УДК 518.9

ВЛАСТИВОСТІ ГРАНИЧНИХ СТАНІВ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ КОНФЛІКТУ

М. В. Боднарчук, В. Д. Кошманенко, Н. В. Харченко

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3

We study properties of a dynamical system generated by a nonlinear composition of conflicts between nonkillable adversaries with an arbitrary number, which could be infinite, of contentious positions and a coupling coefficient α, $0 < \alpha \leq 1$. We prove existence of limit invariant states and give a complete description of the structure of the states in terms of the initial states. For the case of two and three contentious positions, we give a geometric interpretation.

Досліджуються властивості динамічної системи, породженої нелінійною композицією конфлікту між незнищенними супротивниками з довільною, в тому числі нескінченною, кількістю спірних позицій і коефіцієнтом зв'язку α, $0 < \alpha \leq 1$. Доведено існування граничних інваріантних станів і дано повний опис їх структури в термінах початкових станів. У випадку двох та трьох спірних позицій наведено геометричну інтерпретацію.

1. Вступ. Композицію конфлікту для стохастичних векторів із скінченною кількістю координат і коефіцієнтом зв'язку $\alpha = 1$ вперше було введено в роботі [1] (див. також [2, 3]). У цій роботі поняття композиції конфлікту між незнищенними супротивниками з ефектом відштовхування узагальнюється на випадок довільного значення коефіцієнта зв'язку $0 < \alpha \leq 1$. Доводиться, що коефіцієнт зв'язку впливає лише на швидкість досягнення граничних станів, але не на їх структуру. Основний результат роботи (теорема 2) показує, що граничний розподіл спірних позицій між супротивниками цілком визначається їх початковими станами. Від коефіцієнта зв'язку α залежить лише інтенсивність конфліктного процесу.

Для задання динамічної системи, що описує конфліктну взаємодію між парою опонентів, зафіксуємо два вектори $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_i, \ldots), \mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_i, \ldots)$ з невід'ємними координатами $0 \leq p_i, r_i \leq 1$. У випадку скінченної кількості спірних позицій вектори $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$, $n < \infty$. Якщо кількість спірних позицій є довільною, то вважаємо, що $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in l_1$. Значення координат p_i, r_i інтерпретуються як незалежні ймовірності окупувати i-ту спірну позицію відповідним опонентом. Тому вектори $\mathbf{p}, \mathbf{r}$ нормовані на одиницю:

$$|\mathbf{p}|_1 := p_1 + \ldots + p_i + \ldots = 1, \qquad |\mathbf{r}|_1 = r_1 + \ldots + r_i + \ldots = 1.$$

Фіксація векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r}$ означає задання початкового незалежного розподілу кожного із опонентів по спірних позиціях. Неможливість одночасної присутності обох супротивників у будь-якій позиції призводить до конфлікту з ефектом відштовхування. Задача полягає в знаходженні „справедливого"перерозподілу ймовірностей присутності супротивників по всіх спірних позиціях. Закон (правило) перерозподілу задається нелінійною і некомутативною композицією конфлікту $\divideontimes$ між векторами $\mathbf{p}, \mathbf{r}$: $\mathbf{p}^1 = \mathbf{p} \divideontimes \mathbf{r}$, $\mathbf{r}^1 = \mathbf{r} \divideontimes \mathbf{p}$, де координати векторів $\mathbf{p}^1, \mathbf{r}^1$, які описують результат першого кроку конфліктної взаємодії з інтенсивністю $0 < \alpha \leq 1$, визначаються таким чином:

$$p_i^{(1)} := \frac{p_i(1-\alpha r_i)}{1-\alpha(\mathbf{p},\mathbf{r})}, \quad r_i^{(1)} := \frac{r_i(1-\alpha p_i)}{1-\alpha(\mathbf{p},\mathbf{r})} \quad i = 1,2,\ldots, \tag{1}$$

$(\mathbf{p},\mathbf{r})$ позначає скалярний добуток у $\mathbb{R}^n$ або в l_2. У випадку $\alpha = 1$ композицію конфлікту $\divideontimes$ визначено коректно, якщо початкові вектори задовольняють умову $1 \neq (\mathbf{p},\mathbf{r})$. Слід зауважити, що значення $p_i^{(1)}$ пропорційне добутку початкової ймовірності p_i окупувати i-ту позицію на ймовірність відсутності опонента в цій позиції (остання величина береться з урахуванням коефіцієнта взаємодії α). Аналогічну інтерпретацію має величина $r_i^{(1)}$. За індукцією визначаємо координати векторів $\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N$ на N-му кроці конфліктної композиції:

$$p_i^{(N)} := \frac{p_i^{(N-1)}(1-\alpha r_i^{(N-1)})}{1-\alpha(\mathbf{p}^{(N-1)},\mathbf{r}^{(N-1)})}, \qquad r_i^{(N)} := \frac{r_i^{(N-1)}(1-\alpha p_i^{(N-1)})}{1-\alpha(\mathbf{p}^{(N-1)},\mathbf{r}^{(N-1)})} \quad i = 1,2,\ldots. \tag{2}$$

Знаменник у формулах (1), (2) гарантує нормування всіх векторів на одиницю:

$$\mid \mathbf{p}^1 \mid_1 = \mid \mathbf{r}^1 \mid_1 = \mid \mathbf{p}^N \mid_1 = \mid \mathbf{r}^N \mid_1 = 1,$$

що відповідає принципу незнищенності: сумарна ймовірність присутності кожного з опонентів по всіх позиціях дорівнює одиниці на кожному кроці конфліктної конфронтації.

Таким чином, послідовність пар $\{\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N\}_{N=1}^{\infty}$ утворює дискретну траєкторію станів динамічної системи конфлікту в одному з просторів $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ або $l_1 \times l_1$. У роботі розглядається поведінка та властивості таких траєкторій у термінах початкових векторів $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$. Насамперед у п. 2 теорема про конфлікт із роботи [1] узагальнюється на випадок довільного значення коефіцієнта зв'язку $0 < \alpha \leq 1$, у п. 3 доводиться теорема про структуру граничних станів динамічної системи конфлікту з ефектом відштовхування. Вона є новою для усіх значень коефіцієнта зв'язку. Зазначимо, що в роботах [4, 5] встановлено досить глибокі результати про існування довільних як метричних, так і топологічних граничних розподілів конфліктної взаємодії для нескінченного добутку дискретних мір. Але точний опис граничних розподілів у термінах початкових станів одержано вперше в теоремі 2 (див. нижче). В останньому розділі показано, що траєкторії конфліктної взаємодії для двох та трьох спірних позицій припускають геометричну інтерпретацію, що дає підґрунтя для встановлення наочного уявлення про ці процеси. Зауважимо, що геометрична інтерпретація у випадку конфліктів, які описує популяційна динаміка (див., наприклад, [6, 7], часто використовується для знаходження правильного розв'язку конкретної задачі.

2. Теорема про існування граничних векторів.

