УДК 517.98

ІНТЕГРОВНІ ЗІ СТЕПЕНЕМ P РОЗВ'ЯЗКИ ОПЕРАТОРНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

М. Ф. Городній

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64

А. В. Сиротенко

Нац. техн. ун-т України „КПІ"
Україна, 03056, Київ, просп. Перемоги, 37

We study boundedness or pth power integrability of solutions of a differential equation with a bounded operator cofficient on a Banach space for a special class of "input" functions.

Исследуется ограниченность или интегрируемость с p-й степенью решений дифференциального уравнения с ограниченным операторным коэффициентом в банаховом пространстве для специальных классов „входных" функций.

1. Вступ. Нехай B — комплексний банахів простір із нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$, A — лінійний неперервний оператор, що діє із B в B. Покладемо при $p \in [1, \infty)$

$$l_p(B) := \left\{ \bar{x} = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\} \in B \mid |\bar{x}|_p := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|x_k\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

а також

$$l_\infty(B) := \left\{ \bar{x} = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\} \in B \mid |\bar{x}|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty \right\}.$$

Зафіксуємо $p \in [1, \infty]$. Відомо [1 – 3], що різницеве рівняння

$$x_{n+1} = Ax_n + y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

має для довільного $\bar{y} = \{y_n : n \in \mathbb{Z}\} \in l_p(B)$ єдиний розв'язок $\bar{x}$ у просторі $l_p(B)$ тоді і лише тоді, коли для спектра $\sigma(A)$ оператора A виконується умова $\sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \varnothing$. У випадку, коли ця умова не виконується, у [4] отримано такий результат щодо існування і властивостей розв'язків різницевого рівняння (1).

Нехай V_d — множина таких елементів $y \in B$, для яких різницеве рівняння (1) має єдиний розв'язок у просторі $l_p(B)$ при $y_0 = y$, $y_n = \bar{0}$, $n \neq 0$.

Теорема 1. *Нехай множина V_d містить хоча б один ненульовий елемент, а також виконуються такі умови:*

1) якщо $\{y, y_m : m \geq 1\} \subset V_d$ і $\|y_m - y\| \to 0$, $m \to \infty$, то для розв'язків $\bar{x}_y = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$, $\bar{x}_{y_m} = \{x_n(m) : n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (1), що відповідають y та y_m, виконується $|\bar{x}_{y_m} - \bar{x}_y|_p \to 0$, $m \to \infty$;

2) для довільної послідовності $\{y_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset V_d$, *що належить* $l_p(B)$, *рівняння (1) має єдиний розв'язок у просторі* $l_p(B)$.

Тоді V_d — *інваріантний відносно* A *підпростір у* B *і* $\sigma(\tilde{A}) \cap \{z \in \mathbb{Z} \mid |z| = 1\} = \varnothing$ *для звуження* $\tilde{A}$ *оператора* A *на* V_d.

Мета цієї статті — отримати аналогічний результат для диференціального рівняння

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

для деякого спеціального класу функцій $f : \mathbb{R} \to B$.

Про застосування рівнянь вигляду (2) див. [5, 6] та наведену там бібліографію.

2. Формулювання основного результату. Нехай $C(\mathbb{R}, B)$ і $C^1(\mathbb{R}, B)$ — множини відповідно неперервних і неперервно диференційовних (за нормою) B-значних функцій, заданих на $\mathbb{R}$. Покладемо

$$L_p^0(B) := \left\{ f \in C(\mathbb{R}, B) \mid \|f\|_p := \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \|f(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \quad p \in [1, \infty),$$

$$L_\infty^0(B) := \left\{ f \in C(\mathbb{R}, B) \mid \|f\|_\infty := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\| < \infty \right\}.$$

Нехай $L_p^1(B) := L_p^0(B) \cap C^1(\mathbb{R}, B)$, $L_{b,p}(B) := \left\{ f \in L_p^0(B) \mid \|f\|_{b,p} := \|f\|_\infty + \|f\|_p < \infty \right\}$, $L_{b,p,1}(B) := \left\{ f \in L_p^1(B) \mid \|f\|_{b,p,1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f\|_p < \infty \right\}$.

