УДК 517.9

УСЕРЕДНЕННЯ В БАГАТОЧАСТОТНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ ІЗ ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМИ АРГУМЕНТАМИ

І. В. Березовська

Чернів. нац. ун-т
Україна, 58012, Чернівці, вул. М. Коцюбинського, 2

We study existence of a solution and give a substantiation of the procedure of averaging with respect to fast variables in a multifrequency differential system with linearly transformed arguments and integral boundary-value conditions. The coefficients in the integral boundary-value conditions depend on slow time and both slow and fast variables.

Исследовано существование решения и приведено обоснование метода усреднения по быстрым переменным для многочастотных систем дифференциальных уравнений с линейно преобразованными аргументами и интегральными краевыми условиями. Коэффициенты в интегральных краевых условиях зависят как от медленного времени и медленных переменных, так и от быстрых переменных.

1. Постановка задачі. Багаточастотні системи диференціальних рівнянь за допомогою методу усереднення досліджувались у багатьох працях (див., наприклад, [1–3]).

У статті [4] вперше розглянуто багаточастотну систему з інтегральними крайовими умовами й усереднення за швидкими змінними проведено як у системі, так і в крайових умовах. При цьому одержано ефективну оцінку відхилення для повільних змінних. Подібні постановки задач для систем диференціальних рівнянь із запізненням у резонансному випадку розглядались, зокрема, у працях [5–7]. У монографії [3] та у працях [5–7] розглядалися випадки, коли коефіцієнти біля швидких змінних у крайових умовах залежать тільки від повільного часу і повільних змінних. У даній статті розглядається більш загальний випадок із урахуванням вектора лінійно перетворених аргументів. Для систем без запізнення таку задачу розв'язано в роботі [8].

Нехай λ_i і θ_j — числа з півінтервалу $(0,1]$, $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{r_1} \leq 1$, $0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{r_2} \leq 1$, $a_{\lambda_i}(\tau) = a(\lambda_i \tau)$, $\varphi_{\theta_j}(\tau) = \varphi(\theta_j \tau)$, $a_\Lambda = (a_{\lambda_1}, \ldots, a_{\lambda_{r_1}})$, $\varphi_\Theta = (\varphi_{\theta_1}, \ldots, \varphi_{\theta_{r_2}})$.

Розглянемо m-частотну систему диференціальних рівнянь із лінійно перетвореними аргументами

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \tag{2}$$

де $a \in D$, D — обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $\tau \in [0, L]$, X і Y — 2π-періодичні за швидкими змінними вектор-функції. Системи рівнянь у випадку, коли $r_1 = r_2 = 2$, $\lambda_1 < \lambda_2 = 1$ і $\theta_1 < \theta_2 = 1$, розглянуто у роботах [6, 9].

Задамо для системи (1), (2) інтегральні крайові умови

$$\int_0^L f(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta)\, d\tau = d_1, \tag{3}$$

$$\int_0^L \left[\sum_{j=1}^{r_2} h_j(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta) \varphi_{\theta_j} + g(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta) \right] d\tau = d_2. \tag{4}$$

Тут X, Y, f, g і $h_1, \ldots, h_{r_2}$ — 2π-періодичні за швидкими змінними вектор-функції, d_1 і d_2 — n- і m-вимірні вектори, $a = a(\tau, y, \psi, \varepsilon)$, $\varphi = \varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon)$ — розв'язки рівнянь (1) і (2) відповідно, $a(0, y, \psi, \varepsilon) = y$, $\varphi(0, y, \psi, \varepsilon) = \psi$.

2. Усереднена задача. Усереднимо вектор-функції X, Y, f, g і h_j, $j = 1, \ldots, r_2$, за швидкими змінними. Нехай $F := [X, Y, f, h_1, \ldots, h_{r_2}, g]$, середнє значення набирає вигляду

$$F_0(\tau, a_\Lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{mr_2}} \int_0^{2\pi} F(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta)\, d\varphi_\Theta.$$

Усереднену систему рівнянь запишемо у вигляді

$$\frac{d\overline{a}}{d\tau} = X_0(\tau, \overline{a}_\Lambda), \tag{5}$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y_0(\tau, \overline{a}_\Lambda). \tag{6}$$

Ця система хоч і містить запізнення при $\tau > 0$, але праві частини не залежать від швидких змінних і знаходження компоненти розв'язку $\overline{\varphi}(\tau)$ зводиться до інтегрування, якщо $\overline{\varphi}(0)$ і $\overline{a}(\tau)$ є відомими.