Теорема 1. *Для довільної пари нормованих на одиницю векторів* $\mathbf{p},\mathbf{r} \in l_1$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}$, *існують границі*

$$\mathbf{p}^\infty = \lim_{N\to\infty} \mathbf{p}^N, \quad \mathbf{r}^\infty = \lim_{N\to\infty} \mathbf{r}^N,$$

де $\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N$ *визначаються за формулами (1), (2). Граничні вектори* $\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty$ *є ортогональними,*

$$\mathbf{p}^\infty \perp \mathbf{r}^\infty, \tag{3}$$

та інваріантними відносно композиції конфлікту,

$$\mathbf{p}^{\infty} = \mathbf{p}^{\infty} \divideontimes \mathbf{r}^{\infty}, \quad \mathbf{r}^{\infty} = \mathbf{r}^{\infty} \divideontimes \mathbf{p}^{\infty}. \tag{4}$$

Якщо вектори $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ *є рівними, але* $(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \neq 1$*, якщо* $\alpha = 1$*, то граничні вектори* $\mathbf{p}^{\infty}, \mathbf{r}^{\infty}$ *також існують, є рівними та інваріантними відносно* $\divideontimes$*. При цьому якщо* $p_i = r_i \neq 0$*, то* $p_i^{(\infty)} = r_i^{(\infty)} = 1/m$*, де* $m \leq n$ *позначає кількість ненульових початкових координат; усі інші координати* $p_j^{(\infty)}, r_j^{(\infty)}$ *дорівнюють нулю.*

Для доведення цієї теореми використовуємо такі леми та твердження.

Лема 1. *Нехай* $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}$*. Якщо* $0 \leq r_i < p_i \leq 1$ *для деякого* i*, то*

$$\lim_{N \to \infty} r_i^{(N)} = 0 \tag{5}$$

та

$$\lim_{N \to \infty} p_i^{(N)} = p_i^{(\infty)} > 0. \tag{6}$$

Доведення. Для $\alpha = 1$ цю лему доведено в [1]. Тому покладаємо $\alpha < 1$. Якщо $r_i = 0$, то $0 = r_i^{(N)} = r_i^{(\infty)} = 0$, а існування $p_i^{(\infty)}$ випливає з подальших міркувань. Розглянемо випадок $0 < r_i < p_i \leq 1$. Припустимо, що $p_i = 1$. Тоді $p_j = 0$ для $j \neq i$ і тому на підставі (1) маємо $p_i^{(1)} = 1$. За індукцією $p_i^{(N)} = 1$ для усіх N. Звідси

$$r_i^{(1)} = \frac{r_i(1-\alpha)}{1-\alpha r_i} = r_i \beta^{(0)}, \qquad \beta^{(0)} := \frac{1-\alpha}{1-\alpha r_i}.$$

Оскільки $0 < \alpha$ та $0 < r_i < 1$, то $0 < \beta^{(0)} < 1$, звідки випливає, що $r_i^{(1)} < r_i$. За індукцією

$$0 < \beta^{(N)} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha r_i^{(N)}} < 1, \quad r_i^{(N+1)} < r_i^{(N)}, \qquad \text{де} \quad r_i^{(N+1)} = r_i^{(N)} \beta^{(N)}.$$

Звідси випливає нерівність $\beta^{(N+1)} < \beta^{(N)}$ при довільному N. Далі, оскільки очевидно, що

$$r_i^{(N+1)} = r_i^{(N)} \beta^{(N)} = r_i^{(N-1)} \beta^{(N-1)} \beta^{(N)} = \ldots = r_i^{(0)} \beta^{(0)} \beta^{(1)} \ldots \beta^{(N)},$$

то $r_i^{(N+1)} \to 0$ при $N \to \infty$, тому що $0 < \beta^{(0)} < 1$. Отже, при $p_i = 1$ справедливість (5) доведено.

Розглянемо тепер випадок $0 < r_i < p_i < 1$. Позначимо $R_i^{(0)} = \dfrac{p_i}{r_i}$, $R_i^{(N)} = \dfrac{p_i^{(N)}}{r_i^{(N)}}$. Тоді

$$R_i^{(1)} = \frac{p_i^{(1)}}{r_i^{(1)}} = \frac{p_i(1-\alpha r_i)}{r_i(1-\alpha p_i)} = R_i^{(0)} \frac{1-\alpha r_i}{1-\alpha p_i} = R_i^{(0)} \gamma_i^{(0)}, \qquad \gamma_i^{(0)} := \frac{1-\alpha r_i}{1-\alpha p_i} > 1.$$

Таким чином, $1 < R_i^{(0)} < R_i^{(1)}$, а також $0 < r_i^{(1)} < p_i^{(1)} < 1$. За індукцією маємо $1 < R_i^{(N)} < \infty,\ 0 < r_i^{(N)} < p_i^{(N)} < 1$ для усіх N. Більш того,

$$R_i^{(N)} = R_i^{(N-1)}\gamma_i^{(N-1)} = R_i^{(0)}\gamma_i^{(0)}\dots\gamma_i^{(N-1)}, \qquad \gamma_i^{(N)} = \frac{1-\alpha r_i^{(N)}}{1-\alpha p_i^{(N)}}.$$

Очевидно, що коефіцієнти $\gamma_i^{(N)}$ монотонно зростають: $1 < \gamma_i^{(0)} < \gamma_i^{(1)} < \ldots < \gamma_i^{(N)}$. Звідси випливає, що $R_i^{(N)} \to \infty,\ N \to \infty$. А це можливо лише при $r_i^{(N)} \to 0$, оскільки $p_i^{(N)} < 1$. Отже, (5) доведено повністю.

Для доведення (6) введемо позначення:

$$d_i^{(0)} := p_i - r_i > 0, \quad d_i^{(N)} := p_i^{(N)} - r_i^{(N)}, \quad N = 1, 2, \ldots .$$

На підставі (1), (2) маємо

$$d_i^{(1)} = \frac{p_i - \alpha p_i r_i - r_i + \alpha p_i r_i}{1-\alpha(\mathbf{p},\mathbf{r})} = \frac{d_i^{(0)}}{1-\alpha(\mathbf{p},\mathbf{r})}.$$

Тому $d_i^{(0)} < d_i^{(1)} < 1$, оскільки очевидно, що $1-\alpha(\mathbf{p},\mathbf{r}) < 1$. За індукцією $d_i^{(N)} < d_i^{(N+1)} < 1$ для всіх N. Звідси випливає існування границі:

$$1 \geq d_i^{(\infty)} = \lim_{N\to\infty} d_i^{(N)} = \sup_N d_i^{(N)} > d_i^{(0)} > 0,$$

що й доводить справедливість (6), оскільки завдяки (5)

$$p_i^{(\infty)} = d_i^{(\infty)}. \tag{7}$$

У випадку $0 \leq p_k \leq r_k \leq 1$ аналогічно отримуємо

$$\lim_{N\to\infty} p_k^{(N)} = 0, \quad \lim_{N\to\infty} r_k^{(N)} = -d_k^{\infty} = r_k^{\infty} > 0. \tag{8}$$

Твердження 1. *Нехай* $1 > p_i = r_i > 0$ *для деякого* i*, тоді*

$$1 > p_i^{(N)} = r_i^{(N)} > 0, \quad N = 1, 2, \ldots .$$

Доведення. При $p_i = r_i$ маємо $p_i\,(1-\alpha r_i) = r_i\,(1-\alpha p_i)$. За формулами (1), (2) з останньої рівності випливає, що $p_i^{(1)} = r_i^{(1)}$. Легко бачити, що за індукцією $p_i^{(N)} = r_i^{(N)}$ для $N = 1, 2, \ldots$.