Зафіксуємо $p \in [1, \infty]$ і розглянемо диференціальне рівняння (2), в якому $f \in L_{b,p}(B)$ — задана функція. Зафіксуємо таку неперервну функцію $\psi : [0, 1] \to \mathbb{R}$, що $\int_0^1 \psi(t) dt = 1$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$. Покладемо для кожного $n \in \mathbb{Z}$ і для всіх $\tau \in [0, 1]$

$$f(n + \tau) = e^{(\tau - 1)A} y_n \psi(\tau), \tag{3}$$

де $\bar{y} = \{y_n : n \in \mathbb{Z}\} \in l_p(B)$. Нехай V — множина таких елементів $y \in B$, для яких рівняння (2) має єдиний розв'язок $x_y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, у просторі $L_{b,p,1}(B)$, що відповідає функції $f_y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, яка будується за правилом (3) по послідовності $y_0 = y$, $y_n = \bar{0}$, $n \neq 0$.

Основним результатом статті є наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай* V *містить хоча б один ненульовий елемент, а також для довільної функції* $f \in L_{b,p}(B)$ *такої, що* $f : \mathbb{R} \to V$, *рівняння (3) має єдиний розв'язок* x *у просторі* $L_{b,p,1}(B)$. *Тоді* V — *інваріантний відносно* A *підпростір у* B *і для звуження* $\hat{A}$ *оператора* A *на* V *виконується умова* $\sigma(\hat{A}) \cap i\mathbb{R} = \varnothing$.

3. Допоміжні твердження. У подальшому будемо використовувати такі леми.

Лема 1. *Нехай* $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \varnothing$. *Тоді для довільної функції* $f \in L_{b,p}(B)$ *рівняння (2) має єдиний розв'язок* x *у просторі* $L_{b,p,1}(B)$.

Доведення. Нехай $p \in [1, \infty)$. Зафіксуємо $f \in L_{b,p}(B)$. Тоді $\|f\|_\infty < \infty$. Тому рівняння (2) має єдиний обмежений розв'язок [6, с. 119, 120]. Цей розв'язок зображується у вигляді

$$x(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_A(t-s)f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

де G_A — функція Гріна для рівняння (2), причому існують такі додатні числа N, ν, що для всіх $t \in \mathbb{R}$

$$\|G_A(t)\| \le Ne^{-\nu|t|}. \tag{5}$$

Оскільки внаслідок (5) $\int_{\mathbb{R}} \|G_A(t)\|dt < \infty$ і $f \in L_p^0(B)$, то з (4) і нерівності Юнга отримаємо

$$\|x\|_p \le \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \|G_A(t-s)\|\,\|f(s)\|ds\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \|G_A\|_1 \|f\|_p < \infty.$$

Також $\|x'\|_\infty \le \|A\|\|x\|_\infty + \|f\|_\infty$. Тому $x \in L_{b,p,1}(B)$.

При $p = \infty$ твердження леми є очевидним.

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Якщо* $\{y, y_m : m \ge 1\} \subset B$, *причому* $\|y_m - y\| \to 0$, $m \to \infty$, *то для відповідних до* f_y, f_{y_m} *єдиних у просторі* $L_{b,p,1}(B)$ *розв'язків* x_y, x_{y_m} *рівняння (2) виконується* $\|x_{y_m} - x_y\|_{b,p,1} \to 0$, $m \to \infty$.

Доведення. З (3), (4) одержуємо

$$\|x_{y_m} - x_y\|_\infty \le \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \|G_A(t-s)\|\|f_{y_m}(s) - f_y(s)\|ds \le \|G_A\|_1 e^{\|A\|}\|y_m - y\| \to 0, \quad m \to \infty.$$

Якщо $p \in [1, \infty)$, то

$$\|x_{y_m} - x_y\|_p \le \|G_A\|_1 \|f_{y_m} - f_y\|_p \le \|G_A\|_1 e^{\|A\|}\|y_m - y\| \to 0, \quad m \to \infty.$$

Також

$$\|x'_{y_m} - x'_y\|_\infty \le \|A\|\|x_{y_m} - x_y\|_\infty + \|f_{y_m} - f_y\|_\infty \to 0, \quad m \to \infty.$$

Лему 2 доведено.

