УДК 517.9

ПРО ГЛОБАЛЬНУ СТІЙКІСТЬ ОДНОГО НЕЛІНІЙНОГО РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ

О. І. Неня, В. І. Ткаченко*

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3

С. І. Трофимчук**

Ін-математики та фізики Університету Тальки
Чилі, 747, Талька

We give precise conditions that are sufficient for global stability of the zero solution of the difference equation $x_{n+1} = qx_n + f_n(x_n, \ldots, x_{n-k})$, $n \in \mathbb{Z}$, where the nonlinear functions f_n satisfy the negative feedback condition and have sublinear growth.

Наведено точні достатні умови глобальної стійкості нульового розв'язку різницевого рівняння вигляду $x_{n+1} = qx_n + f_n(x_n, \ldots, x_{n-k})$, $n \in \mathbb{Z}$, де нелінійні функції f_n задовольняють умови негативного зворотного зв'язку та підлінійного росту.

1. Вступ та основні результати. Розглянемо різницеве рівняння

$$x_{n+1} = qx_n + f_n(x_n, \ldots, x_{n-k}), \quad x_n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

де $q \in (0, 1)$ і нелінійні $f_n : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ задовольняють деякі додаткові умови, наведені нижче. Розв'язком рівняння (1) з початковою умовою

$$x_i = \varphi_i, \ i = -k, \ldots, 0, \tag{2}$$

є послідовність $\{x_n\}$, яка означена для всіх $n \geq -k$, задовольняє початкову умову (2) і рівняння (1) при $n = 0, 1, \ldots$. Очевидно, що розв'язок $\{x_n\}$ існує для всіх $n \geq 0$ і може бути побудований послідовно.

Рівняння вигляду (1) з'являються як дискретні моделі біологічних популяцій. Метою даної роботи є дослідження глобальної стійкості єдиної нерухомої точки рівняння (1). Глобальна стійкість різних часткових класів (1) вивчалася в [1–11]. Означимо функціонал $\mathcal{M} : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}_+$ таким чином: $\mathcal{M}(\phi) = \max_i\{0, \phi_i\}$. Припустимо, що нелінійні функції f_n задовольняють узагальнені умови Йорка (**H**) (див. [12, 13]):

$\mathbf{H_1}$. Існує $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таке, що $f_n(\phi) \leq \vartheta(z)$ для всіх $\phi \in \mathbb{R}^{k+1}$ з $\min_i \phi_i \geq z$.

$\mathbf{H_2}$. Існує $r(x) = ax/(1 + bx)$, $b \geq 0$, $a < 0$, таке, що

$$r(\mathcal{M}(\phi)) \leq f_n(\phi) \leq r(-\mathcal{M}(-\phi)), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

* Частково підтримано Фондом фундаментальних досліджень України (грант 01.07/00109).
** Підтримано Fondecyt, Чилі (грант 1030992).

де перша нерівність виконується для всіх $\phi \in \mathbb{R}^{k+1}$, а друга — для всіх $\phi \in \mathbb{R}^{k+1}$ таких, що $\min_i \phi_i > -b^{-1} \in [-\infty, 0)$.

Як випливає з умов **H**, точка $x = 0$ є єдиною нерухомою точкою рівняння (1). Якщо умова $\mathbf{H_2}$ виконується для $b = 0$, то умова $\mathbf{H_1}$ виконується автоматично з $\vartheta(z) = -aM(-z)$. Умову $\mathbf{H_2}$ з $b = 0$ часто називають умовою Йорка [14].

Узагальнену умову Йорка було введено в [12]. Вона визначає важливий клас скалярних функціонально-диференціальних рівнянь, до якого належать такі відомі рівняння математичної біології, як рівняння Райта, Ніколсона, Маккея – Гласса. В [12] отримано простий критерій глобальної стійкості єдиної нерухомої точки таких рівнянь.

Різницеве рівняння (1) можна розглядати як функціонально-диференціальне рівняння з кусково-сталим аргументом. Це дозволило на підставі результатів робіт [12, 15] отримати наступну умову глобальної стійкості рівняння (1), яке задовольняє умови **H**.