Лема 2. *Нехай* $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}$*, але* $p_j = r_j$ *для деякого* j*. Тоді*

$$p_j^{(N)} = r_j^{(N)} \to 0, \quad N \to \infty. \tag{9}$$

Доведення. Якщо $1 > p_j = r_j > 0$, то $p_j^{(N)} = r_j^{(N)} > 0$ для всіх N на підставі твердження 1. Зокрема, для $c_N := \left(p_j^{(N)}\right)^2$ маємо $1 > c_N > 0$. Доведемо від супротивного, що $p_j^{(N)} \to 0$. Припустимо протилежне, тобто що $p_j^{(N)} \nrightarrow 0$. Тоді існує підпослідовність N' така, що $c_{N'} \to c$, де $1 > c > 0$. А це приводить до суперечності. Дійсно, оскільки $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}$, то існує координата i така, що $0 \leq r_i < p_i \leq 1$, і тому згідно з лемою 1 права і ліва частини співвідношення

$$p_i^{\circledast,N'+1} = \frac{p_i^{\circledast,N'}(1 - \alpha r_i^{\circledast,N'})}{z_{N'}}$$

збігаються до різних границь, тому що $r_i^{\circledast,N'} \to 0$, а $z_{N'} := 1 - \alpha(\mathbf{p}^{\circledast,N'}, \mathbf{r}^{\circledast,N'}) = 1 - \alpha(p_j^{\circledast,N'})^2 - \alpha\sum_{k\neq j} p_k^{\circledast,N'} r_k^{\circledast,N'} \leq 1 - \alpha(p_j^{\circledast,N'})^2$ прямує до $0 < 1 - \alpha c^2 < 1$.

Твердження 2. *Якщо $p_i \geq r_i$ для деякого i, то*

$$p_i^{(N)} \geq r_i^{(N)}, \quad N \geq 1. \tag{10}$$

Доведення. При $p_i \geq r_i$ з (1), (2) одержуємо $p_i^{(1)} \geq r_i^{(1)}$. За індукцією

$$p_i^{(N+1)} = \frac{1}{z_N} p_i^{(N)}(1 - \alpha r_i^{(N)}) \geq \frac{1}{z_N} r_i^{(N)}(1 - \alpha r_i^{(N)}) \geq \frac{1}{z_N} r_i^{(N)}(1 - \alpha p_i^{(N)}) = r_i^{(N+1)},$$

де $z_N = 1 - \alpha(\mathbf{p}^{\circledast,N}, \mathbf{r}^{\circledast,N})$.

Твердження 3. *Якщо $\mathbf{p} \perp \mathbf{r}$, то*

$$\mathbf{p} \circledast \mathbf{r} = \mathbf{p} = \mathbf{p}^{(N)} = \mathbf{p}^{\infty}, \quad \mathbf{r} \circledast \mathbf{p} = \mathbf{r} = \mathbf{r}^{(N)} = \mathbf{r}^{\infty},$$

тобто ортогональні вектори є інваріантними відносно композиції конфлікту.

Доведення. З $\mathbf{p} \perp \mathbf{r}$ випливає, що $z_0 = 1 - \alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = 1$, а також $p_i r_i = 0$. Тому $p_i^{(1)} = \frac{1}{z_0} p_i(1 - \alpha r_i) = p_i$ та $r_i^{(1)} = \frac{1}{z_0} r_i(1 - \alpha p_i) = r_i$, оскільки одна з координат p_i або r_i є нулем. За індукцією $z_N = 1$, а також $\mathbf{p}_i^{(N)} = \mathbf{p}, \mathbf{r}_i^{(N)} = \mathbf{r}$.

Тепер припустимо, що вектори $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbf{R}^n$, $n > 2$, і задовольняють умову

$$p_i = r_i \neq 0 \qquad \text{для усіх} \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Без втрати загальності можемо вважати, що координати вектора $\mathbf{p}$ впорядковано таким чином, що

$$0 < p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_{n-1} \leq p_n < 1, \quad p_1 \leq 1/n \leq p_n. \tag{12}$$

Тоді, позначаючи $r_i^c := 1 - \alpha r_i = 1 - \alpha p_i$, маємо

$$1 > r_1^c \geq r_2^c \geq \ldots \geq r_{n-1}^c \geq r_n^c > 0. \tag{13}$$

Твердження 4. *Якщо виконується припущення (11), то нормуючий коефіцієнт* $z_0 = 1 - \alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ *задовольняє нерівності*

$$r_1^c \geq z_0 \geq r_n^c. \tag{14}$$

Доведення. Якщо $\mathbf{p} = \mathbf{r} = (1/n, \ldots, 1/n)$, то

$$z_0 = 1 - \alpha/n, \quad r_1^c = 1 - \alpha/n = r_n^c.$$

У загальному випадку $r_i^c = 1 - \alpha p_i$, і тому

$$z_0 = 1 - \alpha \sum_i p_i r_i = \sum_i p_i - \alpha \sum_i p_i r_i = \sum_i p_i (1 - \alpha r_i) = (\mathbf{p}, \mathbf{r}^c),$$

де $\mathbf{r}^c = (r_1^c, \ldots, r_n^c)$. Якщо усі r_i^c замінити максимальним значенням r_1^c (див. (13)), то

$$z_0 = \sum_i p_i r_i^c \leq r_1^c \sum_i p_i = r_1^c.$$

Це доводить першу нерівність у (14). Аналогічно встановлюємо нерівність $z_0 \geq r_n^c$, що й завершує доведення твердження 4.

Твердження 5. *Якщо виконується (11), то*

$$p_1 \leq p_1^{(1)}, \quad p_n^{(1)} \leq p_n, \tag{15}$$

$$p_1^{(1)} \leq p_i^{(1)} \leq p_n^{(1)}, \ 1 \leq i \leq n, \tag{16}$$

$$p_1 \leq p_1^{(1)} \leq p_1^{(N)} \leq p_i^{(N)} \leq p_n^{(N)} \leq p_n^{(1)} \leq p_n, \ 1 \leq i \leq n. \tag{17}$$

Доведення. Нерівності (15) є безпосереднім наслідком (14). Нерівності (16) еквівалентні нерівностям

$$p_1(1 - \alpha p_1) \leq p_i(1 - \alpha p_i) \leq p_n(1 - \alpha p_n, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Для доведення цих нерівностей розглянемо функцію $y(x) = x(1 - \alpha x)$, графік якої зображено на рис. 1.