Для розв'язку усередненої системи рівнянь (5), (6) задаються крайові умови, одержані усередненням вектор-функцій $f, h_1, \ldots, h_{r_2}$ і g за швидкими змінними, які мають вигляд

$$\int_0^L f_0(\tau, \overline{a}_\Lambda)\, d\tau = d_1, \tag{7}$$

$$\int_0^L \left[\sum_{j=1}^{r_2} h_{0j}(\tau, \overline{a}_\Lambda) \overline{\varphi}_{\theta_j} + g_0(\tau, \overline{a}_\Lambda) \right] d\tau = d_2. \tag{8}$$

3. Умови і допоміжні результати. Умовою резонансу частот у системі (1), (2) в точці τ є виконання рівності [10, 11]

$$\gamma_l(\tau) := \sum_{j=1}^{r_2} \theta_j (l^{(j)}, \omega(\theta_j \tau)) = 0, \tag{9}$$

де $l = \operatorname{col}(l^{(1)}, \ldots, l^{(r_2)})$, $l^{(j)} \in \mathbb{Z}^m$, $\|l\| := \sum_{j=1}^{r_2} \|l^{(j)}\|$, $\|l\| \neq 0$.

Припустимо, що виконуються наступні умови:

1^0) вектор-функція F належить $\mathbb{C}^1_{\tau, a_\Lambda}(G, \sigma_1)$, де $G = [0, L] \times D^{r_1} \times \mathbb{R}^{mr_2}$, сталою σ_1 обмежено норми вектор-функції F та її похідних по τ і a_Λ;

2^0) F належить $\mathbb{C}^{q_1}_{\varphi_\Theta}(G, \sigma_1)$, $\dfrac{\partial F}{\partial a_\Lambda} \in \mathbb{C}^{q_2}_{\varphi_\Theta}(G, \sigma_1)$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \tau \partial a_\Lambda} \in \mathbb{C}^{q_3}(G, \sigma_1)$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial a_\Lambda \partial a_\nu^{(i)}} \in$ $\in \mathbb{C}^{q_3}(G, \sigma_1)$, $i = 1, \ldots, r_1$, $\nu = 1, \ldots, n$, $\min(q_1 - 2, q_2 - 1, q_3) \geq mr_2$;

3^0) коефіцієнти Фур'є вектор-функції $F(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta)$ задовольняють нерівність

$$\sum_{\|l\| \neq 0} \left[\sup_{G_1} \|F_l\| + \frac{1}{\|l\|_\theta} \left(\sup_{G_1} \left\| \frac{\partial F_l}{\partial \tau} \right\| + \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial F_l}{\partial a_\Lambda} \right\| \right) \right] \leq \sigma_2, \tag{10}$$

де $G_1 = [0, L] \times D^{r_1}$, $\|l\|_\theta = \sum_{j=1}^{r_2} \theta_j \|l^{(j)}\|$;

4^0) умови „незастрягання"системи на резонансі є такими:

$$\begin{gathered} \omega_\nu \in \mathbb{C}^{p-1}[0, L], \quad p \geq mr_2, \\ \|(W_p^T(\tau) W_p(\tau))^{-1} W_p(\tau)\| \leq \sigma_2, \quad \tau \in [0, L], \end{gathered} \tag{11}$$

де $W_p(\tau)$ — $(p \times mr_2)$-матриця, $((\nu-1)m+k)$-й стовпець якої утворено елементами $\dfrac{d\omega_\nu^k(\xi_j)}{d\tau^k}$, $\xi_j(\tau) = \theta_j \tau$, $k = 0, \ldots, p-1$, $\nu = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, r_2$. Якщо $p = mr_2$, то $\det W_p(\tau)$ — визначник Вронського за системою функцій $\{\omega(\theta_1 \tau), \ldots, \omega(\theta_{r_2} \tau)\}$;

5^0) існує єдиний розв'язок $\overline{a} = \overline{a}(\tau, \overline{y})$ крайової задачі (5), (7), $\overline{a}(0, \overline{y}) = \overline{y}$, який лежить в D разом із деяким ρ-околом.

