УДК 517.9

ПОБУДОВА ГЛОБАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, ЯКІ МІСТЯТЬ ВІДХИЛЕННЯ ПО ЧАСУ

А. М. Самойленко

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

Л. М. Сергєєва

Чернів. нац. ун-т
Україна, 58012, Чернівці, вул. М. Коцюбинського, 2

One class of partial differential equations with deviating arguments in the time variable is investigated. We find conditions under which it is possible to construct global solutions of these equations. We describe the structure of these solutions and their construction algorithm and we consider some special cases, examples, and theorems about substantiation of this method.

Исследуется один класс дифференциальных уравнений в частных производных, которые содержат отклонения по времени. Найдены условия, при которых возможно построение глобальных решений таких уравнений. Описаны структура этих решений и алгоритм их построения. Рассмотрены некоторые частные случаи, примеры и доказаны теоремы об обосновании метода.

Крайові задачі з відхиленням аргументу часто доводиться розглядати при розв'язуванні балістичних та варіаційних задач. Врахування відхилення у класичних задачах математичної фізики приводить до рівнянь із частинними похідними з відхиленням лише по часу. В багатьох випадках до цих задач можна застосувати метод відокремлення змінних, загальна схема якого майже не відрізняється від схеми застосування цього методу до розв'язування крайових задач без відхилення аргументу. Однак при застосуванні цього методу по просторових координатах виникає звичайна крайова задача, а по часу доводиться розв'язувати основну початкову задачу для рівнянь із відхиленням аргументу.

Крайові задачі для диференціальних рівнянь із відхиленням аргументу розглядалися в роботах Л. Е. Ельсгольца, С. Б. Норкіна, М. Меджитова, Г. А. Каменського, З. Б. Сеїдова, А. М. Самойленка, М. Й. Ронто та інших [1 – 6].

Початок вивченню задач без початкових умов для параболічного рівняння теплопровідності поклав А. Н. Тихонов, який вказав метод дослідження таких задач та знаходження їх розв'язку. В його відомій праці [7] було досліджено єдиність розв'язку задачі без початкових умов (задачі Фур'є) для рівняння теплопровідності.

Задачею без початкових умов для окремих параболічних рівнянь і систем займалися О. А. Олійник, Є. І. Моісєєв, С. Д. Ейдельман, С. Д. Івасишен, В. А. Солонніков, М. М. Бокало, А. Є. Шишков та інші [8 – 15].

У даній роботі описано алгоритм побудови глобального розв'язку для рівняння з частинними похідними із відхиленням аргументу та наведено умови його існування.

Розглянемо рівняння вигляду

$$u_t(x,t) = p(t)u_{xx}(x, t+\mu), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

з нульовими крайовими умовами

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

де $Q = \{(x,t) : 0 < x < l, t \in \mathbb{R}\}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Для знаходження глобального розв'язку задачі (1), (2) застосуємо метод відокремлення змінних, внаслідок чого по просторових координатах одержимо звичайну крайову задачу, а по часу — диференціальне рівняння з відхиленням аргументу. Нашою метою є встановлення умов, при виконанні яких для такого рівняння можна побудувати звичайне диференціальне рівняння без відхилення аргументу, всі розв'язки якого будуть глобальними розв'язками початкового. Після цього можна буде записати загальний вигляд глобального розв'язку задачі (1), (2).

Визначення структури розв'язку задачі (1), (2). Згідно з методом Фур'є [16] частинний розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді $u(x,t) = X(x)T(t)$. Після підстановки в (1)

$$T'(t)X(x) = p(t)T(t+\mu)X''(x)$$

і відокремлення змінних одержимо

$$\frac{T'(t)}{p(t)T(t+\mu)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Звідси маємо рівняння для $T(t)$ і $X(x)$:

$$T'(t) + p(t)\lambda T(t+\mu) = 0, \tag{3}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{4}$$

Задовольнивши крайові умови (2), одержимо

$$T(t)X(0) = 0, \quad T(t)X(l) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $T(t) \neq 0$, бо ми шукаємо ненульові розв'язки, то $X(0) = 0$, $X(l) = 0$. Це будуть крайові умови для рівняння (4). Отримали задачу Штурма – Ліувілля. Знайдемо загальний розв'язок рівняння (4) як рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо для нього характеристичне рівняння $q^2 + \lambda = 0$, звідки $q_1 = -\sqrt{\lambda}i$, $q_2 = \sqrt{\lambda}i$. Тоді

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x. \tag{5}$$

Якщо задовольнити рівністю (5) крайові умови для (4), отримаємо

$$0 = c_1, \quad 0 = c_1 \cos\sqrt{\lambda}l + c_2 \sin\sqrt{\lambda}l.$$

Оскільки $c_2 \neq 0$, то $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$. Звідси маємо, що $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$ — власні значення розглядуваної задачі, їм відповідають власні функції $X_k(x) = c_{2,k}\sin\frac{k\pi x}{l}$. Якщо $c_{2,k} = 1$, то

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{6}$$

Нижче буде встановлено діапазон значень для k.