На підставі (12) $p_1 \leq p_i$, $i = 1, \ldots, n$. Зокрема, при $n \geq 3$ $p_i < 1/2$, $i < n$, тому з $p_1 \leq p_i$ випливає $y(p_1) \leq y(p_i)$, що видно з графіка. Це доводить першу нерівність у (16). Далі, якщо $p_n \leq 1/2\alpha \leq 1$, то $y(p_i) \leq y(p_n)$, оскільки $p_i \leq p_n$. А якщо $1/2\alpha < p_n < 1$ (це може мати місце лише при $1/2\alpha < 1$), то внаслідок симетричності графіка функції $y(x)$ відносно прямої $x = 1/2\alpha$ маємо $y(p_n) = y(1/2\alpha - p_n)$. Звідси $y(p_n) \geq y(p_i)$, оскільки в цьому випадку $1/2\alpha - p_n \geq p_i$, а отже, $y(1/2\alpha - p_n) \geq y(p_i)$ (це випливає з нерівності

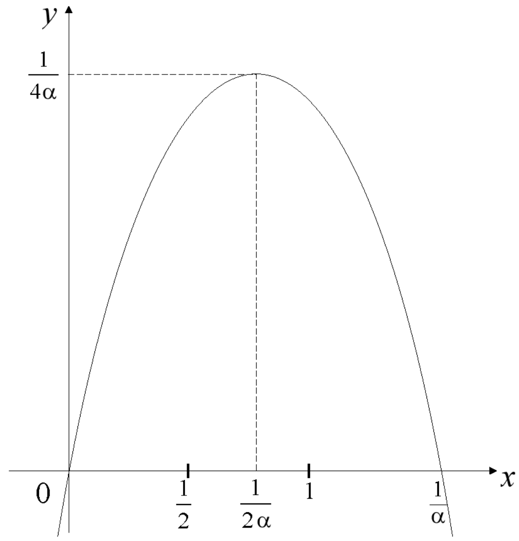

Рис. 1.

$p_i + p_n < 1 < 1/2\alpha$). Таким чином, (16) доведено повністю. За індукцією нерівності (15), (16) виконуються для всіх $N = 1, 2, \ldots$, що й доводить (17).

Твердження 6. *За умови (11) існують і є рівними граничні вектори*

$$\mathbf{p}^{\infty} = \lim_{N\to\infty} \mathbf{p}^{N} = \lim_{N\to\infty} \mathbf{r}^{N} = \mathbf{r}^{\infty}.$$

Більше того, їх координати є рівномірно розподіленими в сенсі

$$\mathbf{p}^{\infty} = \mathbf{r}^{\infty} = (1/n, \ldots, 1/n)\,. \tag{18}$$

Доведення. Легко бачити, що з (14), (17) випливає

$$r_1^{(N),c} \geq z_N \geq r_n^{(N),c}, \quad N = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

де $r_i^{(N),c} = 1 - r_i^{(N)}$. З іншого боку, з (17), (19) випливає, що послідовності $p_i^{(N)}$ з $i = 1$ та $i = n$ є монотонними. Отже, існують границі

$$p_1^{(\infty)} = \lim_{N\to\infty} p_i^{(N)} \quad \text{та} \quad p_n^{(\infty)} = \lim_{N\to\infty} p_n^{(N)}.$$

Оскільки $p_1^{(\infty)} = p_1^{(\infty)}(1 - \alpha p_1^{\infty})/z_{\infty}$ та $p_n^{(\infty)} = p_n^{(\infty)}(1 - \alpha p_n^{(\infty)})/z_{\infty}$, то отримуємо $z_{\infty} = 1 - \alpha p_1^{(\infty)} = 1 - \alpha p_n^{(\infty)}$. На підставі (19) це можливо лише при

$$p_1^{(\infty)} = p_n^{(\infty)} = 1/n.$$

А завдяки (15) робимо висновок, що границі $p_i^{(\infty)} = \lim\limits_{N\to\infty} p_i^{(N)}$ існують для всіх i та $p_i^{(\infty)} = 1/n$. Це завершує доведення (18).

Доведення теореми 1. Нехай $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}$. Тоді існування граничних векторів $\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty$ випливає з лем 1 та 2. Більш того, з (5), (6) та (8) випливає, що $(\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N) \to 0$, а

$$\lim_{N\to\infty} z_N = z_\infty = 1. \tag{20}$$

Отже, (3) доведено.

Інваріантність граничних векторів $\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty$ відносно дії композиції конфлікту, тобто співвідношення (4), є наслідком твердження 3. Далі, якщо $\mathbf{p} = \mathbf{r}$, але $(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \neq 1$, коли $\alpha = 1$, то з твердження 1 випливає, що $\mathbf{p}^N = \mathbf{r}^N$ для всіх N і тому $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty$. При умові (9) всі координати векторів $\mathbf{p}^\infty$, $\mathbf{r}^\infty$ дорівнюють $1/n$ (див. твердження 6). Зрозуміло, що якщо $p_i = r_i \neq 0$ лише для $i = 1, \ldots, m < n$, то $p_i^{(\infty)} = r_i^{(\infty)} = 1/m$; усі інші граничні координати дорівнюють нулю. При цьому співвідношення (4) також виконуються, оскільки очевидно, що $z_\infty = 1$ і в цьому випадку.

Теорему доведено.

Розглянемо питання про локальну поведінку координат $p_i^{(N)}, r_i^{(N)}$ як функцій від N, тобто від кроку конфліктної композиції, у випадку, коли $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}$. Зауважимо, що внаслідок нелінійності цієї композиції (див. (1), (2)) залежність $p_i^{(N)}, r_i^{(N)}$ від N має досить складний характер. Так, комп'ютерний аналіз ряду конкретних прикладів виявив наявність коливань цих координат. Частота і кількість осциляцій залежать від початкового розподілу координат векторів $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}$, розмірності простору $\mathbb{R}_+^n$ та коефіцієнта взаємодії α. Закономірності таких коливань, без сумніву, становлять практичний інтерес і потребують додаткових досліджень. Тут ми встановлюємо лише деякі умови, при яких коливання припиняються і координати прямують до своїх границь монотонно.

Твердження 7. *Нехай $p_i > r_i$ для деякого i. Тоді існує номер N_0 такий, що послідовність $\{r_i^{(N)}\}_{N>N_0}$ збігається до нуля монотонно. Припустимо, що існує номер N_0, для якого виконуються нерівності*

$$p_i^{(N)} > (\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N) > r_i^{(N)} \quad \text{для} \quad \text{всіх} \quad N > N_0. \tag{21}$$

Тоді обидві послідовності $\{p_i^{(N)}\}_{N>N_0}$, $\{r_i^{(N)}\}_{N>N_0}$ збігаються до своїх границь монотонно:

$$p_i^{(N)} \uparrow p_i^{(\infty)} = d_i^{(\infty)} > 0, \;\; r_i^{(N)} \downarrow 0, \quad N \to \infty. \tag{22}$$

Доведення. З (1), (2) очевидно, що $p_i^{(N+1)} > p_i^{(N)}$ тоді і лише тоді, коли

$$\frac{1 - \alpha r_i^{(N)}}{1 - \alpha(\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N)} > 1.$$

А це еквівалентно другій нерівності в (21) при $N > N_0$. Покажемо, що перша нерівність в (21) завжди виконується починаючи з деякого N_0, звичайно, за умови $p_i > r_i$. Дійсно, з доведення леми 1 випливає, що $p_i^{(N)} \geq d_i^{(N)} \geq d_i^{(0)} > 0$ для усіх N. Тому внаслідок того, що $(\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N) \to 0$, $N \to \infty$, існує N_0 таке, що для будь-якого $N > N_0$ виконується нерівність $(\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N) < d_i^{(0)}$, а разом з нею і $(\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N) < p_i^{(N)}$. Тому $r_i^{(N+1)} < r_i^{(N)}$ $N > N_0$. Таким чином, послідовність $\left\{r_i^{(N)}\right\}_{N=N_1}^{\infty}$ монотонно спадає.