Лема 3. *Нехай V містить хоча б один ненульовий елемент. Тоді V — лінійний многовид і інваріантна відносно A множина.*

Доведення. Оскільки $V \ne \varnothing$ і при $y \in V$ рівняння (2) має єдиний в $L_{b,p,1}(B)$ розв'язок x_y, що відповідає функції f_y, то $\bar{0} \in V$. Справді, інакше знайдеться ненульова функція $u \in L_{b,p,1}(B)$ така, що $x'(t) = Ax(t)$, $t \in \mathbb{R}$, а отже, $x_y + u$ — теж розв'язок рівняння (2), що відповідає функції f_y. Останнє суперечить єдиності розв'язку.

Враховуючи, що $\bar{0} \in V$, легко переконатися, що V — лінійний многовид. Також при $y \in V$, подіявши на рівняння (2) оператором A, дістанемо, що $Ay \in V$.

Лему 3 доведено.

4. Доведення теореми 2. 1) $p = \infty$. Нехай $V_{d,\infty}$ — множина всіх таких $y \in B$, для яких різницеве рівняння

$$x_{n+1} = e^A x_n, \quad n \neq 0, \quad x_1 = e^A x_0 + y, \tag{6}$$

має єдиний обмежений розв'язок. Покажемо, що $V = V_{d,\infty}$.

Нехай $y \in V$. Тоді побудованій за правилом (3) по послідовності $y_0 = y$, $y_n = \bar{0}$, $n \neq 0$, функції f_y відповідає єдиний розв'язок x_y рівняння (2). Відомо [6, с. 105], що задача Коші $x'(t) = Ax(t) + f(t)$, $t \geq t_0$, $x(t_0) = x_0$, має єдиний розв'язок, який записується у вигляді

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} f_y(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0. \tag{7}$$

Тому для кожного $n \in \mathbb{Z}$

$$x_y(n+1) = e^A x_y(n) + \int\limits_{n}^{n+1} e^{A(n+1-\tau)} f_y(\tau) d\tau =$$

$$= e^A x_y(n) + \int\limits_{0}^{1} e^{A(1-\beta)} f_y(n+\beta) d\beta = e^A x_y(n) + y_n. \tag{8}$$

Отже, $\{x_y(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ — розв'язок різницевого рівняння (6). Його обмеженість є очевидною. Якщо, від супротивного, цей розв'язок не єдиний, то існує ненульова обмежена послідовність $\bar{u} = \{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ така, що $u_{n+1} = e^A u_n = e^{(n+1)A} u_0$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$. Розглянемо функцію $x(t) = e^{tA} u_0, t \in \mathbb{R}$. Вона є обмеженим розв'язком рівняння

$$x'(t) = Ax(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

оскільки для довільних $n \in \mathbb{Z}$, $t = n + \tau \in [n, n+1)$

$$\|e^{At}u_0\| = \|e^{A\tau}e^{An}u_0\| \leq \max_{\tau \in [0,1)} \|e^{A\tau}u_0\| |\bar{u}|_\infty.$$

Це суперечить включенню $\bar{0} \in V$. Отже, $V \subset V_{d,\infty}$. Зокрема, $V_{d,\infty}$ містить ненульовий елемент і $\bar{0} \in V_{d,\infty}$.

Нехай тепер $y \in V_{d,\infty}$. Покажемо, що $y \in V$. Побудуємо функцію $f_y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, за правилом (3) по послідовності $y_0 = y$, $y_n = \bar{0}$, $n \neq 0$. Доведемо, що їй відповідає обмежений розв'язок диференціального рівняння (2). Розглянемо обмежений розв'язок $\bar{x}_y = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (6), що відповідає y. Покладемо

$$x_y(t) = e^{At}x_0 + \int\limits_{0}^{t} e^{A(t-\tau)} f_y(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Зазначимо, що $x_y(t), t \in \mathbb{R}$, — розв'язок рівняння (2), $x(0) = x_0$, а також для x_y виконуються рівності (8). Тому за індукцією для кожного $n \in \mathbb{Z}$

$$x_y(n) = x_n. \tag{11}$$

Обмеженість функції $x_y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, випливає з того, що для довільних $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \in [n, n+1)$

$$x_y(t) = e^{A(t-n)}x_n + \int\limits_0^{t-n} e^{A(t-n-\beta)} f_y(n+\beta) d\beta,$$