Розглянемо однорідне диференціальне рівняння першого порядку з відхиленням аргументу (3). А. М. Самойленко у праці [17] показав, що для такого рівняння можна побудувати рівняння без відхилення аргументу, всі розв'язки якого будуть глобальними розв'язками рівняння (3). Таке рівняння матиме вигляд

$$T'(t) + \bar{p}(t)T(t) = 0. \tag{7}$$

Згідно з алгоритмом, наведеним у [17], знайдемо $\bar{p}(t)$.

Загальний розв'язок рівняння (7) визначається формулою Коші

$$T(t) = T_0 e^{-\int_{t_0}^{t}\bar{p}(s)ds}, \quad T_0 = T(t_0), \quad t, t_0 \in \mathbb{R},$$

яка буде задовольняти рівняння (3), якщо

$$T'(t) = -\bar{p}(t)T_0 e^{-\int_{t_0}^{t}\bar{p}(s)ds} = -p(t)\lambda T_0 e^{-\int_{t_0}^{t+\mu}\bar{p}(s)ds}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$\bar{p}(t)e^{\int_{t}^{t_0}\bar{p}(s)ds} = p(t)\lambda e^{\int_{t+\mu}^{t}\bar{p}(s)ds}e^{\int_{t}^{t_0}\bar{p}(s)ds},$$

звідки одержуємо рівняння

$$\bar{p}(t) = p(t)\lambda e^{\int_{t+\mu}^{t}\bar{p}(s)ds}. \tag{8}$$

Якщо всі розв'язки рівняння (7) є глобальними розв'язками рівняння (3), то функція $\bar{p}(t)$ задовольняє рівняння (8). Таким чином, необхідною і достатньою умовою того, щоб всі розв'язки рівняння (7) були глобальними розв'язками рівняння (3), є існування розв'язку рівняння (8), більш того, як показано у [17], функція $\bar{p}(t)$ задовольняє умову

$$|\bar{p}(t)| < \gamma,$$

де γ залежить від β, μ.

Побудуємо глобальний розв'язок задачі (1), (2) у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sin\frac{k\pi x}{l}\, T_k(t), \tag{9}$$

де c_k — довільні сталі, $T_k(t)$ — розв'язок лінійного рівняння

$$T_k'(t) + \bar{p}_k(t)T_k(t) = 0, \tag{10}$$

коефіцієнти якого визначаються з рівняння

$$\bar{p}_k(t) = p(t)\lambda_k e^{\int_{t+\mu}^{t} \bar{p}_k(s)ds}, \quad k \leq n,$$

де значення n буде знайдено нижче.

Знайдемо умови, при виконанні яких розв'язок рівняння (7) буде глобальним розв'язком рівняння (3). Для цього доведемо наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай функція $p(t)$ визначена й обмежена на $\mathbb{R}$, причому*

$$|p(t)| < \beta, \quad \beta = \text{const}, \quad t \in \mathbb{R},$$

і виконується нерівність

$$|\mu|\beta\lambda_n e < 1,$$

де n — ціла частина $\dfrac{l}{\pi\sqrt{|\mu|\beta e}}$.

Тоді існує глобальний розв'язок задачі (1), (2) вигляду (9).

Доведення. Розглянемо рівняння (8). Використавши принцип стискаючих відображень, знайдемо умови, при яких це рівняння матиме єдиний розв'язок. Виконаємо заміну

$$\bar{p}(t) = p(t)\lambda y(t),$$

тоді

$$p(t)\lambda y(t) = p(t)\lambda e^{\int_{t+\mu}^{t} p(s)\lambda y(s)ds},$$

звідки

$$y(t) = e^{\int_{t+\mu}^{t} p(s)\lambda y(s)ds}.$$

Для неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $y(t)$ визначимо оператор

$$(Sy)(t) = e^{\int_{t+\mu}^{t} p(s)\lambda y(s)ds}.$$

Будемо шукати розв'язок у просторі $C(r)$. Нехай $\|y\|_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}} |y(t)| \leq r$. Тоді

$$\|Sy\|_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(e^{\int_{t+\mu}^{t} p\lambda r\, ds}\right) = e^{|\mu|\beta\lambda r}.$$