3. Опис граничних станів. Якщо $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ і $\mathbf{p} = \mathbf{r}$, то згідно з теоремою 1 $p_i^\infty = r_i^\infty = 1/m$, де $m \leq n$ позначає кількість ненульових координат у початкових векторів.

Нехай $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in l_1$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}$. Згідно з (1), (2) та теоремою 1 нескінченна кількість кроків застосування композиції конфлікту переводить вектори $\mathbf{p}, \mathbf{r}$ у пару граничних векторів $\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty$. Щоб описати їх структуру, введемо такі позначення:

$$N_+ := \{i : d_i > 0\},\ N_- := \{i : d_i < 0\},\ N_0 := \{i : d_i = 0\},\ d_i \equiv d_i^{(0)} = p_i - r_i,$$

$$D := \sum_{i \in N_+} d_i = -\sum_{i \in N_-} d_i.$$

Теорема 2. *У випадку* $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in l_1$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}$, *координати граничних векторів* $\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty$ *мають вигляд*

$$p_i^\infty = \begin{cases} d_i/D, & i \in N_+, \\ 0, & i \in N_- \cap N_0, \end{cases} \qquad r_i^\infty = \begin{cases} -d_i/D, & i \in N_-, \\ 0, & i \in N_+ \cap N_0. \end{cases}$$

Доведення. Розглянемо спершу ситуацію, коли $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$. При цьому без втрати загальності можемо вважати, що координати початкових векторів впорядковано таким чином, що виконуються співвідношення

$$\begin{array}{rcccccccccc} \mathbf{p} = (& p_1, & \ldots, & p_k, & p_{k+1}, & \ldots, & p_s, & p_{s+1}, & \ldots, & p_n) \\ & \vee & & \vee & \wedge & & \wedge & \| & & \| \\ \mathbf{r} = (& r_1, & \ldots, & r_k, & r_{k+1}, & \ldots, & r_s, & r_{s+1}, & \ldots, & r_n). \end{array}$$

Тоді за теоремою 1 пара граничних векторів має вигляд

$$\begin{array}{rcccccccccc} \mathbf{p}^\infty = (& p_1^\infty, & \ldots, & p_k^\infty, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 0) \\ & \vee & & \vee & \wedge & & \wedge & & & \\ \mathbf{r}^\infty = (& 0, & \ldots, & 0, & r_{k+1}^\infty, & \ldots, & r_s^\infty, & 0, & \ldots, & 0). \end{array}$$

Для знаходження точних значень граничних координат проаналізуємо, як змінюється різниця $d_i^{(N)} = p_i^{(N)} - r_i^{(N)}$ при $N \to \infty$. Так, після першого кроку конфліктної композиції

$$d_i^{(1)} = \frac{p_i(1 - \alpha r_i) - r_i(1 - \alpha p_i)}{1 - \alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r})} = \frac{d_i}{1 - \alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r})}, \qquad i = 1, \ldots, s.$$

Звідси дістаємо

$$\frac{d_i^{(1)}}{d_j^{(1)}} = \frac{d_i}{d_j}, \quad i, j \in N_+ \cup N_-.$$

За індукцією для всіх $N > 0$ маємо

$$\frac{d_i^{(N)}}{d_j^{(N)}} = \frac{d_i}{d_j}, \quad i, j \in N_+ \cup N_-.$$

Переходячи до границі $N \to \infty$, отримуємо

$$\frac{d_i^{(\infty)}}{d_j^{(\infty)}} = \frac{d_i}{d_j}, \quad i, j \in N_+ \cup N_-.$$

Із доведення теореми 1 випливає $p_i^{(\infty)} = d_i^{(\infty)},\ i \in N_+,\ r_i^{(\infty)} = -d_i^{(\infty)},\ i \in N_-$.

Таким чином, для знаходження $p_i^{\infty}, r_i^{\infty}$ потрібно розв'язати таку систему рівнянь:

$$\frac{p_i^{(\infty)}}{p_j^{(\infty)}} = \frac{d_i}{d_j}, \quad i, j \in N_+, \qquad \sum_{i \in N_+} p_i^{(\infty)} = 1,$$

$$\frac{r_i^{(\infty)}}{r_j^{(\infty)}} = \frac{d_i}{d_j}, \quad i, j \in N_-, \qquad \sum_{i \in N_-} r_i^{(\infty)} = 1.$$

Неважко показати, що єдиний розв'язок даної системи має вигляд

$$p_i^{(\infty)} = \frac{d_i}{\sum\limits_{j \in N_+} d_j}, \quad i \in N_+,\ r_i^{(\infty)} = \frac{d_i}{\sum\limits_{j \in N_-} d_j}, \quad i \in N_-. \tag{23}$$

У випадку $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in l_1$ аналогічні міркування приводять до нескінченної системи рівнянь, яка також має єдиний розв'язок вигляду (23). Використовуючи позначення $\sum\limits_{i \in N_+} d_i = D = -\sum\limits_{i \in N_-} d_i$, завершуємо доведення теореми.

Зазначимо, що внаслідок (23) граничний розподіл координат не залежить від коефіцієнта α. Але швидкість досягнення граничних значень $p_i^{(\infty)}, r_i^{(\infty)}$ залежить від α в сенсі швидкості зміни різниці $d_i^{(N)}(\alpha)$ при $N \to \infty$. Дійсно, зміна значень координат $p_i^{(N)}, r_i^{(N)}$ на кожному кроці застосування композиції конфлікту пов'язана з поведінкою цієї різниці згідно з формулою

$$d_i^{(N)}(\alpha) = p_i^{(N)} - r_i^{(N)} = \frac{d_i^{(N-1)}(\alpha)}{1 - \alpha(\mathbf{p}^{(N-1)}, \mathbf{r}^{(N-1)})}.$$

Звідси випливає, що

$$|d_i^{(N)}(\alpha_1)| < |d_i^{(N)}(\alpha_2)| \quad \text{при} \quad 0 < \alpha_1 < \alpha_2 \le 1,$$

навіть якщо $d_i^{(N-1)}(\alpha_1) = d_i^{(N-1)}(\alpha_2)$. Очевидно, що різниця змінюється найшвидше при $\alpha = 1$. Коли ж коефіцієнт конфліктної взаємодії α близький до нуля, то всі величини $d_i^{(N)}(\alpha), p_i^{(N)}, r_i^{(N)}$ змінюються дуже повільно.

