})]\varphi\right].$$

Помноживши тепер рівність (49) зліва на матриці $\Phi^{-1}(t_0,\varepsilon)$ і $\operatorname{diag}\{1, \mu^{-1}, \dots, \mu^{-(n-1)}\}$, запишемо її у вигляді

$$\left(\Lambda_0 + \mu\Lambda_1 + \ldots + \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu^{-1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mu^{-(n-1)} \end{pmatrix} \Phi^{-1} H \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{k=n}^{\infty} \mu^k \left[\sum_{s=1}^{[\frac{k}{n}]} \sum_{j=0}^{k-sn} \widetilde{L}_{js}[P_j^{k-sn}(\lambda^{(1)})]\varphi, \ldots, \sum_{s=1}^{[\frac{k}{n}]} \sum_{j=0}^{k-sn} \widetilde{L}_{js}[P_j^{k-sn}(\lambda^{(n)})]\varphi \right] \right) c(\varepsilon) =$$

$$= \begin{pmatrix} \mu^{n-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu^{n-2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \Phi^{-1}(x_0(\varepsilon) - v(t_0, \varepsilon)). \tag{53}$$

Введемо вектори

$$b_k^{(i)}(t) = \Phi^{-1} H \sum_{s=1}^{[\frac{k}{n}]} \sum_{j=0}^{k-sn} \widetilde{L}_{js}[P_j^{k-sn}(\lambda^{(i)})]\varphi, \quad i = \overline{1,n}, \quad k = n, n+1, \ldots, \tag{54}$$

позначивши їх координати $(b_k^{(i)})_j$, $j = \overline{1,n}$. Використавши ці позначення і змінивши індекси, другий матричний вираз у лівій частині рівності (53) подамо у вигляді

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=n}^{\infty} \mu^k [(b_k^{(1)})_1 \ldots (b_k^{(n)})_1] \\ \sum_{k=n}^{\infty} \mu^{k-1} [(b_k^{(1)})_2 \ldots (b_k^{(n)})_2] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{k=n}^{\infty} \mu^{k-(n-1)} [(b_k^{(1)})_n \ldots (b_k^{(n)})_n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{s=n}^{\infty} \mu^s [(b_s^{(1)})_1 \ldots (b_s^{(n)})_1] \\ \sum_{s=n-1}^{\infty} \mu^s [(b_{s+1}^{(1)})_2 \ldots (b_{s+1}^{(n)})_2] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s [(b_{s+n-1}^{(1)})_n \ldots (b_{s+n-1}^{(n)})_n] \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s B_s(t_0),$$

де

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \\ (b_n^{(1)})_n & \ldots & (b_n^{(n)})_n \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \\ (b_n^{(1)})_{n-1} & \ldots & (b_n^{(n)})_{n-1} \\ (b_{n+1}^{(1)})_n & \ldots & (b_{n+1}^{(n)})_n \end{pmatrix},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$B_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ (b_n^{(1)})_2 & \ldots & (b_n^{(n)})_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (b_{2n-2}^{(1)})_n & \ldots & (b_{2n-2}^{(n)})_n \end{pmatrix},$$

$$B_s = \begin{pmatrix} (b_s^{(1)})_1 & \dots & (b_s^{(n)})_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ (b_{s+n-1}^{(1)})_n & \dots & (b_{s+n-1}^{(n)})_n \end{pmatrix}, \quad s = n, n+1, \dots .$$

Позначивши вектор у правій частині (53) через $d(\varepsilon)$ і врахувавши (5), (45), аналогічним чином подамо його у вигляді розвинення

$$d(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k d_k, \tag{55}$$

де

$$d_k = \mathrm{col}\left(\left(a_{\frac{k-(n-1)}{n}}\right)_1, \left(a_{\frac{k-(n-2)}{n}}\right)_2, \dots, \left(a_{\frac{k-1}{n}}\right)_{n-1}, \left(a_{\frac{k}{n}}\right)_n\right),$$

$$a_s = \Phi^{-1}(x_{0s} - v_s(t_0)), \quad s = 0, 1, \dots, \tag{56}$$

$(a_s)_j$ — j-та координата вектора a_s. Зокрема, $d_0 = \mathrm{col}\,(0, \dots, 0, (a_0)_n)$.