Якщо виконується нерівність

$$e^{|\mu|\beta\lambda r} \leq r,$$

то оператор $(Sy)(t)$ відображає простір $C(r)$ у себе. Оцінимо різницю $(Sy_1)(t) - (Sy_2)(t)$:

$$\|(Sy_1)(t) - (Sy_2)(t)\| = \left\|e^{\int_{t+\mu}^{t} p(s)\lambda y_1(s)ds} - e^{\int_{t+\mu}^{t} p(s)\lambda y_2(s)ds}\right\| \leq |\mu|\beta\lambda e^{|\mu|\beta\lambda r}\|y_1 - y_2\|_0.$$

Таким чином, при виконанні нерівності

$$|\mu|\beta\lambda e^{|\mu|\beta\lambda r} < 1$$

$(Sy)(t)$ буде оператором стиску в просторі $C(r)$. Розглянемо рівняння

$$e^{|\mu|\beta\lambda r} = r.$$

Воно буде мати розв'язки, але лише для

$$r_1 \le r < \frac{1}{|\mu|\beta\lambda}$$

будуть виконуватись умови стиску і відображення оператором $(Sy)(t)$ простору $C(r)$ у себе. Враховуючи це, отримуємо оцінку, аналогічну до оцінки в теоремі 1 із [17]:

$$|\mu|\beta\lambda e < 1. \tag{11}$$

Отже, при виконанні цієї умови простір $C(r)$ буде повним нормованим простором, і оператор S буде мати в ньому єдину нерухому точку, тобто розв'язок рівняння (8) буде існувати, до того ж він буде єдиним.

Таким чином, параметр λ повинен задовольняти умову

$$\lambda < \frac{1}{|\mu|\beta e}.$$

Оскільки $\lambda_k = \left(\dfrac{\pi k}{l}\right)^2$, то

$$k < \frac{l}{\pi\sqrt{|\mu|\beta e}}. \tag{12}$$

Тому $k \in [1, n]$, де n — ціла частина $\dfrac{l}{\pi\sqrt{|\mu|\beta e}}$.

Отже, розв'язок задачі (1), (2) можна записати у вигляді (9), де k визначається формулою (12).

Щоб розв'язати рівняння (10), потрібно знайти кожне із $\bar{p}_k(t)$. Це можна зробити, використовуючи метод послідовних наближень.

Нехай початкове наближення для $\bar{p}_k(t)$ має вигляд

$$\bar{p}_k^{(0)}(t) = p(t)\lambda_k.$$

Тоді отримаємо

$$\begin{aligned}
&\bar{p}_k^{(1)}(t) = p(t)\lambda_k e^{\int_\mu^0 \bar{p}_k^{(0)}(t+s)ds},\\
&\bar{p}_k^{(2)}(t) = p(t)\lambda_k e^{\int_\mu^0 \bar{p}_k^{(1)}(t+s)ds},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\bar{p}_k^{(m)}(t) = p(t)\lambda_k e^{\int_\mu^0 \bar{p}_k^{(m-1)}(t+s)ds}, \quad k = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{13}$$

Така послідовність є збіжною на $\mathbb{R}$ внаслідок виконання умови (11), при якій справджуються умови принципу стискаючих відображень. Тому границя наближень (13) визначає функцію $\bar{p}_k(t)$, тобто

$$\bar{p}_k(t) = \lim_{m\to\infty} \bar{p}_k^{(m)}(t).$$

Запишемо явно кілька перших наближень:

$$\bar{p}_k^{(1)}(t) = p(t)\lambda_k \exp\left\{\int\limits_{\mu}^{0} p(t+s)\lambda_k ds\right\},$$

$$\bar{p}_k^{(2)}(t) = p(t)\lambda_k \exp\left\{\int\limits_{\mu}^{0} p(t+s)\lambda_k \exp\left\{\int\limits_{\mu}^{0} p(t+s_1)\lambda_k ds_1\right\} ds\right\},$$

$$\bar{p}_k^{(3)}(t) = p(t)\lambda_k \exp\left\{\int\limits_{\mu}^{0} p(t+s)\lambda_k \exp\left\{\int\limits_{\mu}^{0} p(t+s_1)\lambda_k \exp\left\{\int\limits_{\mu}^{0} p(t+s_2)\lambda_k ds_2\right\} ds_1\right\} ds\right\}.$$

Враховуючи те, що $|p(t)| < \beta$, можна отримати таку оцінку:

$$\left|\bar{p}_k^{(1)}(t) - \bar{p}_k^{(0)}(t)\right| = \left|p(t)\lambda_k e^{\int_\mu^0 p(t+s)\lambda_k ds} - p(t)\lambda_k\right| \le \beta\lambda_k\left(e^{|\mu|\beta\lambda_k} - 1\right).$$

Згідно з оцінками методу послідовних наближень для кожного наступного наближення має місце така оцінка:

$$\left\|\bar{p}_k^{(j)}(t) - \bar{p}_k(t)\right\| \le \frac{\alpha^j \|\bar{p}_k^{(1)}(t) - \bar{p}_k^{(0)}(t)\|}{1-\alpha}.$$