звідки $\|x_y(t)\| \le e^{\|A\|}|\bar{x}_y|_\infty + e^{\|A\|}\|f_y\|_\infty$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Якщо, від супротивного, обмежений розв'язок рівняння (2), що відповідає f_y, не єдиний, то існує ненульовий обмежений розв'язок $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, рівняння (9). Цей розв'язок записується у вигляді $u(t) = e^{A(t-t_0)}u(t_0)$, $t \in \mathbb{R}$, де $u(t_0) \neq \bar{0}$. Зокрема, $u(t_0+n) = e^{An}u(t_0)$, $n \in \mathbb{Z}$, що суперечить єдиності обмеженого розв'язку рівняння

$$u_{n+1} = e^A u_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{12}$$

тобто тому факту, що $\bar{0} \in V_{d,\infty}$. Отже, $V = V_{d,\infty}$.

Крім того, з (11) і леми 2 випливає, що коли $\{y, y_m : m \ge 1\} \subset V$ і $\|y_m - y\| \to 0$, $m \to \infty$, то для відповідних до y, y_m, $m \ge 1$, розв'язків $\bar{x}_y = \{x_k : k \in \mathbb{Z}\}$ та $\bar{x}_{y_m} = \{x_k(m) : k \in \mathbb{Z}\}$ різницевого рівняння (6) виконується умова $|\bar{x}_{y_m} - \bar{x}_y|_\infty \to 0$, $m \to \infty$, а отже, справджується умова 1 теореми 1.

Зазначимо, що множина $V_{d,\infty}$ інваріантна відносно операторів A, $e^{A\beta}$ для довільного $\beta \in \mathbb{R}$. Отже, якщо $\{y_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset V$, то побудована за правилом (3) функція $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, теж набуває значення в V.

Покажемо, що при виконанні умови теореми 2 виконується умова 2 теореми 1. Зафіксуємо $\{y_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset V_{d,\infty}$ і побудуємо функцію $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, за формулою (3). Тоді $f : \mathbb{R} \to V$, f є обмеженою, і, як показано раніше, для відповідного до f обмеженого розв'язку x рівняння (2) $\{x(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ є обмеженим розв'язком рівняння

$$x_{n+1} = e^A x_n + y_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{13}$$

Якщо, від супротивного, рівняння (13) має ще один обмежений розв'язок, то рівняння (12) має обмежений ненульовий розв'язок, а це суперечить включенню $\bar{0} \in V$.

Таким чином, ми довели, що для рівняння (13) виконуються умови 1, 2 теореми 1. Тому $V_{d,\infty} = V$ є інваріантним підпростором відносно e^A, причому звуження $(e^A) \restriction V$ цього оператора на V має спектр, що не перетинається з множиною $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Оскільки V є інваріантним підпростором і відносно оператора A, а також $(e^A) \restriction V = e^{A \restriction V} = e^{\hat{A}}$, то за теоремою Данфорда про відображення спектра $\sigma(\hat{A}) \cap i\mathbb{R} = \varnothing$.

2) $p \in [1, \infty)$. Нехай $V_{d,p}$ — множина всіх таких $y \in B$, для яких різницеве рівняння (6) має єдиний розв'язок у просторі $l_p(B)$. Покажемо, що $V = V_{d,p}$. Нехай $y \in V$, x_y — єдиний у просторі $L_{b,p,1}$ розв'язок рівняння (2), що відповідає функції f_y, побудованій за правилом (3) по послідовності $y_0 = y$, $y_n = \bar{0}$, $n \neq 0$.