В результаті рівність (53) набирає вигляду

$$\left(\Lambda_0(t_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k U_k(t_0)\right) c(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k d_k(t_0), \tag{57}$$

де

$$U_k(t) = \Lambda_k(t) + B_k(t), \quad k = 1, 2, \dots .$$

Подавши вектор $c(\varepsilon)$ у вигляді розвинення

$$c(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k c^{(k)}, \quad c^{(k)} = \mathrm{col}\left(c_1^{(k)}, \dots, c_n^{(k)}\right), \tag{58}$$

підставивши його в (57) і прирівнявши в одержаній тотожності вирази при однакових степенях μ, дістанемо

$$\Lambda_0(t_0) c^{(0)} = d_0(t_0),$$

$$\Lambda_0(t_0) c^{(k)} = d_k(t_0) - \sum_{j=1}^{k} U_j c^{(k-j)}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Оскільки завдяки (19), (22) матриця Вандермонда $\Lambda_0(t)$ є неособливою, то звідси знайдемо

$$c^{(0)} = \Lambda_0^{-1}(t_0) d_0(t_0),$$

$$c^{(k)} = \Lambda_0^{-1}(t_0)\left(d_k(t_0) - \sum_{j=1}^{k} U_j(t_0) c^{(k-j)}\right), \quad k = 1, 2, \dots . \tag{59}$$

Підставивши знайдені розвинення

$$c_i(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k c_i^{(k)}$$

у (47), отримаємо формальний ряд, яким зображується розв'язок задачі (1), (2).

2. Припустимо, що виконуються умови (31) – (33) і $n > 2$.

Розв'язок початкової задачі (1), (2), як і в попередньому випадку, будемо шукати у вигляді (47), маючи на увазі, що в даному випадку $\mu = \dfrac{1}{\varepsilon^{n-1}}$ і функції $\lambda^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$, зображуються формальними розвиненнями вигляду (20) за степенями μ, а $\lambda^{(n)}(t,\varepsilon)$ — за степенями ε.

Підставивши вектор (47) у початкову умову (2) і використавши формулу (18), прийдемо до рівності (49) з такими самими матрицями $\Phi(t_0)$ і $\Lambda(t,\varepsilon)$, що й у попередньому випадку. Але розвинення для матриці $\Lambda(t,\varepsilon)$ тепер буде іншим. Підставивши у (50) відповідні розвинення функцій $\lambda_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$, дістанемо

$$\Lambda(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu^{n-1} \end{pmatrix} (\Lambda_0 + \mu\Lambda_1 + \dots),$$

де

$$\Lambda_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \lambda_1^{(1)} & \dots & \lambda_1^{(n-1)} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\lambda_1^{(1)})^{n-1} & \dots & (\lambda_1^{(n-1)})^{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_s(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_1^{s+1}(\lambda^{(1)}) & \dots & P_1^{s+1}(\lambda^{(n-1)}) & P_1^{\frac{s+1}{n-1}}(\lambda^{(n)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n-1}^{s+n-1}(\lambda^{(1)}) & \dots & P_{n-1}^{s+n-1}(\lambda^{(n-1)}) & P_{n-1}^{\frac{s+n-1}{n-1}}(\lambda^{(n)}) \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2, \dots$$

(елементи останнього стовпця цих матриць відмінні від нуля тільки в тому випадку, коли в них верхні символи є цілими числами, більшими за нижні).

Аналогічно, підставивши розвинення функцій $\lambda_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$, у другий матричний вираз рівності (49), будемо мати

$$\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s\left[\sum_{k=0}^{\infty}H\widetilde{L}_{ks}[(\lambda^{(1)})^k]\varphi,\ldots,\sum_{k=0}^{\infty}H\widetilde{L}_{ks}[(\lambda^{(n)})^k]\varphi\right]=$$

$$=\left(\sum_{k=n-1}^{\infty}\mu^k\sum_{s=1}^{[\frac{k}{n-1}]}\sum_{j=0}^{k-s(n-1)}H\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-s(n-1)}(\lambda^{(1)})]\varphi,\ \ldots\right.$$

$$\ldots,\sum_{k=n-1}^{\infty}\mu^k\sum_{s=1}^{[\frac{k}{n-1}]}\sum_{j=0}^{k-s(n-1)}H\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-s(n-1)}(\lambda^{(n-1)})]\varphi,$$

$$\left.\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{(n-1)k}\left[H\widetilde{L}_{0k}+\sum_{s=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s}H\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-s}(\lambda^{(n)})]\varphi\right]\right).$$