Теорема 1 [11]. *Припустимо, що* $q \in (0, 1)$ *і функції* f_n *задовольняють умови* **H**. *Тоді якщо виконується нерівність*

$$q^{k+1} > -\frac{a}{1-q} \ln \frac{a^2 - a(1-q)}{a^2 + (1-q)^2}, \tag{4}$$

то $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ *для кожного розв'язку* $\{x_n\}$ *рівняння (1).*

На відміну від функціонально-диференціальних рівнянь, для яких аналогічна до (4) умова глобальної стійкості є точною, для різницевих рівнянь (1), які задовольняють умови **H**, умова (4) не є точною.

У роботі [11] доведено таку теорему.

Теорема 2. *Нехай* $b \neq 0$ *і функції* f_n *задовольняють умови* **H**. *Тоді для кожного* $k \in \mathbb{N}$ *існує таке* $q_k \in (0, 1)$, *що при* $q \in (0, q_k]$ *умова*

$$\frac{a}{1-q} \geq -\frac{1+q^{k+1}}{1-q^{k+1}} \tag{5}$$

є достатньою для глобальної стійкості рівняння (1). Для кожного k *умова (5) є точною для підкласу рівнянь (1), які задовольняють умови* **H** *і обмеження* $b \neq 0$, $q \in (0, q_k]$.

Точність умови (5) означає наступне: для кожного значення параметрів a, k *і* $q \in (0, q_k]$, *які не задовольняють умову (5), існує рівняння (1), яке не є глобально стійким.*

Числа q_k конструктивно визначаються через параметри q і k. Наведемо значення q_k при деяких k : $q_1 = 0,887$, $q_2 = 0,796$, $q_3 = 0,788$, $q_4 = 0,795$, $q_5 = 0,805$, $q_6 = 0,815$, $q_7 = 0,825$, $q_8 = 0,834$, $q_9 = 0,842$, $q_{10} = 0,849$, $q_{100} = 0,965$, $q_{1000} = 0,994$. Крім цього, числа q_k задовольняють нерівність $q_k < q_k^*$, де q_k^* – корінь рівняння $(q_k^*)^{k+1}(q_k^* + \ldots + (q_k^*)^k) = 1$. Наведемо для порівняння деякі значення q_k^* : $q_1^* = 1$, $q_2^* = 0,855$, $q_3^* = 0,831$, $q_4^* = 0,828$, $q_5^* = 0,833$, $q_6^* = 0,839$, $q_7^* = 0,846$, $q_8^* = 0,853$, $q_9^* = 0,859$, $q_{10}^* = 0,865$, $q_{100}^* = 0,967$, $q_{1000}^* = 0,994$.

У цій роботі ми покажемо, що у підлінійному випадку ($b = 0$) теорему 2 можна поширити на інтервал $q \in (0, q_k^*]$.

Теорема 3. *Припустимо, що $q^{k+1}(q + \ldots + q^k) < 1$ і функції f_n задовольняють умову Йорка: існує $a < 0$ таке, що*

$$a\mathcal{M}(\phi) \le f_n(\phi) \le -a\mathcal{M}(-\phi), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

для всіх $\phi \in \mathbb{R}^{k+1}$. Тоді рівняння (1) є глобально асимптотично стійким для кожної трійки параметрів (a, q, k), які задовольняють умову

$$\frac{a}{1-q} > -\frac{1+q^{k+1}}{1-q^{k+1}}. \tag{7}$$

Це означає, що існують $\lambda \in (0, 1)$ і $\Gamma > 0$ такі, що

$$\max_{j\,=\,n-k,n} |x_j| \le \Gamma\lambda^{n-s} \max_{j\,=\,s-k,s} |x_j|, \quad n \ge s, \tag{8}$$

для кожного розв'язку $\{x_n\}$ рівняння (1). Умова (7) є точною для класу рівнянь (1), які задовольняють нерівність $q^{k+1}(q + \ldots + q^k) < 1$ та умову (6).