Із (7) випливає, що для довільних $n \in \mathbb{Z}$, $\tau \in [0, 1)$

$$x_y(n+\tau) = e^{A\tau} x_y(n) + \int\limits_0^\tau e^{A(\tau-\beta)} f_y(n+\beta) d\beta, \tag{14}$$

а також виконуються рівності (8). Внаслідок теореми про середнє для інтеграла Рімана для кожного $n \in \mathbb{Z}$ знайдеться таке $\theta_n \in (0, 1)$, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \|x_y(t)\|^p dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int\limits_0^1 \|x_y(n+\tau)\|^p d\tau = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x_y(n+\theta_n)\|^p.$$

Тому $\{x_y(n+\theta_n) : n \in \mathbb{Z}\} \in l_p(B)$, а також внаслідок (7) для кожного $n \in \mathbb{Z}$

$$x_y(n) = e^{A(1-\theta_{n-1})} x_y(n-1+\theta_{n-1}) + \int\limits_{n-1+\theta_{n-1}}^{n} e^{A(n-\tau)} f_y(\tau) d\tau =$$

$$= e^{A(1-\theta_{n-1})} x_y(n-1+\theta_{n-1}) + \int\limits_{\theta_{n-1}}^{1} y_{n-1} \psi(\beta) d\beta.$$

Звідси випливає, що

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|^p \le \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(e^{\|A\|} \|x(n-1+\theta_{n-1})\| + \|y_{n-1}\| \right)^p < \infty, \tag{15}$$

а отже, $\{x_y(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ є розв'язком рівняння (6) у просторі $l_p(B)$.

Якщо, від супротивного, рівняння (6) має більше одного розв'язку в $l_p(B)$, то (12) має такий розв'язок $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\} \in l_p(B)$, що $u_0 \ne \bar{0}$. Тоді $u_n = e^{nA} u_0$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$, причому $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|e^{nA} u_0\|^p < \infty$. Покладемо $u(t) = e^{At} u_0$, $t \in \mathbb{R}$. Тоді $u'(t) = Au(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, а також

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\| < \infty, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \|u(t)\|^p dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int\limits_0^1 \|e^{A(n+\tau)} u_0\|^p d\tau \le e^{p\|A\|} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|e^{An} u_0\|^p < \infty.$$

Отже, u — ненульовий розв'язок рівняння (9) у просторі $L_{b,p,1}(B)$. Це суперечить включенню $\bar{0} \in V$. Таким чином, $V \subset V_{d,p}$. Зокрема, $V_{d,p}$ містить ненульовий елемент і $\bar{0} \in V_{d,p}$.

Нехай тепер $y \in V_{d,p}$. Покажемо, що $y \in V$. Нехай $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ — єдиний у просторі $l_p(B)$ розв'язок різницевого рівняння (6), що відповідає y. Побудуємо f_y за правилом (3) по послідовності $y_0 = y$, $y_n = \bar{0}$, $n \ne 0$. Тоді визначена за правилом (10) функція x_y задовольняє рівність $x_y'(t) = Ax_y(t) + f_y(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, а також (8) і (14). Тому виконуються рівності (11) і для довільних $n \in \mathbb{Z}$, $\tau \in [0, 1)$

$$\|x_y(n+\tau)\| \le e^{\|A\|} (\|x_n\| + \|y_n\|),$$

тобто x_y — обмежена функція. Також

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \|x_y(t)\|^p dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_0^1 \left\| e^{A\tau} x_n + \int\limits_0^\tau e^{A(\tau-\beta)} f_y(n+\beta) d\beta \right\|^p d\tau \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{p\|A\|} (\|x_n\| + \|y_n\|)^p < \infty.$$

Таким чином, рівняння (2) має відповідний до f_y розв'язок x_y у просторі $L_{b,p,1}(B)$.

Якщо, від супротивного, цей розв'язок не єдиний, то рівняння (9) має ненульовий розв'язок $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, у просторі $L_{b,p,1}(B)$. Тоді, міркуючи, як і при доведенні оцінки (15), можна переконатись, що $\{u(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ — ненульовий розв'язок рівняння (12) у просторі $l_p(B)$, що суперечить включенню $\bar{0} \in V_{d,p}$. Таким чином, $V = V_{d,p}$.

Нехай тепер $\{y, y_m : m \ge 1\} \subset V_{d,p}$, а також $\|y_m - y\| \to 0$, $m \to \infty$. Покажемо, що для відповідних до y_m, y розв'язків $\bar{x}_m = \{x_n(m) : n \in \mathbb{Z}\}$ і $\bar{x} = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ різницевого рівняння (6) виконується умова $|\bar{x}_m - \bar{x}|_p \to 0$, $m \to \infty$.