Оскільки в даному випадку $\alpha = |\mu|\beta\lambda_k e$, то при $j = 1$

$$\left\|\bar{p}_k^{(1)}(t) - \bar{p}_k(t)\right\| \le \frac{|\mu|\beta^2\lambda_k^2 e}{1-|\mu|\beta\lambda_k e}\left(e^{|\mu|\beta\lambda_k} - 1\right),$$

при $j = 2$

$$\left\|\bar{p}_k^{(2)}(t) - \bar{p}_k(t)\right\| \le \frac{|\mu|^2\beta^3\lambda_k^3 e^2}{1-|\mu|\beta\lambda_k e}\left(e^{|\mu|\beta\lambda_k} - 1\right),$$

при $j = m$

$$\left\|\bar{p}_k^{(m)}(t) - \bar{p}_k(t)\right\| \le \frac{|\mu|^m\beta^{m+1}\lambda_k^{m+1} e^m}{1-|\mu|\beta\lambda_k e}\left(e^{|\mu|\beta\lambda_k} - 1\right). \tag{14}$$

Таким чином, знайшовши наближення до кожного із $\bar{p}_k(t)$, можна записати наближений розв'язок для рівняння (10):

$$T_k(t) = e^{-\int\limits_0^t \bar{p}_k^{(m)}(\tau)d\tau}, \quad k = 1,\ldots,n.$$

Отже, розв'язок задачі (1), (2) набере вигляду

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sin \frac{k\pi x}{l}\, e^{-\int_0^t \bar{p}_k^{(m)}(\tau)d\tau}. \tag{15}$$

Зауваження 1. Якщо функція $p(t)$ у рівнянні (1) є сталою, то в якості $\bar{p}(t)$ також вибираємо сталу функцію. Тоді рівняння (8) набере вигляду

$$\bar{p} = p\lambda e^{-\mu\bar{p}}.$$

Зауваження 2. Нехай функція $p(t)$ у рівнянні (1) є періодичною з періодом $\omega > 0$, тобто $p(t+\omega) = p(t)$. Тоді функція $\bar{p}(t)$ із рівняння (7) теж буде періодичною.

Розв'язок рівняння (7) у цьому випадку має вигляд

$$T(t) = T_0 e^{-\sigma t} + \phi(t),$$

де T_0 — стала, σ — середнє значення функції $\bar{p}(t)$:

$$\sigma = -\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} \bar{p}(s)ds,$$

$\phi(t)$ — періодична функція з періодом ω:

$$\phi(t) = T(t)e^{-\sigma t}.$$

Він буде періодичним тоді і тільки тоді, коли $\sigma = 0$:

$$\int_0^{\omega} \bar{p}(s)ds = 0.$$

Отже, й розв'язок вихідного рівняння (3) з періодичною функцією $p(t)$ теж буде періодичним по t з періодом ω при виконанні цієї умови.

Зауваження 3. Визначимо для задачі (1), (2) початкову умову у вигляді

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,l], \tag{16}$$

де функція $\varphi(x)$ є двічі неперервно диференційовною і задовольняє умови

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0.$$

Якщо задовольнити рядом (15) початкову умову (16), одержимо

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Очевидно, що функцію φ можна розкласти в ряд Фур'є за системою функцій $\left\{\sin\dfrac{k\pi x}{l}, k\in\mathbb{N}\right\}$:

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi x}{l},$$

де коефіцієнти цього розкладу обчислюються за формулами

$$a_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi. \tag{17}$$

Якщо число n є досить великим (зокрема, при $|\mu|<<1$), можна взяти $c_k=a_k$, $k=\overline{1,n}$. Тоді, підставивши (17) у (15), одержимо наближений глобальний розв'язок задачі (1), (2), (16).

Можливий ще один спосіб визначення коефіцієнтів c_k, $k=\overline{1,n}$. Введемо позначення $\overline{u}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\dfrac{k\pi x}{l}e^{-\int\limits_0^t\bar{p}_k^{(m)}(\tau)d\tau}$. Будемо вибирати c_k, $k=\overline{1,n}$, так, щоб значення наступного інтеграла було мінімальним:

$$I=\int\limits_0^l(\overline{u}(x,t)-u(x,t))^2dx.$$

Вимагаючи перетворення в нуль частинних похідних від I по коефіцієнтах c_k, тобто

$$\frac{\partial I}{\partial c_k}=0,\quad k=\overline{1,n}, \tag{18}$$

отримуємо систему, яка дозволяє знайти найкращі значення c_k.