Відмітимо, що для q, близьких до 1, умова (7) не гарантує навіть локальну стійкість нульового розв'язку рівняння (1).

При $q \ge q_k^*$ для глобальної стійкості рівняння (1) з підлінійною нелінійністю виконуються наступні умови.

Теорема 4. *Нехай функції f_n задовольняють умову Йорка (6). Тоді кожний розв'язок $\{x_n\}$ рівняння (1) прямує до 0 і задовольняє нерівність (8), якщо*

$$\min_{s\,=\,0,\ldots,k} \left(q^{k+s+1} + aq^s \left(s + \frac{1-q^{k+1}}{1-q} \right) + a^2 \frac{1+q^s(sq-s-1)}{(1-q)^2} \right) > -1. \tag{9}$$

Ця умова є точною для класу рівнянь (1), які задовольняють умову Йорка (6).

Зауважимо, що теорема 3 випливає з теореми 4 при $q < q_k^*$. У цьому випадку мінімум у (9) досягається при $s = 0$.

2. *Доведення теореми 3.* Розглянемо рівняння (1) з параметрами a, q, k, які задовольняють (7). Для цих параметрів існує таке $\gamma \in (0, 1)$, що $\gamma > \max\{q, -q^{k+1} - a(1 + q + \ldots \ldots + q^k), q^{k+1}(q + \ldots + q^k)\}$.

Спочатку доведемо, що для кожного розв'язку $\{x_n\}$ рівняння (1) виконується нерівність

$$|x_n| \le \gamma \max_{s \in \{\tau-k,\ldots,\tau+3k\}} |x_s| \quad \text{для всіх} \quad n > \tau + 3k. \tag{10}$$

Припустимо від супротивного, що (10) не виконується. Тоді існує розв'язок $\{x_n\}$ такий, що або для деякого $\nu \ge \tau + 3k + 1$ виконуються нерівності

$$|x_\nu| > \gamma M = \gamma \max_{s \in \{\tau-k,\ldots,\tau+3k\}} |x_s|, \quad |x_j| \le \gamma M, j = \tau + 3k + 1, \ldots, \nu - 1,$$

або ж $|x_{\tau+3k+1}| > \gamma M, |x_{\tau+3k}| > \gamma M$. В останньому випадку існує така точка $\tau_0 \in \{\tau + +2k, \ldots, \tau + 3k\}$, що $x_{\tau+3k+1}\, x_{\tau_0} < 0$. Дійсно, якщо, наприклад, $x_{\tau+3k+1} < -\gamma M$ і $x_n \leq 0$ для всіх $n \in \{\tau + 2k, \ldots, \tau + 3k\}$, то $f_{\tau+3k}(\phi_{\tau+3k}) \geq 0$, де $\phi_{\tau+3k} = (x_{\tau+3k}, \ldots, x_{\tau+2k})$. Тому $x_{\tau+3k+1} \geq qx_{\tau+3k}$. З останньої нерівності отримуємо $x_{\tau+3k} < -\gamma M/q < -M$, що суперечить нерівності $|x_{\tau+3k}| \leq M$.

Нехай для визначеності $x_\nu < -\gamma M < 0$. Доведемо, що існує такий інтервал $\Delta = = \{\alpha, \ldots, \beta\}$, що $\nu \in \{\alpha, \ldots, \beta\}$, $\nu - \alpha \leq k + 1$, $x_\alpha \geq 0$, $x_\beta \geq 0$, і $x_n < 0$ для $n \in \{\alpha + +1, \ldots, \beta - 1\}$. Нехай, навпаки, $x_n < 0$ для всіх $n \in \{\nu - k - 1, \ldots, \nu - 1\}$. Тоді

$$x_\nu = x_{\nu-1} + (q-1)x_{\nu-1} + f_{\nu-1}(\phi_{\nu-1}) \geq x_{\nu-1},$$

що суперечить припущенню. Ми показали існування α з вказаними вище властивостями. Найменше $n > \nu$ таке, що $x_n \geq 0$, приймаємо за β. Якщо такого n немає, то $x_n < 0$ для всіх $n > \alpha$. Тоді $f_n(\phi_n) \geq 0$ і

$$x_{n+1} = qx_n + f_n(\phi_n) \geq qx_n, \; n > \alpha + k.$$

Тому $0 > x_n \geq q^{n-\alpha-k-1} x_{\alpha+k+1}$, $n > \alpha + k + 1$. Отже, якщо $x_n < 0$ для всіх $n > \alpha$, то $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ і $\beta = \infty$.