Як показано в [10], при виконанні умови 1^0 та перших двох умов із пп. 2^0 і 3^0 для досить малого $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0]$ на проміжку $[0, L]$ існує єдиний розв'язок системи рівнянь (1), (2) з тими ж початковими умовами (y, ψ), що і для розв'язку усередненої системи, для всіх $\tau \in [0, L]$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ виконується оцінка

$$\|a(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \overline{a}(\tau, y)\| + \|\varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, y, \psi, \varepsilon)\| \leq c_1 \varepsilon^\alpha, \tag{12}$$

де $\alpha = p^{-1}$, $c_1 > 0$ і не залежить від ε.

Якщо ж виконуються і дві останні умови з п. 2^0, то така ж оцінка є правильною і для похідних відхилення розв'язків за початковими умовами y і ψ. Вважатимемо, що для цієї оцінки коефіцієнт також дорівнює c_1.

4. Існування розв'язку крайової задачі та обґрунтування методу усереднення. Якщо розв'язок крайової задачі (5), (7) знайдено, то розв'язання задачі (6), (8) зводиться до знаходження початкового значення $\overline{\psi}(\varepsilon)$ та інтегрування. Введемо позначення

$$Q_1 = \int_0^L \sum_{j=1}^{r_2} h_{0j}(\tau, \overline{a}_\Lambda(\tau, \overline{y})) \, d\tau.$$

Як і у [8, с. 25], доводиться наступна лема.

Лема. *Нехай виконуються умови $1^0, 5^0$ і матриця Q_1 є невиродженою. Тоді існує єдиний розв'язок крайової задачі (6), (8), до того ж*

$$\|\overline{\psi}(\varepsilon)\| \leq \|Q_1^{-1}\| \left(\|d_2\| + 4L^2\sigma_1^2\varepsilon^{-1}\sum_{j=1}^{r_2}\theta_j \right). \tag{13}$$

Теорема 1. *Нехай:*

1) виконуються умови $1^0 - 5^0$;

2) матриці Q_1 і

$$Q_2 = \int_0^L \frac{\partial f_0(\tau, \overline{a}_\Lambda(\tau, \overline{y}))}{\partial \overline{a}_\Lambda} \frac{\partial \overline{a}_\Lambda(\tau, \overline{y})}{\partial \overline{y}} \, d\tau$$

є невиродженими.

Тоді для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3]$, $0 < \varepsilon_3 \leq \varepsilon_1$, існують розв'язок $\{a(\tau, y, \psi, \varepsilon), \varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon)\}$ задачі (1) – (4) і функція $\xi(\varepsilon) : (0, \varepsilon_3] \to \mathbb{R}^m$ такі, що виконуються нерівності

$$\|a(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \overline{a}(\tau, \overline{y})\| + \|\varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon) - \xi(\varepsilon)\| \leq c_2\varepsilon^\alpha,$$

$$\|\xi(\varepsilon)\| \leq c_3\varepsilon^{\alpha - 1}$$

при $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_3]$ зі сталими c_2, c_3, які не залежать від ε, $\alpha = p^{-1}$.

Доведення. Оцінку відхилення повільних змінних одержують згідно зі схемою доведення з роботи [10] з нерівності

$$\|a(\tau, \overline{y} + \mu, \psi, \varepsilon) - \overline{a}(\tau, \overline{y})\| \leq \|a(\tau, \overline{y} + \mu, \psi, \varepsilon) - \overline{a}(\tau, \overline{y} + \mu)\| + \|\overline{a}(\tau, \overline{y} + \mu) - \overline{a}(\tau, \overline{y})\|, \tag{14}$$

де $\mu \in \mathbb{R}^n$ знаходиться з умови, що вектор-функція $a(\tau, \overline{y} + \mu, \varphi, \varepsilon)$ задовольняє крайову умову (3). Якщо виконуються умови $1^0 - 5^0$, то існує єдине значення μ, до того ж $\|\mu\| \leq$ $\leq c_4\varepsilon^\alpha$, якщо $\varepsilon \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$. Тоді з нерівності (14) й оцінки для μ маємо $\|a(\tau, \overline{y} + \mu, \psi, \varepsilon) -$ $- \overline{a}(\tau, \overline{y})\| \leq c_5\varepsilon^\alpha$, і ця оцінка є правильною для всіх $\tau \in [0, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ і $\varphi \in \mathbb{R}^m$.