Позначивши

$$b_k^{(i)}=\Phi^{-1}H\sum_{s=1}^{[\frac{k}{n-1}]}\sum_{j=0}^{k-s(n-1)}\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-s(n-1)}(\lambda^{(i)})],\quad i=\overline{1,n-1},\quad k=n-1,n,\ldots,\tag{60}$$

$$b_k^{(n)}=\Phi^{-1}H\left[\widetilde{L}_{0k}\varphi+\sum_{s=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s}\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-s}(\lambda^{(n)})]\varphi\right],\quad k=1,2,\ldots,\tag{61}$$

цей вираз подамо у вигляді

$$\Phi\left[\sum_{k=n-1}^{\infty}\mu^k b_k^{(1)},\ldots,\sum_{k=n-1}^{\infty}\mu^k b_k^{(n-1)},\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{(n-1)k}b_k^{(n)}\right].$$

Помноживши тепер рівність (49) зліва на матриці $\Phi^{-1}(t_0)$ та $\mathrm{diag}\{1,\mu^{-1},\ldots,\mu^{-(n-1)}\}$ і виконавши такі самі перетворення, як і в попередньому випадку, зведемо її до вигляду

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\Lambda_k(t_0)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k B_k(t_0)\right)c(\varepsilon)=d(\varepsilon),$$

де

$$B_k=\begin{pmatrix}(b_k^{(1)})_1 & \ldots & (b_k^{(n-1)})_1 & (b^{(n)}_{\frac{k}{n-1}})_1\\ (b_{k+1}^{(1)})_2 & \ldots & (b_{k+1}^{(n-1)})_2 & (b^{(n)}_{\frac{k+1}{n-1}})_2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ (b_{k+n-1}^{(1)})_n & \ldots & (b_{k+n-1}^{(n-1)})_n & (b^{(n)}_{\frac{k+n-1}{n-1}})_n\end{pmatrix},\quad k=0,1,\ldots,$$

а вектор $d(\varepsilon)$ зображується у вигляді розвинення (55), коефіцієнти якого виражаються через координати векторів (56):

$$d_k = \operatorname{col}\left(\left(a_{\frac{k-(n-1)}{n-1}}\right)_1, \left(a_{\frac{k-(n-2)}{n-1}}\right)_2, \ldots, \left(a_{\frac{k}{n-1}}\right)_n\right), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Зокрема, як і в попередньому випадку, $d_0 = \operatorname{col}(0, \ldots, 0, (a_0)_n)$.

Таким чином, для визначення вектора $c(\varepsilon)$ маємо рівняння

$$\left(U_0(t_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k U_k(t_0)\right) c(\varepsilon) = d(\varepsilon), \tag{62}$$

де $U_k(t) = \Lambda_k(t) + B_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots$.

З'ясуємо, що являє собою матриця $U_0(t)$. Оскільки згідно з (60), (61)

$$b_{n-1}^{(i)}(t) = \Phi^{-1} H \widetilde{L}_{01} \varphi, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad b_1^{(n)} = \Phi^{-1} H \widetilde{L}_{01} \varphi,$$

то всі елементи останнього рядка матриці $B_0(t_0)$ рівні між собою. Позначивши їх символом b і взявши до уваги, що згідно з (35) $(\lambda_1^{(i)}(t))^{n-1} = -L_{11}(t)$, будемо мати

$$U_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \lambda_1^{(1)} & \ldots & \lambda_1^{(n-1)} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\lambda_1^{(1)})^{n-2} & \ldots & (\lambda_1^{(n-1)})^{n-2} & 0 \\ b - L_{11} & \ldots & b - L_{11} & b \end{pmatrix}.$$