4. Графічне зображення. Для динамічної системи конфлікту з початковими векторами $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, граничні стани $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$ припускають геометричну інтерпретацію. Іншими словами, граничний розподіл імовірностей присутності кожного з опонентів у випадках із двома та трьома спірними позиціями можна побудувати графічно.

4.1. Випадок двох спірних позицій. Нехай $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ – довільна пара стохастичних векторів із координатами $p_1, p_2 > 0$ та $r_1, r_2 > 0$ відповідно. Співставимо початковому стану $\{\mathbf{p}, \mathbf{r}\}$ динамічної системи конфлікту (для спрощення наступних формул покладаємо $\alpha = 1$) точку $\mathbf{s}(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ з координатами $x = p_1/p_2$, $y = r_1/r_2$. Зрозуміло, що по точці $\mathbf{s}(x, y)$ можна відновити координати векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r}$:

$$p_1 = \frac{x}{1+x}, \quad p_2 = \frac{1}{1+x}, \quad r_1 = \frac{y}{1+y}, \quad p_2 = \frac{1}{1+y}.$$

Ця відповідність продовжується на будь-які стани динамічної системи. Дійсно, позначимо

$$K = \{\mathbf{s}(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \cup \{0, \infty\} \cup \{\infty, 0\} : x, y \in [0, \infty]\}.$$

Тоді очевидно, що відображення

$$I : \{\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2_+ \ : \ |\mathbf{p}|_1 = |\mathbf{r}|_1 = 1\} \to \{\mathbf{s}(x, y) \in K \ : \ x = p_1/p_2, y = r_1/r_2\}$$

є бієктивним.

Зафіксуємо число $0 < k < \infty$ і півпряму

$$L_k := \{\mathbf{s}(x, y) \in K \ : y = kx, \ 0 < k < \infty\}.$$

Розглянемо стан $\{\mathbf{p}^1, \mathbf{r}^1\}$ і відповідну йому точку $\mathbf{s}(x^{(1)}, y^{(1)})$ після першого кроку конфліктної взаємодії. Використовуючи (1) з $\alpha = 1$, неважко встановити, що координати $x^{(1)}, y^{(1)}$ пов'язані з x, y формулами

$$x^{(1)} = x/y = 1/k, \ \ y^{(1)} = y/x = k.$$

Внаслідок бієктивності відображення I точка $\mathbf{s}(x^{(1)}, y^{(1)})$ відповідає єдиному стану $\{\mathbf{p}^1, \mathbf{r}^1\}$ із координатами $p_1^{(1)} = \dfrac{1}{1+k}, p_2^{(1)} = \dfrac{k}{1+k}, r_1^{(1)} = \dfrac{k}{1+k}, r_2^{(1)} = \dfrac{1}{1+k}$ (рис. 2).

Далі, використовуючи (2), знаходимо, що на $(N+1)$-му кроці конфліктної взаємодії стану $\{\mathbf{p}^{N+1}, \mathbf{r}^{N+1}\}$ відповідає точка $\mathbf{s}(x^{(N+1)}, y^{(N+1)})$ із координатами

$$x^{(N+1)} = 1/k^N, \ \ y^{(N+1)} = k^N.$$

Таким чином, на першому кроці конфліктної взаємодії всі точки півпрямої L_k переходять в одну точку $\mathbf{s}(x^{(1)}, y^{(1)})$, $x^1 = 1/k, y^1 = k$ на гіперболі $\Gamma := \{y = 1/x\}$. При всіх наступних кроках конфліктної композиції точка $\mathbf{s}(x^{(N)}, y^{(N)})$, $N = 1, 2, \ldots$, рухається по гіперболі Γ до нескінченності в фіксованому напрямку, асимптотично наближаючись до однієї з координатних осей. Винятком є ситуація з $k = 1$. На першому кроці півпряма

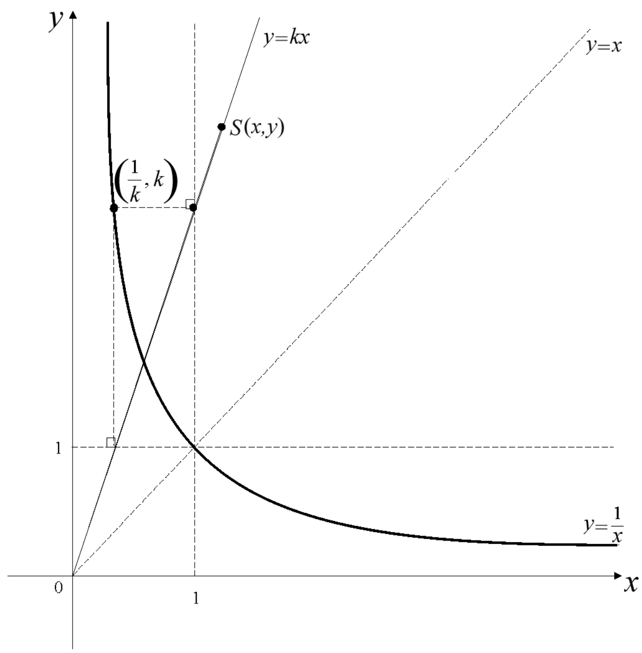

Рис. 2.

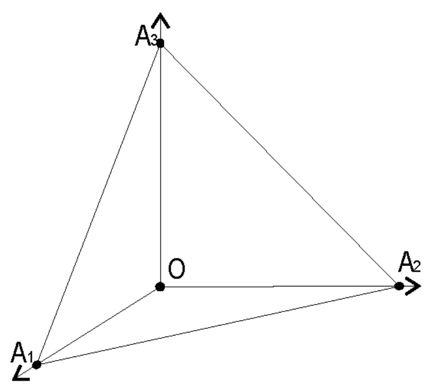

Рис. 3.

$L_1 := \{\mathbf{s}(x, y) \in K \ : y = x\}$ переходить у точку $\mathbf{s}(x, y) \in \Gamma$, яка відповідає інваріантному стану $\mathbf{p} = \mathbf{r}$ із координатами $p_1 = 1/2 = p_2 = r_1 = r_2$.

4.2. Випадок трьох спірних позицій. Із геометричної точки зору всі стани динамічної системи конфлікту $\{\mathbf{p}, \mathbf{r}\} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ із трьома спірними позиціями утворюють множину векторів, кінці яких належать замкненій частині площини, обмеженій трикутником $A_1A_2A_3$ з вершинами в точках $A_1(1, 0, 0)$, $A_2(0, 1, 0)$, $A_3(0, 0, 1)$. (рис. 3).

Використовуючи теорему про існування граничних векторів (теорему 1), можна зробити деякі висновки щодо вигляду цих векторів. Зафіксуємо базис у $\mathbb{R}^3$, який складається з векторів $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ та $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$, і розглянемо довільну пару стохастичних векторів $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3), \mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$. Будемо розрізняти такі випадки: 1) $\mathbf{p} = \mathbf{r}$, 2) $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}$. Ситуацію, коли $\mathbf{p} = \mathbf{r} = \mathbf{e}_i, \ i = 1, 2, 3$, виключаємо.