Розглянемо тепер питання про оцінку відхилення швидких змінних $\varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon)$ та $\overline{\varphi}\,(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon)$. Нехай $\psi(\varepsilon) = \overline{\psi}(\varepsilon) + \xi(\varepsilon)$. Введемо позначення $M = (\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi)$, $\widetilde{M} =$ $= (\tau, \overline{y} + \mu)$ і $\overline{M} = (\tau, \overline{y})$ — точки в $\mathbb{R}^{n+m+1}$ і $\mathbb{R}^{n+1}$ відповідно, $\widetilde{h}(\tau, a, \varphi) = h(\tau, a, \varphi) - h_0(\tau, a)$. Підставивши $\varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon)$ у крайові умови (4) і віднявши від одержаної рівності (8), матимемо

$$\xi = \Phi(\xi, \mu, \varepsilon),$$

де

$$\Phi(\xi,\mu,\varepsilon) = -Q_1^{-1}\Bigg\{ \sum_{j=1}^{r_2}\int_0^L h_j(\tau,a_\Lambda(M),\varphi_\Theta(M))(\varphi_{\theta_j}(M)-\overline{\varphi}_{\theta_j}(M))\,d\tau +$$

$$+\sum_{j=1}^{r_2}\int_0^L \Big(h_j(\tau,a_\Lambda(M),\varphi_\Theta(M)) - h_j(\tau,\overline{a}_\Lambda(\widetilde{M}),\overline{\varphi}_\Theta(M))\Big)\,\overline{\varphi}_{\theta_j}(M)\,d\tau +$$

$$+\sum_{j=1}^{r_2}\int_0^L \widetilde{h}_j\Big(\tau,\overline{a}_\Lambda(\widetilde{M}),\overline{\varphi}_\Theta(M)\Big)\,\overline{\varphi}_{\theta_j}(M)\,d\tau +$$

$$+\sum_{j=1}^{r_2}\int_0^L h_{j0}(\tau,\overline{a}_\Lambda(\overline{M}))(\overline{\varphi}_{\theta_j}(\tau,\overline{y}+\mu,0,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},0,\varepsilon))\,d\tau +$$

$$+\sum_{j=1}^{r_2}\int_0^L \Big(h_{j0}(\tau,\overline{a}_\Lambda(\widetilde{M}))\Big) - h_{j0}(\tau,\overline{a}_\Lambda(\overline{M})))\overline{\varphi}_{\theta_j}(M)\,d\tau +$$

$$+\int_0^L \big(g(\tau,a_\Lambda(M),\varphi_\Theta(M)) - g_0(\tau,\overline{a}_\Lambda(\overline{M}))\big)\,d\tau\Bigg\}.$$

Через $I_\nu, \nu = 1,\ldots,6$, позначимо відповідні доданки виразу у фігурних дужках. Нехай $S = \{\xi : \|\xi\| \le c_3\varepsilon^{\alpha-1}\}$ — куля в $\mathbb{R}^m$. Покажемо, що $\Phi : S \to S$ для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_3]$, c_3 і ε_3 будуть вказані нижче.

З умови 1^0 на підставі оцінки (12) одержимо

$$\|I_1\| \le Lr_2\sigma_1 c_1\varepsilon^\alpha. \tag{15}$$

Врахувавши оцінку (13), отримаємо

$$\|\overline{\varphi}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)\| \le \|\xi\| + c_6 + c_7\varepsilon^{-1},$$

де $c_6 = \|Q_1^{-1}\|\|d_2\|$, $c_7 = 2L\sigma_1\left(2\|Q_1^{-1}\|L\sigma_1\sum_{j=1}^{r_2}\theta_j + 1\right)$. Тоді

$$\|I_2\| \le 2r_2\sigma_1 c_1 L\varepsilon^\alpha(\|\xi\| + c_6 + c_7\varepsilon^{-1}). \tag{16}$$