Розкладаючи визначник цієї матриці за елементами останнього стовпця, знаходимо

$$\det U_0(t) = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} \lambda_1^{(1)} & \ldots & \lambda_1^{(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\lambda_1^{(1)})^{n-2} & \ldots & (\lambda_1^{(n-1)})^{n-2} \\ b - L_{11} & \ldots & b - L_{11} \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1^{(1)} & \ldots & \lambda_1^{(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\lambda_1^{(1)})^{n-2} & \ldots & (\lambda_1^{(n-1)})^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1^{(1)} & \ldots & \lambda_1^{(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\lambda_1^{(1)})^{n-2} & \ldots & (\lambda_1^{(n-1)})^{n-2} \end{vmatrix} L_{11},$$

звідки випливає, що $\det U_0(t) \neq 0 \; \forall t \in [t_0; T]$ завдяки умові (33). Отже, матриця $U_0(t_0)$ має обернену.

Подавши вектор $c(\varepsilon)$ у вигляді розвинення (58), його коефіцієнти знайдемо з рівняння (62) за формулами вигляду (59), у яких $\Lambda_0(t_0)$ замінено на $U_0(t)$. Підставивши знайдені розвинення у (47), одержимо формальний ряд, яким зображується шуканий розв'язок задачі (1), (2).

Якщо $\mathrm{Re}\,\lambda_0(t) < 0\ \forall t \in [t_0; T]$, то формальні ряди, побудовані в обох розглянутих випадках, будуть асимптотичними розвиненнями точного розв'язку задачі (1), (2) при $\varepsilon \to \to 0$.

Зазначимо, що у більш складних випадках, коли відповідна діаграма Ньютона складається з кількох ланок різної довжини і відповідні розв'язки рівняння розгалуження зображуються розвиненнями за різними дробовими степенями параметра $\varepsilon^{\frac{1}{p_1}}, \varepsilon^{\frac{1}{p_2}}, \ldots, \varepsilon^{\frac{1}{p_s}}$, розв'язок початкової задачі (1), (2) будуватиметься у вигляді розвинення за степенями $\varepsilon^{\frac{1}{p}}$, де p — найбільший спільний дільник чисел $p_1, \ldots, p_s$.

Алгоритм знаходження коефіцієнтів цього розвинення такий самий, як і в розглянутих нами випадках. Подібний алгоритм можна застосувати і до більш складних крайових задач.

1. *Birkhoff G. D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. — 1908. — **9**. — P. 219 – 231.
2. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. — Петроград, 1917. — 308 с.
3. *Turritin H. L.* Asymptotic expansions of solutions systems of ordinary linear differential equations containing a parameter // Contrib. Theory Nonlinear Oscillations. — 1952. — **2**. — P. 1 – 116.
4. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968. — 464 с.
5. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1966. — 249 с.
6. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. — Київ: Вища шк., 1971. — 226 с.
7. *Жукова Г. С.* Метод общего анализа линейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений и систем: Дис.... д-ра физ.-мат. наук. — М., 1990. — 296 с.
8. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
9. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981. — 398 с.
10. *Ломов С. А., Елисеев А. Г.* Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенных задач // Успехи мат. наук. — 1988. — **43**, вып. 3(261). — С. 3 – 53.
11. *Кочерга О. І., Яковець В. П.* Асимптотичне розв'язання задачі Коші для виродженої сингулярно збуреної лінійної системи у випадку кратного спектра головного оператора // Нелінійні коливання. — 1999. — **2**, № 1. — С. 19 – 29.
12. *Kocherga O. I., Yakovets V. P.* The Cauchy problem for the degenerated singularly perturbed linear system in case of the multiple spectrum of the limit bundle of matrixes // Nonlinear Oscillations. — 2001. — **4**, № 2. — P. 226 – 233.
13. *Sibuya Y.* Some global properties of matrixes of functions of one variable // Math. Anal. — 1965. — **161**, № 1. — P. 67 – 77.
14. *Самойленко А. М.* Квазипериодические решения системы линейных алгебраических уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. — С. 5 – 26.
15. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. — Киев: Вища шк., 1991. — 207 с.
16. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

Одержано 14.11.12