Позначимо $\Psi_k(x,t)=X_k(x)T_k(t)$, $k=\overline{1,n}$, і запишемо умову (18) у вигляді системи

$$\begin{gathered}
c_1\int\limits_0^l\Psi_1^2dx+c_2\int\limits_0^l\Psi_1\Psi_2dx+\ldots+c_n\int\limits_0^l\Psi_1\Psi_ndx=\int\limits_0^l\overline{u}(x,t)\Psi_1(x,t)dx,\\
c_1\int\limits_0^l\Psi_2\Psi_1dx+c_2\int\limits_0^l\Psi_2^2dx+\ldots+c_n\int\limits_0^l\Psi_2\Psi_ndx=\int\limits_0^l\overline{u}(x,t)\Psi_2(x,t)dx,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
c_1\int\limits_0^l\Psi_n\Psi_1dx+c_2\int\limits_0^l\Psi_n\Psi_2dx+\ldots+c_n\int\limits_0^l\Psi_n^2dx=\int\limits_0^l\overline{u}(x,t)\Psi_n(x,t)dx.
\end{gathered} \tag{19}$$

Визначник цієї системи є визначником Грамма для функцій $\{\Psi_k\}_{k=1}^n$ в $L_2[0,l]$, тому система (19) має єдиний розв'язок $(c_1, c_2, \ldots, c_n)_{\min}$. Підставляючи ці значення в (15), одержуємо наближений глобальний розв'язок задачі (1), (2), (16). Характер наближення оцінюється відповідною нормою відхилу $\sqrt{I}$.

Зауваження 4. Розглянемо рівняння з частинними похідними, яке містить декілька відхилень по часу

$$u_t(x,t) = \sum_{i=1}^{N} p_i(t) u_{xx}(x, t+\mu_i), \quad (x,t) \in Q, \tag{20}$$

з нульовими крайовими умовами

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{21}$$

де $Q = \{(x,t) : 0 < x < l, t \in \mathbb{R}\}, \quad \mu_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, i = 1, \ldots, N.$

У цьому випадку після відокремлення змінних для $X(x)$ отримаємо рівняння (4), а для $T(t)$ — рівняння вигляду

$$T'(t) + \lambda \sum_{i=1}^{N} p_i(t) T(t+\mu_i) = 0. \tag{22}$$

Для такого рівняння побудуємо відповідне йому без відхилення аргументу (7), коефіцієнти якого визначаються таким чином:

$$\bar{p}(t) = \lambda \sum_{i=1}^{N} p_i(t) e^{\int_{t+\mu_i}^{t} \bar{p}(s)ds}. \tag{23}$$

Будемо будувати глобальний розв'язок задачі (20), (21) у вигляді (9), де $T_k(t)$ — розв'язок лінійного рівняння вигляду (10), коефіцієнти якого визначаються з рівняння

$$\bar{p}_k(t) = \lambda_k \sum_{i=1}^{N} p_i(t) e^{\int_{t+\mu_i}^{t} \bar{p}_k(s)ds}, \quad k \le n,$$

і задовольняють нерівність

$$|\bar{p}_k(t)| < \tilde{\gamma},$$

де $\tilde{\gamma}$ залежить від β, μ_i, $i = 1, \ldots, N$. Значення n буде знайдено нижче.

Має місце така теорема.

Теорема 2. *Нехай функції $p_i(t)$ неперервні, обмежені на $\mathbb{R}$, причому*

$$|p_i(t)| < \beta_i, \quad \beta_i = \mathrm{const}, \quad i = 1, \ldots, N, \quad t \in \mathbb{R},$$

і такі, що виконується нерівність

$$\lambda_n \sum_{i=1}^{N} \beta_i |\mu_i| e^{|\frac{\mu_i}{\mu}|} < 1, \quad \mu = \max_{i=\overline{1,N}} |\mu_i|,$$

де n — *ціла частина* $\dfrac{l}{\pi\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\beta_i|\mu_i|e^{|\frac{\mu_i}{\mu}|}}}$.

Тоді існує глобальний розв'язок задачі (20), (21) вигляду (9).

Доведення. Схема доведення цієї теореми аналогічна до доведення теореми 1.

Для неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $\bar{p}(t)$ визначимо оператор $(S\bar{p})(t)$:

$$(S\bar{p})(t) = \lambda\sum_{i=1}^{N}p_i(t)e^{\int_{t+\mu_i}^{t}\bar{p}(s)ds}.$$

Нехай $\|\bar{p}\|_0 = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|\bar{p}(t)| \le \tilde{\gamma}$. Тоді

$$\|S\bar{p}\|_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\lambda\sum_{i=1}^{N}p_i(t)e^{\int_{t+\mu_i}^{t}\bar{p}(s)ds}\right| = \lambda\sum_{i=1}^{N}\beta_i e^{|\mu_i|\tilde{\gamma}}.$$

Якщо виконується нерівність

$$\lambda\sum_{i=1}^{N}\beta_i e^{|\mu_i|\tilde{\gamma}} \le \tilde{\gamma}, \tag{24}$$

то оператор $(S\bar{p})(t)$ відображає простір $C(\tilde{\gamma})$ в себе.