Таким чином, за нашим припущенням $-\gamma M > \min_{n\in\Delta} x_n = x_\xi$, де ξ – найменше ціле число, яке має цю властивість. Візьмемо $\alpha' \in \{\xi - k - 1, \ldots, \xi - 1\}$, для якого $0 \leq x_{\alpha'} = = \mathcal{M}(\phi_{\xi-1})$. Тоді

$$\begin{aligned}
-\gamma M > x_\xi &= q^{\xi-\alpha'} x_{\alpha'} + \sum_{s=\alpha'}^{\xi-1} q^{\xi-s-1} f_s(\phi_s) \geq \\
&\geq q^{k+1} x_{\alpha'} + \sum_{s=\alpha'}^{\xi-1} q^{\xi-s-1} r(\mathcal{M}(\phi_s)) \geq \\
&\geq q^{k+1} x_{\alpha'} + a x_{\alpha'} + (q + \ldots + q^k) a M = T(x_{\alpha'}).
\end{aligned} \tag{11}$$

Якщо $a \leq -q^{k+1}$, то, враховуючи $0 \leq x_{\alpha'} \leq M$, отримуємо суперечність

$$-\gamma M > x_\xi \geq M(q^{k+1} + a(q^k + \ldots + q + 1)) > -\gamma M.$$

Якщо ж $a \geq -q^{k+1}$, то $-\gamma M > x_\xi \geq Ma(q^k + \ldots + q)$, що теж суперечить вибору γ.

Тепер доведемо нерівність (8). З (10) випливає

$$\max_{j=n-k,\ldots,n} |x_j| \leq \max_{j=s-k,\ldots,s+3k} |x_j| \exp(-\rho(n - s - 4k - 1)), \tag{12}$$

де $\rho = -\ln \gamma/(4k+1) > 0$. Залишилось показати, що існує таке $\Gamma_1 > 0$, що

$$\max_{j=s-k,\ldots,s+3k} |x_j| \leq \Gamma_1 \max_{j=s-k,\ldots,s} |x_j| = \Gamma_1 M_0, \; n \geq s. \tag{13}$$

Нехай ξ – перша праворуч від s точка локального екстремуму розв'язку $\{x_n\}$. Вважаємо для визначеності $x_\xi < 0$. Існують точки $\alpha \in \{\xi - k - 1, \ldots, \xi - 1\}$ і $\beta > \alpha$ такі, що $x_\alpha \geq 0$, $x_i < 0$, $i = \alpha + 1, \ldots, \beta - 1$, і $x_\beta \geq 0$ або $\beta = s + 3k$.

Позначимо $\min_{n=\alpha,\ldots,\beta} x_n = x_{\alpha+\delta} < 0$. Тоді

$$x_{\alpha+\delta} \geq q^\delta x_\alpha + \sum_{j=\alpha}^{\alpha+\delta-1} q^{\alpha+\delta-1-j} r(\mathcal{M}(\phi_j)) \geq M_0 a\delta.$$

Продовжуючи аналогічно, показуємо, що на інтервалі $\{s - k, \ldots, s + 3k\}$ існує $m \geq 1$ аналогічних чисел $\alpha_i + \delta_i$. Тоді

$$\max_{j=s,\ldots,s+3k} |x_j| = \max |x_{\alpha_i+\delta_i}| \leq M_0 \prod_{i=1}^{m} (-a\delta_i) \leq$$

$$\leq M_0 \left(\frac{-a\sum \delta_i}{m} \right)^m \leq M_0 \left(\frac{-4ka}{m} \right)^m \leq M_0 \exp(-4ka).$$

Комбінуючи (13) і (12), отримуємо (8).