За теоремою про існування граничних векторів у першому випадку граничні вектори

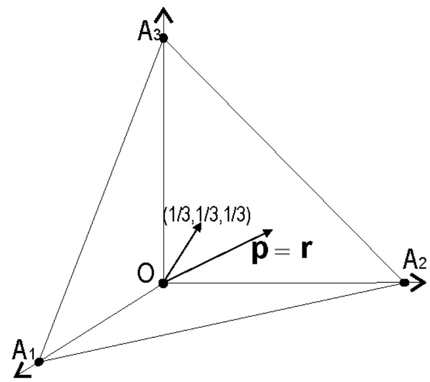

Рис. 4.

мають вигляд $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Це означає, що довільна пара рівних векторів у $\mathbb{R}^3$ в результаті конфліктної взаємодії прямує до вектора з кінцем у центрі трикутника $A_1A_2A_3$ (рис. 4).

Розглянемо другий випадок. За теоремою 1 $\mathbf{p}^\infty \perp \mathbf{r}^\infty$. Не втрачаючи загальності, вважаємо, що лише для однієї позиції, наприклад i-ї, виконується нерівність $p_i > r_i$. Тоді граничний вектор $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{e}_i$, а вектор $\mathbf{r}^\infty$ належить координатній площині, утвореній ортами $(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$, де $j \neq i$ та $k \neq i$, тобто кінець вектора $\mathbf{r}^\infty$ належить відрізку A_jA_k. Якщо до того ж існує координата p_l, для якої виконується рівність $p_l = r_l$, то вектор $\mathbf{r}^\infty = \mathbf{e}_s$, де $s \neq i$ та $s \neq l$. Враховуючи ці зауваження, можемо перейти до обґрунтування геометричного способу побудови граничних векторів.

Розглянемо в $\mathbb{R}^3$ пару стохастичних векторів $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}$. Позначимо $\mathbf{d} = \mathbf{p} - \mathbf{r}$. Після першого кроку конфліктної взаємодії отримаємо нову пару стохастичних векторів $\mathbf{p}^1, \mathbf{r}^1$. Позначимо $\mathbf{d}^1 = \mathbf{p}^1 - \mathbf{r}^1$. Виявляється, що вектори $\mathbf{d}$ та $\mathbf{d}^1$ є колінеарними: $\mathbf{d} \parallel \mathbf{d}^1$. Це випливає з того, що координати вектора $\mathbf{d}^1$ мають вигляд

$$d_i^{(1)} = p_i^{(1)} - r_i^{(1)} = \frac{p_i - r_i}{z} = \frac{d_i}{z}, \qquad z = 1 - (\mathbf{p}, \mathbf{r}).$$

Позначимо різницю векторів, отриманих на N-му кроці, через $\mathbf{d}^N = \mathbf{p}^N - \mathbf{r}^N$. Введемо ще граничне значення такої різниці: $\mathbf{d}^\infty = \lim\limits_{N\to\infty}(\mathbf{p}^N - \mathbf{r}^N) = \mathbf{p}^\infty - \mathbf{r}^\infty$. За індукцією легко довести колінеарність векторів $\mathbf{d}$ та $\mathbf{d}^\infty$.

Отже, можемо зробити такий висновок: якщо через кінці довільної пари різних стохастичних векторів провести пряму L, то в процесі конфліктної взаємодії виникає пара стохастичних векторів, через кінці яких проходить пряма L_N, паралельна L. Таким чином, отримаємо сім'ю паралельних прямих.

Далі, враховуючи попередню інформацію щодо вигляду граничних векторів, можна стверджувати, що пряма L_∞, яка проходить через кінці граничних векторів, обов'язково буде проходити через одну з точок $A_1(1,0,0)$, $A_2(0,1,0)$ або $A_3(0,0,1)$. Цей аналіз приводить до наступних побудов. Виходячи з пари стохастичних векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r}$ $(\mathbf{p} \neq \mathbf{r})$, проведемо через їх кінці пряму L (рис. 5). Паралельно прямій L проведемо три прямі $L_\infty^1, L_\infty^2, L_\infty^3$ через точки A_1, A_2 та A_3 відповідно. Якщо деяка пряма L_∞^i не перетинає протилежну до точки A_i сторону трикутника $A_1A_2A_3$, то така пряма не визначає ніякої пари граничних векторів. Дійсно, в цьому випадку існує лише один стохастичний вектор, кінець якого

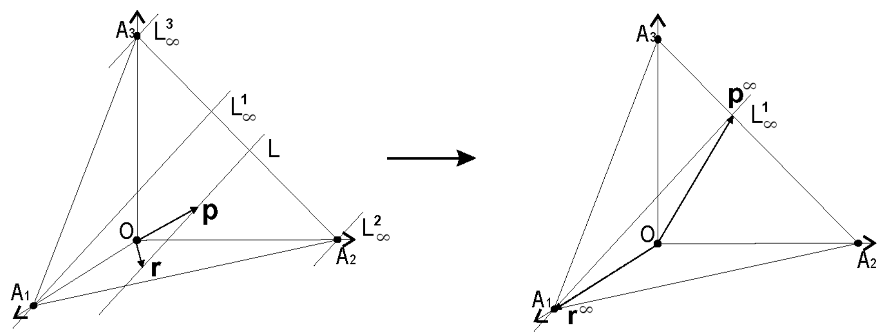

Рис. 5.

може належати прямій L^i_∞; цей вектор збігається з ортом $\mathbf{e}_i$. Оскільки зараз граничні вектори $\mathbf{p}^\infty$, $\mathbf{r}^\infty$ ортогональні, то залишаються два взаємно виключних випадки: або деяка пряма L^i_∞ перетинає одну із сторін трикутника $A_1A_2A_3$, або одна із сторін трикутника $A_1A_2A_3$ лежить на прямій L^j_∞.

У першому випадку, внаслідок ортогональності граничних векторів $\mathbf{p}^\infty$ та $\mathbf{r}^\infty$, один із них збігається з ортом $\mathbf{e}_i$, а другий проходить через точку перетину прямої L^i_∞ та відповідної сторони трикутника $A_1A_2A_3$. Звідси випливає, що для будь-яких чисел $a, b \geq 0,\ a + b = 1$, існує траєкторія динамічної системи конфлікту з граничним станом вигляду $\mathbf{p}^\infty = (1, 0, 0)$, $\mathbf{r}^\infty(0, a, b)$. Це один із важливих фактів, який ми одержуємо, безпосередньо використовуючи геометричну інтерпретацію. Аналогічний факт має місце і для $n > 3$.

У другому випадку позначимо через A_jA_k сторону трикутника $A_1A_2A_3$, яка лежить на прямій L^j_∞. Тоді граничні вектори збігаються з ортами $\mathbf{e}_j$ та $\mathbf{e}_k$ відповідно.