Оцінимо різницю $(S\bar{p}_1)(t) - (S\bar{p}_2)(t)$:

$$\|(S\bar{p}_1)(t) - (S\bar{p}_2)(t)\| = \left\|\lambda\sum_{i=1}^{N}p_i(t)e^{\int_{t+\mu_i}^{t}\bar{p}_1(s)ds} - \lambda\sum_{i=1}^{N}p_i(t)e^{\int_{t+\mu_i}^{t}\bar{p}_2(s)ds}\right\| \le$$

$$\le \lambda\sum_{i=1}^{N}\beta_i|\mu_i|e^{|\mu_i|\tilde{\gamma}}\|\bar{p}_1 - \bar{p}_2\|_0.$$

Таким чином, при виконанні нерівності

$$\lambda\sum_{i=1}^{N}\beta_i|\mu_i|e^{|\mu_i|\tilde{\gamma}} < 1 \tag{25}$$

$(S\bar{p})(t)$ буде оператором стиску в просторі $C(\tilde{\gamma})$.

Будемо вимагати, щоб одночасно виконувались умови (24) та (25). Умову (24) можна замінити слабшою:

$$\lambda e^{\mu\tilde{\gamma}}\sum_{i=1}^{N}\beta_i \le \tilde{\gamma}.$$

Розглянемо рівняння $\lambda e^{\mu\tilde{\gamma}}\sum_{i=1}^{N}\beta_i = \tilde{\gamma}$. Воно буде мати розв'язки, але лише для

$$\tilde{\gamma} \le \frac{1}{\mu}$$

будуть виконуватись умови стиску і відображення оператором $(S\bar{p})(t)$ простору $C(\tilde{\gamma})$ в себе. Враховуючи це, отримуємо оцінку

$$\lambda \sum_{i=1}^{N} \beta_i |\mu_i| e^{|\frac{\mu_i}{\mu}|} < 1. \tag{26}$$

Отже, при виконанні цієї умови простір $C(\tilde{\gamma})$ буде повним нормованим простором, і оператор S буде мати в ньому єдину нерухому точку, тобто розв'язок рівняння (23) буде існувати, до того ж він буде єдиним.

Знайдемо діапазон значень для k. Із умови (26) випливає, що параметр k повинен задовольняти умову

$$k < \frac{l}{\pi\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \beta_i |\mu_i| e^{|\frac{\mu_i}{\mu}|}}}. \tag{27}$$

Тому $k \in [1, n]$, де n — ціла частина $\dfrac{l}{\pi\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \beta_i |\mu_i| e^{|\frac{\mu_i}{\mu}|}}}$.

Отже, розв'язок задачі (20), (21) можна записати у вигляді (9), де k визначається формулою (27). Щоб знайти кожне із $\bar{p}_k(t)$, також використаємо метод послідовних наближень.

Нехай початкове наближення для $\bar{p}_k(t)$ має вигляд

$$\bar{p}_k^{(0)}(t) = \lambda_k \sum_{i=1}^{N} p_i(t).$$

Тоді отримаємо

$$\begin{aligned}
\bar{p}_k^{(1)}(t) &= \lambda_k \sum_{i=1}^{N} p_i(t) e^{\int_{\mu_i}^{0} \bar{p}_k^{(0)}(t+s)ds}, \\
\bar{p}_k^{(2)}(t) &= \lambda_k \sum_{i=1}^{N} p_i(t) e^{\int_{\mu_i}^{0} \bar{p}_k^{(1)}(t+s)ds}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\bar{p}_k^{(m)}(t) &= \lambda_k \sum_{i=1}^{N} p_i(t) e^{\int_{\mu_i}^{0} \bar{p}_k^{(m-1)}(t+s)ds}, \quad k = 1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{28}$$

Така послідовність збіжна на $\mathbb{R}$ внаслідок виконання умови (26).