Нарешті, як і в роботі [11], для доведення точності умови (5) спочатку візьмемо $(k+1)$-періодичну функцію $h : \mathbb{Z} \to \{0, \ldots, k\}$, яка означається на періоді $\{0, \ldots, k\}$ співвідношенням $h(j) = j$, а далі будемо розглядати наступне лінійне $(k+1)$-періодичне різницеве рівняння: $x_{n+1} = qx_n + ax_{n-h(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$. Отримаємо $x_{k+1} = (q^{k+1} + a(1 + q + \cdots + q^k))x_0$ і відповідно $|x_{m(k+1)}| = |\zeta|^m |x_0|$, $m = 0, 1, \ldots$, де $\zeta = q^{k+1} + a(q^k + \ldots + q + 1)$. Якщо $\zeta < -1$, то кожний ненульовий розв'язок рівняння є необмеженим. Якщо $\zeta = -1$, то всі розв'язки є періодичними.

Доведення теореми 4. Нехай $\gamma \in (q, 1)$. У доведенні теореми 3 показано, що у випадку існування розв'язку $\{x_n\}$ рівняння (1), який не задовольняє (10), завжди знайдуться інтервал осциляції $\Delta = \{\alpha, \ldots, \beta\}$ і $\xi \in \Delta$ такі, що $\min_{n\in\Delta} x_n = x_\xi < -\gamma M$, причому ξ – найменше число з Δ, яке має цю властивість.

Для ξ позначимо через $\alpha' \in \{\xi - k - 1, \ldots, \xi - 1\}$ таке число, для якого $0 \leq x_{\alpha'} = \mathcal{M}(\phi_{\xi-1})$. Як і раніше, $\phi_s = (x_s, \ldots, x_{s-k}) \in \mathbb{R}^{k+1}$.

З нерівності

$$x_{\alpha'} = qx_{\alpha'-1} + f_{\alpha'-1}(x_{\alpha'-1}, \ldots, x_{\alpha'-k-1}) \geq qx_{\alpha'-1} + aM$$

отримуємо оцінку $x_{\alpha'-1} \leq (x_{\alpha'} - aM)/q = z_{\alpha'-1}$. Аналогічно

$$x_{\alpha'-l} \leq x_{\alpha'} q^{-l} - q^{-l} aM(1 + \ldots + q^{l-1}) = z_{\alpha'-l}. \tag{14}$$

При $l = 0$ покладемо $z_{\alpha'} = x_{\alpha'}$. Позначимо через $s \in \{0, \ldots, k\}$ таке ціле число, що $z_{\alpha'-s} \leq M$ і $z_{\alpha'-s-1} > M$ (виконання другої нерівності вимагається тільки при $s < k$). Тоді $(q + a)M \leq x_{\alpha'} \leq M$ при $s = 0$ та

$$M(q^{s+1} + a(1 + q + \ldots + q^{s-1} + q^s)) \leq x_{\alpha'} \leq M(q^s + a(1 + q + \ldots + q^{s-1})) \tag{15}$$

при $s \geq 1$. Врахувавши (14), оцінимо x_ξ:

$$0 > -\gamma M > x_\xi = q^{\xi-\alpha'} x_{\alpha'} + \sum_{j=\alpha'}^{\xi-1} q^{\xi-j-1} f_j(\phi_j) \geq$$

$$\geq q^{k+1} x_{\alpha'} + \sum_{j=\alpha'}^{\xi-1} q^{\xi-j-1} r(\mathcal{M}(\phi_j)) \geq$$

$$\geq q^{k+1} x_{\alpha'} + \sum_{l=s+1}^{k} q^l a M + \sum_{l=0}^{s} q^l a (x_{\alpha'} q^{-l} - aM(q^{-1} + \ldots + q^{-l})) =$$

$$= x_{\alpha'}(q^{k+1} + a(s+1)) + aM \left(\frac{q^{s+1} - q^{k+1}}{1-q} - a \sum_{l=0}^{s} \frac{1-q^l}{1-q} \right) = S(s, M).$$