Для оцінки інтеграла I_3 застосуємо оцінку осциляційного інтеграла [5]

$$\left\|\int_0^L b_l(\tau,\varepsilon)e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_0^\tau \gamma_l(z)dz}\,ds\right\| \le \sigma_3\varepsilon^\alpha\left(\sup_{G_2}\|b_l(\tau,\varepsilon)\| + \frac{1}{\|l\|_\theta}\sup_{G_2}\left\|\frac{db_l(\tau,\varepsilon)}{d\tau}\right\|\right),$$

де $G_2 = [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$, $\sigma_3 > 0$ і не залежить від l, τ і ε,

$$b_l(\tau, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{r_2} h_{jl}(\tau, \overline{a}_\Lambda(\widetilde{M}))\overline{\varphi}_{\theta_j}(M) \exp\left[i \sum_{j=1}^{r_2} (l^{(j)}, \overline{\varphi}_{\theta_j}) - \frac{i}{\varepsilon} \int\limits_0^\tau \gamma_l(z)\, dz \right].$$

В результаті отримаємо

$$\|I_3\| \leq \sigma_3 \varepsilon^\alpha \left((1+\sigma_1)\|\xi\| + (1+\sigma_1)c_6 + ((1+\sigma_1)c_7 + 2\sigma_1)\varepsilon^{-1} \right) \times$$
$$\times \sum_{j=1}^{r_2} \sum_{l \neq 0} \left[\sup_{G_2} \|h_{jl}\| + \frac{1}{\|l\|_\theta} \left(\sup_{G_2} \left\| \frac{\partial h_{jl}}{\partial \tau} \right\| + \sup_{G_2} \left\| \frac{\partial h_{jl}}{\partial \overline{a}_\Lambda} \right\| \right) \right].$$

Використовуючи оцінку (10), маємо

$$\|I_3\| \leq r_2 \sigma_2 \sigma_3 \varepsilon^\alpha \left((1+\sigma_1)\|\xi\| + (1+\sigma_1)c_6 + ((1+\sigma_1)c_7 + 2\sigma_1)\varepsilon^{-1} \right). \tag{17}$$

Оскільки μ вибрано так, що $\|\mu\| \leq c_4 \varepsilon^\alpha$, то

$$\|I_4\| \leq r_2 L \sigma_1 c_8 \varepsilon^\alpha, \tag{18}$$

де

$$c_8 = L\sigma_1 c_4 \sup_{G_3} \left\| \frac{\partial \overline{a}_\Lambda}{\partial \overline{y}} \right\|, \quad G_3 = [0, L] \times D_1, \quad \overline{y} \in D_1 \subset D.$$

Аналогічно

$$\|I_5\| \leq r_2 c_8 \varepsilon^\alpha (\|\xi\| + c_6 + c_7 \varepsilon^{-1}). \tag{19}$$

Насамкінець

$$I_6 = \int\limits_0^L \Big(g(\tau, a_\Lambda(M), \varphi_\Theta(M)) - g(\tau, \overline{a}_\Lambda(\widetilde{M}), \overline{\varphi}_\Theta(M)) \Big)\, d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^L \Big(g_0(\tau, \overline{a}_\Lambda(\widetilde{M})) - g_0(\tau, \overline{a}_\Lambda(\widetilde{M})) \Big)\, d\tau + \int\limits_0^L \widetilde{g}(\tau, \overline{a}_\Lambda(\widetilde{M}), \overline{\varphi}_\Theta(M))\, d\tau,$$

тому

$$\|I_6\| \leq (2\sigma_1 c_1 L + c_8 + \sigma_2 \sigma_3 (1+\sigma_1))\varepsilon^\alpha. \tag{20}$$

На підставі оцінок (15) – (20) одержуємо

$$\|\Phi(\xi, \mu, \varepsilon)\| \leq c_9 \varepsilon^\alpha + c_{10}\varepsilon^\alpha \|\xi\| + c_{11}\varepsilon^{\alpha-1} \leq c_{10}\varepsilon^\alpha \|\xi\| + 2c_{11}\varepsilon^{\alpha-1},$$