Запишемо явно перше наближення для $\bar{p}_k(t)$:

$$\bar{p}_k^{(1)}(t) = \lambda_k \sum_{i=1}^{N} p_i(t) e^{\lambda_k \int_{\mu_i}^{0} \sum_{i=1}^{N} p_i(t+s)ds}.$$

Враховуючи те, що $|p_i(t)| < \beta_i$, $i = 1, \ldots, N$, можна отримати таку оцінку:

$$|\bar{p}_k^{(1)}(t) - \bar{p}_k^{(0)}(t)| = \left|\lambda_k \sum_{i=1}^{N} p_i(t) e^{\lambda_k \int_{\mu_i}^{0} \sum_{i=1}^{N} p_i(t+s)ds} - \lambda_k \sum_{i=1}^{N} p_i(t)\right| \leq$$

$$\leq \lambda_k \sum_{i=1}^{N} \beta_i |e^{\lambda_k |\mu_i| \sum_{i=1}^{N} \beta_i} - 1|.$$

Згідно з оцінками методу послідовних наближень для кожного наступного наближення має місце оцінка

$$\|\bar{p}_k^{(j)}(t) - \bar{p}_k(t)\| \leq \frac{\alpha^j \|\bar{p}_k^{(1)}(t) - \bar{p}_k^{(0)}(t)\|}{1-\alpha}.$$

У даному випадку $\alpha = \lambda_k \sum_{i=1}^{N} \beta_i |\mu_i| e^{|\frac{\mu_i}{\mu}|}$, тоді при $j = m$ отримаємо

$$\|\bar{p}_k^{(m)}(t) - \bar{p}_k(t)\| \leq \frac{\lambda_k^{m+1} \left(\sum_{i=1}^{N} \beta_i |\mu_i| e^{|\frac{\mu_i}{\mu}|}\right)^m \sum_{i=1}^{N} \beta_i \left| e^{\lambda_k |\mu_i| \sum_{i=1}^{N} \beta_i} - 1 \right|}{1 - \lambda_k \sum_{i=1}^{N} \beta_i |\mu_i| e^{|\frac{\mu_i}{\mu}|}}.$$

Отже, розв'язок задачі (20), (21) можна записати у вигляді (15), де $\bar{p}_k^{(m)}(t)$ визначаються згідно з (28).

Приклад. Розглянемо задачу вигляду

$$u_t(x,t) = (\cos t + 2) u_{xx}(x, t + 2\pi), \quad (x,t) \in Q,$$

$$u(0,t) = u(20\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

де $Q = \{(x,t) : 0 < x < 20\pi, t \in \mathbb{R}\}$.

Будемо шукати розв'язок цієї задачі у вигляді (9).

Оскільки $\mu = 2\pi$, $\beta = 3$, $l = 20\pi$, то $n = \left[20\sqrt{\dfrac{1}{6\pi e}}\right] = 2$. Неважко перевірити, що умови теореми 1 будуть виконуватись. Дійсно,

$$\mu\beta\lambda_2 e = \frac{3\pi e}{50} < 1.$$

Для даної задачі $\lambda_1 = \dfrac{\pi^2}{l^2} = 1/400$, $\lambda_2 = \dfrac{4\pi^2}{l^2} = 1/100$.

Згідно з (6)

$$X_1(x) = \sin\frac{x}{20}, \quad X_2(x) = \sin\frac{x}{10}.$$

Знайдемо тепер $T_1(t)$ і $T_2(t)$. Для цього, використавши метод послідовних наближень, визначимо $\bar{p}_1(t)$ та $\bar{p}_2(t)$ з точністю $\epsilon = 0{,}0005$.

Початкове наближення для $\bar{p}_1(t)$ має вигляд

$$\bar{p}_1^{(0)}(t) = p(t)\lambda_1 = 0{,}0025(\cos t + 2),$$

далі

$$\bar{p}_1^{(1)}(t) = p(t)\lambda_1 e^{\int_{\mu+t}^{t} \bar{p}_1^{(0)}(s)ds} \approx 0,002423(\cos t + 2).$$

Згідно з оцінкою (14)

$$\|\bar{p}_1^{(1)}(t) - \bar{p}_1(t)\| \leq \frac{\mu\beta^2\lambda_1^2 e}{1-\mu\beta\lambda_1}(e^{\mu\beta\lambda_1} - 1) \approx 0,000049,$$

тому

$$T_1(t) = e^{-\int\limits_0^t \bar{p}_1^{(1)}(\tau)d\tau} \approx e^{-0,002423(2t+\sin t)}.$$

Знайдемо наближене значення $\bar{p}_2(t)$:

$$\bar{p}_2^{(0)}(t) = p(t)\lambda_2 = \frac{1}{100}(\cos t + 2),$$

$$\bar{p}_2^{(1)}(t) = p(t)\lambda_2 e^{\int_{\mu+t}^{t} \bar{p}_2^{(0)}(s)ds} \approx 0,008191(\cos t + 2),$$

$$\|\bar{p}_2^{(1)}(t) - \bar{p}_2(t)\| \leq \frac{\mu\beta^2\lambda_2^2 e}{1-\mu\beta\lambda_2}(e^{\mu\beta\lambda_2} - 1) \approx 0,003929.$$