Якщо $a \leq -q^{k+1}/(s+1)$, то за нерівністю (15)

$$-\gamma M > S(s, M) \geq M \left(q^s + a \frac{1-q^s}{1-q} \right) (q^{k+1} + a(s+1)) +$$

$$+ aM \frac{q^{s+1} - q^{k+1}}{1-q} - \frac{a^2 M}{1-q} \left(s + 1 - \frac{1-q^{s+1}}{1-q} \right) =$$

$$= M \left(q^{k+s+1} + a q^s \left(s + \frac{1-q^{k+1}}{1-q} \right) + a^2 \frac{1 + q^s(sq - s - 1)}{(1-q)^2} \right) = M\Omega(s, k, q, a).$$

Якщо ж $a \geq -q^{k+1}/(s+1)$, то

$$-\gamma M > S(s, M) \geq M \left(q^{s+1} + a \frac{1-q^{s+1}}{1-q} \right) (q^{k+1} + a(s+1)) +$$

$$+ aM \frac{q^{s+1} - q^{k+1}}{1-q} - \frac{a^2 M}{1-q} \left(s + 1 - \frac{1-q^{s+1}}{1-q} \right) =$$

$$= M \left(q^{k+s+2} + a q^{s+1} \left(s + 1 + \frac{1-q^{k+1}}{1-q} \right) + a^2 \frac{1 + q^{s+1}((s+1)(q-1) - 1)}{(1-q)^2} \right) =$$

$$= M\Omega(s+1, k, q, a).$$

Для $a \geq -q^{k+1}/(k+1)$, використовуючи менш точну оцінку $x_{\alpha'} \geq 0$, отримуємо

$$S(k, M) \geq M\Omega(k+1, k, q, a) \geq \left(-\frac{q^{2k+2}}{(k+1)(1-q)} + \frac{q^{2k+2}(1-q^{k+1})}{(k+1)^2(1-q)^2} \right) M \geq$$

$$\geq \frac{k^2 - k(2k+1)}{2(k+1)^2} M = \frac{-k}{2(k+1)} M \geq -M.$$

Враховуючи останню оцінку, при виконанні (9) можна вибрати таке число $\gamma \in (0,1)$, що $\gamma > q$, $\gamma > k/(2k+2)$ і $\gamma > -\Omega(s,k,q,a)$, $s = 0,\dots,k+1$. Тоді

$$\gamma M > S(s,M) \geq \min_{s=0,\dots,k+1} \Omega(s,k,q,a)M > -\gamma M, \quad M > 0,$$

що суперечить припущенню про невиконання нерівності (10). Як і при доведенні теореми 3, показуємо справедливість оцінки (8).

Нарешті встановимо точну природу умови $\min_{1\leq s\leq k}\Omega(s,a,q,k) > -1$. Дійсно, візьмемо трійку параметрів (a,q,k) таку, що $\Omega(s_0,a,q,k) = \min_s \Omega(s,a,q,k) \leq -1$ для деякого цілого $s_0 \in [0,k]$. Означимо $(k+s_0+1)$-періодичну функцію $h : \mathbb{Z} \to \{0,\dots,k\}$ таким чином: $h(j) = j$ для $0 \leq j \leq k$ і $h(j) = k$ для $k+1 \leq j \leq k+s_0$. Тепер розглянемо $(k+s_0+1)$-періодичне лінійне різницеве рівняння $x_{n+1} = qx_n + ax_{n-k(n)},\ n \in \mathbb{Z}$. Використовуючи формулу варіації сталої, отримуємо

$$x_j = q^j x_0 + \sum_{i=0}^{j-1} q^{j-i-1} a x_{i-h(i)} = q^j x_0 + \sum_{i=0}^{j-1} q^{j-i-1} a x_0 = x_0 \left(q^j + a \sum_{i=0}^{j-1} q^i \right)$$