Зауважимо, що внаслідок (14) для довільних $n \in \mathbb{Z}$, $\tau \in [0,1)$

$$x_{y_m}(n+\tau) - x_y(n+\tau) = e^{A\tau}(x_n(m) - x_n) + \left(\int\limits_0^\tau e^{A(\tau-1)} \psi(\beta) d\beta \right) (y_n(m) - y_n).$$

З леми 2 випливає, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \|x_{y_m}(t) - x_y(t)\|^p dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_0^1 \|x_{y_m}(n+\tau) - x_y(n+\tau)\|^p d\tau =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x_{y_m}(n+\theta_n(m)) - x_y(n+\theta_n(m))\|^p \to 0, \quad m \to \infty.$$

Тут $\theta_n(m) \in (0,1)$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$, $m \ge 1$. Тому

$$|\bar{x}_m - \bar{x}|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x_{y_m}(n) - x_y(n)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\| e^{A(1-\theta_{n-1}(m))} (x_{y_m}(n-1+\theta_{n-1}(m)) - x_y(n-1+\theta_{n-1}(m))) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\int\limits_{\theta_{n-1}(m)}^1 \psi(\beta) d\beta \right) (y_{n-1}(m) - y_{n-1}) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \left(e^{p\|A\|} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x_{y_m}(n-1+\theta_{n-1}(m)) - x_y(n-1+\theta_{n-1}(m))\|^p \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \|y_m - y\| \to 0, \quad m \to \infty.$$

Таким чином, ми довели, що виконується умова 1 теореми 1. Як і при $p = \infty$, встановлюємо, що коли $\{y_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset V$, то побудована за правилом (3) функція f набуває значення в V. Доведемо, що при виконанні умови теореми 2 виконується умова 2 теореми 1 для рівняння (13). Зафіксуємо $\{y_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset V_{d,p}$ і побудуємо f за формулою (3). Тоді $f : \mathbb{R} \to V$, f є обмеженою, а також

$$\int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|^p dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \|e^{(\tau-1)A} y_n \psi(\tau)\|^p d\tau \leq e^{\|A\|} \int_0^1 |\psi(\tau)|^p d\tau \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|y_n\|^p < \infty.$$

Тому $f \in L_{b,p}(B)$. Нехай x — єдиний у просторі $L_{b,p,1}(B)$ розв'язок диференціального рівняння (2), що відповідає f. Тоді виконуються рівності (8). Перевіримо, що $\{x(n) : n \in \mathbb{Z}\} \in l_p(B)$.

Оскільки для кожного $n \in \mathbb{Z}$ існує таке $\theta_n \in (0,1)$, що

$$\int_{\mathbb{R}} \|x(t)\|^p dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \|x(n+\tau)\|^p d\tau = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n+\theta_n)\|^p < \infty,$$

то

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\| e^{A(1-\theta_{n-1})} x(n-1+\theta_{n-1}) + \left(\int_{\theta_{n-1}}^1 \psi(\beta) d\beta\right) y_{n-1} \right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(e^{p\|A\|} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n-1+\theta_{n-1})\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|y_{n-1}\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

а отже, $\{x(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ — розв'язок рівняння (13) у просторі $l_p(B)$.

Як і при $p = \infty$, перевіряємо, що цей розв'язок єдиний, а отже, для (13) виконується умова 2 теореми 1.

Використавши теорему 1, аналогічно до випадку $p = \infty$ отримаємо, що $\sigma(\hat{A}) \cap i\mathbb{R} = \varnothing$. Теорему 2 доведено.

1. *Баскаков А. Г, Пастухов А. И.* Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. — 2001. — **42**, № 6. — С. 1231 – 1243.
2. *Городній М. Ф.* l_p-Розв'язки одного різницевого рівняння в банаховому просторі // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 3. — С. 425 – 430.
3. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1972. — 248 с.
4. *Сиротенко А. В.* Обмежені та сумовні зі степенем p розв'язки різницевого рівняння з цілочисельним аргументом // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Фіз.-мат. науки. — 2012. — № 4. — С. 68 – 72.
5. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. — Киев: Вища шк., 1992. — 319 с.
6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 536 с.

Одержано 13.06.14