Оскільки не досягнуто потрібної точності, знаходимо наступне наближення:

$$\bar{p}_2^{(2)}(t) = p(t)\lambda_2 e^{\int_{\mu+t}^{t} \bar{p}_2^{(1)}(s)ds} \approx 0,008951(\cos t + 2),$$

$$\left\|\bar{p}_2^{(2)}(t) - \bar{p}_2(t)\right\| \leq \frac{\mu^2\beta^3\lambda_2^3 e^2}{1-\mu\beta\lambda_2}(e^{\mu\beta\lambda_2} - 1) \approx 0,0020132,$$

$$\bar{p}_2^{(3)}(t) = p(t)\lambda_2 e^{\int_{\mu+t}^{t} \bar{p}_2^{(2)}(s)ds} \approx 0,008936(\cos t + 2),$$

$$\left\|\bar{p}_2^{(3)}(t) - \bar{p}_2(t)\right\| \leq \frac{\mu^3\beta^4\lambda_2^4 e^3}{1-\mu\beta\lambda_2}\left(e^{\mu\beta\lambda_2} - 1\right) \approx 0,001032,$$

$$\bar{p}_2^{(4)}(t) = p(t)\lambda_2 e^{\int_{\mu+t}^{t} \bar{p}_2^{(3)}(s)ds} \approx 0,008938(\cos t + 2),$$

$$\left\|\bar{p}_2^{(4)}(t) - \bar{p}_2(t)\right\| \leq \frac{\mu^4\beta^5\lambda_2^5 e^4}{1-\mu\beta\lambda_2}\left(e^{\mu\beta\lambda_2} - 1\right) \approx 0,000529,$$

$$\bar{p}_2^{(5)}(t) = p(t)\lambda_2 e^{\int_{\mu+t}^{t} \bar{p}_2^{(4)}(s)ds} \approx 0,008938(\cos t + 2),$$

$$\left\|\bar{p}_2^{(5)}(t) - \bar{p}_2(t)\right\| \leq \frac{\mu^5\beta^6\lambda_2^6 e^5}{1-\mu\beta\lambda_2}\left(e^{\mu\beta\lambda_2} - 1\right) \approx 0,000271.$$

Таким чином,

$$T_2(t) = e^{-\int_0^t \bar{p}_2^{(5)}(\tau)d\tau} \approx e^{-0,008938(2t+\sin t)}.$$

Покладемо $c_1 = c_2 = 1$.

Отже, розв'язок задачі має вигляд

$$u(x,t) = X_1(x)T_1(t) + X_2(x)T_2(t) \approx \sin\frac{x}{20}\,e^{-0{,}002423(2t+\sin t)} + \sin\frac{x}{10}\,e^{-0{,}008938(2t+\sin t)}.$$

1. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971. — 296 с.
2. *Эльсгольц Л. Э.* О краевых задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами // Успехи мат. наук. — 1960. — **15**, № 5 (95). — С. 222–224.
3. *Меджитов М.* Двухточечная краевая задача для нелинейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом // Тр. сем. по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом. — 1969. — **7**. — С. 178–182.
4. *Каменский Г. А.* Вариационные и краевые задачи с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. — 1970. — **6**, № 8. — С. 1349–1358.
5. *Сеидов З. Б.* Краевая задача для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Укр. мат. журн. — 1973. — **25**, № 6. — С. 830–834.
6. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1985. — 224 с.
7. *Тихонов А. Н.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Мат. сб. — 1935. — **42**, № 2. – С. 199–216.
8. *Олейник О. А.* О поведении решений линейных параболических систем дифференциальных уравнений в неограниченных областях // Успехи мат. наук. — 1975. — **30**, № 2. — С. 219–220.
9. *Моисеев Е. И., Вафодорова Г. О.* Задачи без начальных условий для некоторых дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 2002. — **38**, № 8. — С. 1091–1094.
10. *Эйдельман С. Д.* Оценки решений параболических систем и некоторые их приложения // Мат. сб. — 1953. — **33 (75)**, № 3. — С. 359–382.
11. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. — М.: Наука, 1964. — 444 с.
12. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина граничных задач для параболических по И. Г. Петровскому систем общего вида // Мат. сб. — 1981. — **114 (156)**, № 4. — С. 523–565.
13. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1965. — **83**. — С. 3–162.
14. *Бокало Н. М.* Краевые задачи для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности // Сиб. мат. журн. — 1996. — **37**, № 5. — С. 977–985.
15. *Шишков А. Е.* Классы единственности решений смешанных задач для параболических уравнений в нецилиндрических областях // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1998. — № 11. — С. 35–37.
16. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. — 724 с.
17. *Самойленко А. М.* Об одной задаче исследования глобальных решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 5. — С. 631–640.

Одержано 25.04.14