для всіх $j \in \{1,\dots,k+1\}$. Тому

$$x_{k+s_0+1} = q^{s_0} x_{k+1} + \sum_{j=k+1}^{k+s_0} q^{k+s_0-j} a x_{j-h(j)} = q^{s_0} x_{k+1} + \sum_{j=k+1}^{k+s_0} q^{k+s_0-j} a x_{j-k} =$$

$$= x_0 q^{s_0} \left(q^{k+1} + a \sum_{j=0}^{k} q^j \right) + \sum_{j=1}^{s_0} q^{s_0-j} a x_j =$$

$$= x_0 q^{s_0} \left(q^{k+1} + a \sum_{j=0}^{k} q^j \right) + a x_0 \sum_{j=1}^{s_0} q^{s_0-j} \left(q^j + a \sum_{i=0}^{j-1} q^i \right) = x_0 \Omega(s_0,a,q,k).$$

Отже, $x_{m(k+1+s_0)} = x_0 \Omega^m(s_0,a,q,k)$, $m = 1,2,\dots$, так що всі розв'язки рівняння є необмеженими, якщо $\Omega(s_0,a,q,k) < -1$. Якщо ж $\Omega(s_0,a,q,k) = -1$, то всі розв'язки рівняння є періодичними.

1. *El-Morshedy H. A.* On global attractivity of difference equations of nonincreasing nonlinearities with applications // Comput. and Math. Appl. – 2003. – **45**. – P. 749 – 758.
2. *Graef J. R., Qian C.* Global attractivity of the equilibrium of a nonlinear difference equation // Czech. Math. J. – 2002. – **52**. – P. 757 – 769.
3. *Graef J.R., Qian C.* Global stability in a nonlinear difference equation // J. Difference Equat. and Appl. – 1999. – **5**. – P. 251 – 270.
4. *Győri I., Trofimchuk S.* Global attractivity and persistence in discrete population model // Ibid. – 2000. – **6**. – P. 647 – 665.
5. *Kocić V. L., Ladas G.* Global asymptotic behaviour of nonlinear difference equations of higher order with applications. – Dordrecht: Kluwer Acad., 1993. – 228 p.
6. *Krause U., Pituk M.* Boundedness and stability for higher order difference equations // J. Difference Equat. and Appl. – 2004. – **10**. – P. 343 – 356.

7. *Li X.* Global attrractivity in a genotype selection model // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2002. – **29**, № 9. – P. 537 – 544.

8. *Liz E., Ivanov A., and Ferreiro J. B.* Discrete Halanay-type inequalities and applications // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Appl. – 2003. – **55**, № 6. – P. 669 – 678.

9. *Liz E., Ferreiro J. B.* A note on the global stability of generalized difference equations // Appl. Math. Lett. – 2002. – **15**. – P. 655 – 659.

10. *Matsunaga H., Hara T., and Sakata S.* Global attractivity for a nonlinear difference equation with variable delay // Comput. and Math. Appl. – 2001. – **41**. – P. 543 – 551.

11. *Tkachenko V., Trofimchuk S.* Global stability in difference equations satisfying the generalized Yorke conditions // J. Math. Anal. and Appl. (to appear).

12. *Liz E., Tkachenko V., and Trofimchuk S.* A global stability criterion for scalar functional differential equations // SIAM J. Math. Anal. – 2003. – **35**. – P. 596 – 622.

13. *Liz E., Tkachenko V., and Trofimchuk S.* Yorke and Wright 3/2-stability theorems from a unified point of view // Discrete Contin. Dynam. Syst. Suppl. Vol. – 2003. – P. 580 – 589.

14. *Kuang Y.* Delay differential equations with applications in population dynamics. – Boston: Acad. Press, 1993. – 398 p.

15. *Ivanov A., Liz E., and Trofimchuk S.* Halanay inequality, Yorke 3/2 stability criterion, and differential equations with maxima // Tohoku Math. J. – 2002. – **54**. – P. 277 – 295.

Отримано 10.09.2004