де

$$c_9 = \|Q_1^{-1}\|(\sigma_1 c_1 L r_2(3+2c_6) + c_8(\sigma_1 L r_2 + c_6 r_2 + 1) + \sigma_2\sigma_3(1+\sigma_1)(1+c_6 r_2)),$$

$$c_{10} = \|Q_1^{-1}\| r_2(2\sigma_1 c_1 L + \sigma_2\sigma_3(1+\sigma_1) + c_8),$$

$$c_{11} = \|Q_1^{-1}\| r_2(2\sigma_1 c_1 c_7 L + \sigma_2\sigma_3((1+\sigma_1)c_7 + 2\sigma_1) + c_7 c_8).$$

Нехай $c_3 = 4c_{11}$, $\varepsilon_3 = \min(\varepsilon_2, (2c_{10})^{-1/\alpha})$. Тоді

$$\|\Phi(\xi,\mu,\varepsilon)\| \le 4c_{11}\varepsilon^{\alpha-1} = c_3\varepsilon^{\alpha-1}$$

для всіх $\|\xi\| \le c_3\varepsilon^{\alpha-1}$ і $\varepsilon \in (0,\varepsilon_3]$, тобто для довільного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_3]$ $\Phi : S \to S$, де S — куля радіуса $c_3\varepsilon^{\alpha-1}$. Оскільки відображення Φ є неперервним по ξ, то за теоремою Брауера [12] існує початкове значення $\psi = \overline{\psi} + \xi$. Тоді існує розв'язок $\{a(\tau,y,\psi,\varepsilon),\ \varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon)\}$ системи (1), (2), який задовольняє крайові умови (3), (4).

Далі маємо

$$\|\varphi(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon) - \xi(\varepsilon)\| \le \|\varphi(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)\| +$$

$$+ \|\overline{\varphi}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon) - \xi(\varepsilon)\| \le (c_1+c_8)\varepsilon^{\alpha}.$$

Оцінку з теореми одержуємо при $c_2 := c_1 + c_5 + c_8$.

Приклад. Розглянемо крайову задачу

$$\frac{da}{d\tau} = \cos(\varphi_1 - 8\varphi_{1,\theta} - \varphi_2 + 8\varphi_{2,\theta}), \quad \tau \in [0,1], \quad \theta = \frac{1}{2},$$

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau} = \frac{1+\tau+12\tau^2+8\tau^3}{\varepsilon} + \cos(\varphi_1 - 8\varphi_{1,\theta} - \varphi_2 + 8\varphi_{2,\theta}),$$

$$\frac{d\varphi_2}{d\tau} = \frac{1+\tau}{\varepsilon} + \cos(\varphi_1 - 8\varphi_{1,\theta} - \varphi_2 + 8\varphi_{2,\theta}), \tag{21}$$

$$\int_0^1 (a + k_0\cos(\varphi_1 - 8\varphi_{1,\theta} - \varphi_2 + 8\varphi_{2,\theta}))d\tau = d_0, \quad \int_0^1 \varphi_1 d\tau = d_1,$$

$$\int_0^1 (1 + k_1\cos(\varphi_1 - 8\varphi_{1,\theta} - \varphi_2 + 8\varphi_{2,\theta}))(-\varphi_1 + 16\varphi_{1,\theta} + \varphi_2 - 16\varphi_{2,\theta})\, d\tau = d_2, \tag{22}$$

де k_i і d_j — деякі ненульові сталі, $i = 0,1$, $j = 0,1,2$.

Відповідна (21), (22) усереднена задача має вигляд

$$\frac{d\overline{a}}{d\tau} = 0, \quad \int\limits_0^1 \overline{a}\, d\tau = d_0, \quad \frac{d\overline{\varphi}_1}{d\tau} = \frac{1+\tau+12\tau^2+8\tau^3}{\varepsilon}, \quad \int\limits_0^1 \overline{\varphi}_1\, d\tau = d_1,$$
$$\frac{d\overline{\varphi}_2}{d\tau} = \frac{1+\tau}{\varepsilon}, \quad \int\limits_0^1 (-\overline{\varphi}_1 + 16\overline{\varphi}_{1,\theta} + \overline{\varphi}_2 - 16\overline{\varphi}_{2,\theta})\, d\tau = d_2. \tag{23}$$

Оскільки $\gamma(\tau) = 4\tau^3$, то в системі (21) є резонанс при $\tau = 0$, $\gamma(0) = 0$. За системою функцій $\{\omega_1(\tau), \omega_1(\tau/2), \omega_2(\tau), \omega_2(\tau/2)\}$ визначник Вронського $\det W_4(\tau) = -72 \neq 0$, тому умова 4^0 виконується.

Знайдемо відхилення повільної змінної при $\tau = 1$:

$$a(1,\varepsilon) - \overline{a}(1) = (1-k_0)\int\limits_0^1 \cos\left(\frac{s^4}{\varepsilon} - 7(\varphi_1^0 + \varphi_2^0)\right) ds - \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \cos\left(\frac{s^4}{\varepsilon} - 7(\varphi_1^0 + \varphi_2^0)\right) ds\, d\tau.$$

На підставі оцінок інтеграла Френеля [13] маємо $|a(1,\varepsilon) - \overline{a}(1)| \leq |2 + k_0|\widetilde{c}\sqrt[4]{\varepsilon}$, де $\widetilde{c} = \Gamma(5/4)$.

Позначимо $\xi_1(\varepsilon) = \varphi_1^0 - \overline{\varphi}_1^0$. З крайових умов (22) та (23) знаходимо

$$\varphi_1^0 = d_1 - \frac{31}{15\varepsilon} - \int\limits_0^1\int\limits_0^\tau \cos\left(\frac{s^4}{\varepsilon} - 7(\varphi_1^0 + \varphi_2^0)\right) ds\, d\tau, \quad \overline{\varphi}_1^0 = d_1 - \frac{31}{15\varepsilon}.$$

Тоді

$$\xi_1(\varepsilon) = \int\limits_0^1\int\limits_0^\tau \cos\left(\frac{s^4}{\varepsilon} - 7(\varphi_1^0 + \varphi_2^0)\right) ds\, d\tau, \quad |\xi_1(\varepsilon)| \leq \widetilde{c}\sqrt[4]{\varepsilon}.$$

Враховуючи цю оцінку, одержуємо

$$|\varphi_1(\tau,\varepsilon) - \overline{\varphi}_1(\tau,\varepsilon)| = \left|\int\limits_0^\tau \cos\left(\frac{s^4}{\varepsilon} - 7(\varphi_1^0 + \varphi_2^0)\right) ds + \xi_1(\varepsilon)\right| \leq 2\widetilde{c}\sqrt[4]{\varepsilon}.$$

Позначимо

$$\xi_2(\varepsilon) = \varphi_2^0 - \overline{\varphi}_2^0, \quad c_1(\varepsilon) = \int\limits_0^1 \cos\left(\frac{\tau^4}{\varepsilon} - 7(\varphi_1^0 + \varphi_2^0)\right) d\tau,$$

$$c_2(\varepsilon) = \int\limits_0^1\int\limits_0^\tau \cos\left(\frac{s^4}{\varepsilon} - 7(\varphi_1^0 + \varphi_2^0)\right) d\tau,$$

$$c_3(\varepsilon) = 2\sin\frac{1}{2\varepsilon}\,\cos\left(\frac{1}{2\varepsilon} - 7(\varphi_1^0 + \varphi_2^0)\right).$$

З крайових умов (22) та (23) знаходимо

$$\varphi_2^0 = \frac{1 + \varepsilon c_3(\varepsilon) - d_2\varepsilon}{15\varepsilon(1 + k_1 c_1(\varepsilon))} + d_1 - \frac{31}{15\varepsilon} - c_2(\varepsilon), \quad \overline{\varphi}_2^0 = d_1 - \frac{d_2}{15} - \frac{2}{\varepsilon}.$$

Тоді

$$\xi_2(\varepsilon) = \frac{1 + \varepsilon c_3(\varepsilon) - d_2\varepsilon}{15\varepsilon(1 + k_1 c_1(\varepsilon))} + \frac{d_2\varepsilon - 1 - 15\varepsilon c_2(\varepsilon)}{15\varepsilon}.$$

Виберемо $\varepsilon_1 = \left(\frac{15}{14}\,k_1\widetilde{c}\right)^{-4}$. Тоді для всіх $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ буде виконуватись оцінка

$$|\xi_2(\varepsilon)| \leq \left(2\sqrt[4]{\varepsilon^3} + (15 + |d_2 k_1|)\widetilde{c}\varepsilon + 15|k_1|\varepsilon\sqrt[4]{\varepsilon} + |k_1|\widetilde{c}\right)\frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon^3}}.$$

Нехай

$$\varepsilon \leq \varepsilon_2 = \min\left(\varepsilon_1, \left(\frac{|k_1|\widetilde{c}}{2}\right)^{4/3}, \frac{|k_1|}{15 + |d_2 k_1|}, \left(\frac{\widetilde{c}}{15}\right)^{4/5}\right), \quad \overline{c} = 4|k_1|\widetilde{c},$$

тоді

$$|\xi_2(\varepsilon)| \leq \frac{\overline{c}}{\sqrt[4]{\varepsilon^3}}.$$

Враховуючи цю оцінку, одержуємо

$$|\varphi_2(\tau,\varepsilon) - \overline{\varphi}_2(\tau,\varepsilon)| = \left|\int\limits_0^\tau \cos\left(\frac{s^4}{\varepsilon} - 7(\varphi_1^0 + \varphi_2^0)\right) ds + \xi_2(\varepsilon)\right| \leq (\widetilde{c}\varepsilon + \overline{c})\,\frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon^3}}.$$

Якщо $\varepsilon \leq \varepsilon_3 = \min(\varepsilon_2, \overline{c}/\widetilde{c})$, $c = 2\overline{c}$, то $|\varphi_2(\tau,\varepsilon) - \overline{\varphi}_2(\tau,\varepsilon)| \leq \frac{c}{\sqrt[4]{\varepsilon^3}}$.

Отже, для всіх $\tau \in [0,1]$ і $\varepsilon \in (0,\varepsilon_3)$ для відхилення повільної змінної a і швидких змінних φ_1 і φ_2 маємо оцінку, асимптотика якої узгоджується з висновком теореми.

1. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 431 с.
2. *Хапаев М. М.* Усреднение в теории устойчивости. — М.: Наука, 1986. — 192 с.
3. *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. — Київ: Наук. думка, 2004. — 474 с.
4. *Петришин Р. І., Петришин Я. Р.* Усереднення крайових задач для систем диференціальних рівнянь з повільними та швидкими змінними // Нелінійні коливання. — 1998. — **1,** № 1. — С. 51 – 65.
5. *Бігун Я. Й.* Усереднення коливних систем із запізненням та інтегральними крайовими умовами // Укр. мат. журн. — 2004. — **56,** № 2. — С. 257 – 263.

6. *Бігун Я. Й.* Усереднення в багаточастотних системах із лінійно перетвореним аргументом та інтегральними крайовими умовами // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту. Математика. — 2005. — Вип. 269. — С. 5 – 10.

7. *Данилюк І. М.* Крайова задача з параметрами для нелінійної коливної системи із загаюваннями // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту. Математика. — 2009. — Вип. 454. — С. 19 – 27.

8. *Березовська І. В., Бігун Я. Й.* Дослідження однієї багаточастотної системи рівнянь з інтегральними крайовими умовами методом усереднення // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту. Математика. — 2011. — **1**, № 4. — С. 24 – 28.

9. *Бігун Я. Й.* Існування розв'язку та усереднення нелінійних багаточастотних задач із запізненням // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 4. — С. 435 – 446.

10. *Бігун Я.* Про усереднення початкової і крайової задачі з лінійно перетвореним аргументом // Мат. вісн. НТШ. — 2008. — **5**. — С. 23 – 35.

11. *Бигун Я. И., Самойленко А. М.* Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. — 1999. — **35**, № 1. — С. 8 – 14.

12. *Петровский И. Г.* Лекции по теории дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1970. — 279 с.

13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1974. — Т. 2. — 295 с.

Одержано 26.04.12,
після доопрацювання — 18.02.13