5. Необоротність композиції конфлікту. ***5.1. Випадок*** $\mathbb{R}^2$**.** Розглянемо довільний стан $\{\mathbf{p}^1, \mathbf{r}^1\} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ динамічної системи після першого кроку конфліктної взаємодії в припущенні, що початковий стан $\{\mathbf{p}, \mathbf{r}\}$ задовольняє умови $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}$, $(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \neq 0$. Із попереднього пункту відомо, що стану $\{\mathbf{p}^1, \mathbf{r}^1\}$ взаємно однозначно відповідає точка $\mathbf{s}(x^{(1)}, y^{(1)}) = I\{\mathbf{p}^1, \mathbf{r}^1\}$ на гіперболі $\Gamma := \{y = 1/x\}$, в яку переходять усі точки $\mathbf{s}(x, y)$ із півпрямої $L_k,\ k = y^{(1)}$. Отже, є справедливим такий результат.

Твердження 8. *У випадку двох спірних позицій кожен крок конфліктної взаємодії є необоротним. У кожен стан* $\{\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N\}, N \geq 1$, *якому відповідає точка* $\mathbf{s}(x^{(N)}, y^{(N)})$ *на гіперболі* Γ, *переходить континуальна множина попередніх станів* $\{\mathbf{p}^{(N-1)}, \mathbf{r}^{(N-1)}\}$, *яка описується півпрямою* $L^{(N)}_k,\ k^{(N)} = y^{(N)}$, *де* $y^{(N)}$ *є координатою точки* $\mathbf{s}(x^{(N)}, y^{(N)}) = I\{\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N\}$.

Зазначимо, що повний прообраз стану $\{\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N\}, N \geq 1$, відносно відображення, породженого композицією конфлікту:

$$\{\mathbf{p}^{(N-1)}, \mathbf{r}^{(N-1)}\} \xrightarrow{*} \{\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N\},$$

включає в себе додатково ще й дискретну послідовність станів, яким відповідають певні точки на гіперболі Γ.

5.2. Випадок $\mathbb{R}^n,\ n > 2$**.** У випадку простору $\mathbb{R}^n,\ n > 2$, ситуація аналогічна $\mathbb{R}^2$. Нехай $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$. Припустимо, що координати $p_n \neq 0 \neq r_n$. Тоді завдяки стохастичності векторів кожному стану $\{\mathbf{p}, \mathbf{r}\}$ бієктивно відповідає точка $\mathbf{s}(x_1, ..., x_{n-1}, y_1, ..., y_{n-1})$ з координатами $x_i := p_i/p_n,\ y_i := r_i/r_n,\ i = 1, ..., n-1$. Розглянемо довільний стан $\{\mathbf{p}^1, \mathbf{r}^1\} \in \mathbb{R}^n$ динамічної системи після першого кроку конфліктної взаємодії в припущенні, що початковий стан задовольняє умови $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}$, $(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \neq 0$. Такому стану взаємно однозначно відповідає точка $\mathbf{s}(x_1^{(1)}, ..., x_{n-1}^{(1)}, y_1^{(1)}, ..., y_{n-1}^{(1)})$, координати якої задаються формулами

$$x_i^{(1)} = \frac{x_i \sum\limits_{j\neq i} y_j}{\sum\limits_{j\neq n} y_j}, \quad y_i^{(1)} = \frac{y_i \sum\limits_{j\neq i} x_j}{\sum\limits_{j\neq n} x_j}, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{24}$$

Твердження 9. *У випадку $n > 2$ спірних позицій кожен крок конфліктної взаємодії є необоротним. У довільний стан $\{\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N\}, N \geq 1$, переходить континуальна множина попередніх станів $\{\mathbf{p}^{(N-1)}, \mathbf{r}^{(N-1)}\}$, якій відповідає множина точок*

$$\mathbf{s}(x_1^{(N-1)}, \ldots, x_{n-1}^{(N-1)}, y_1^{(N-1)}, \ldots, y_{n-1}^{(N-1)})$$

з координатами, що задовольняють систему рівнянь (для спрощення позначень покладаємо $N = 1$)

$$x_i^{(1)} = x_i \frac{1/r_n - y_i}{1/r_n - 1}, \quad y_i^{(1)} = y_i \frac{1/p_n - x_i}{1/p_n - 1}, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{25}$$

Доведення. Очевидно, систему (24) можна переписати у вигляді (25). Якщо в (25) зафіксувати змінні $x_i^{(1)}, y_i^{(1)}$, які відповідають деякому стану $\{\mathbf{p}^1, \mathbf{r}^1\}$, то отримаємо систему $2n-2$ рівнянь з $2n$ змінними. Отже, ця система недовизначена і тому має континуальну множину розв’язків, що й доводить твердження.

5.3. Опис початкових станів, які мають однакові граничні розподіли. З огляду на теорему 1 граничним станом динамічної системи конфлікту можемо назвати будь-яку пару стохастичних векторів $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\} \in l_1 \times l_1$ з умовою $\mathbf{p}^\infty \perp \mathbf{r}^\infty$, або пару $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\} \in \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, m > 1$, за умови, що всі координати $p_i^\infty = r_i^\infty = 1/m$.

Теорема 3. *Множина всіх початкових станів $\{\mathbf{p}, \mathbf{r}\} \in l_1 \times l_1$, які утворюють траєкторію з наперед заданим граничним станом $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$ з умовою $\mathbf{p}^\infty \perp \mathbf{r}^\infty$, описується системою рівнянь*

$$p_i - r_i = t(p_i^{(\infty)} - r_i^{(\infty)}), \quad t \in (0, 1],\ i = 1, \ldots, n. \tag{26}$$

Якщо граничний стан $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m,\ m > 1$ і $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty$, то множина всіх початкових станів складається з векторів $\{\mathbf{p}, \mathbf{r}\} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, n \geq m$, координати яких задовольняють умови

$$p_i = \begin{cases} r_i > 0, & i \in S \subset \{1, \ldots, n\},\ |S| = m, \\ 0 & \text{для інших } i. \end{cases}$$

Доведення. Друга частина теореми є безпосереднім наслідком теореми 1. Тому потрібно довести лише першу частину теореми. Використовуючи позначення $d_i^{(\infty)} = p_i^{(\infty)} - r_i^{(\infty)}$, $i = 1, \ldots, n$, внаслідок (1), (2) маємо

$$d_i^{(N)} = \frac{1}{z_N} d_i^{(N-1)}, \quad N > 1.$$

За індукцією

$$d_i^{(N)} = \frac{1}{z_N} \frac{1}{z_{N-1}} \ldots \frac{1}{z_1} d_i.$$

Отже, переходячи до границі, одержуємо

$$d_i^{(\infty)} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{z_N} \frac{1}{z_{N-1}} \ldots \frac{1}{z_1} d_i.$$

Звідси

$$\frac{d_i}{d_i^{(\infty)}} = z_1 z_2 \ldots, \quad i = 1, \ldots, n,$$

де не зменшуючи загальності ми припустили, що $d_i^{(\infty)} > 0$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Позначаючи $t = z_1 z_2 \ldots$, приходимо до (26), де $t \in (0, 1]$, оскільки всі $z_N \in (0, 1]$.

Наслідок. *Для довільного граничного стану $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ та фіксованого стохастичного вектора $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ з умовою: координата $p_i \neq 0$, якщо $p_i^{(\infty)} \neq 0$, існує нескінченна кількість векторів $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ таких, що стан $\{\mathbf{p}, \mathbf{r}\}$ продовжує траєкторію, збіжну до $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$.*

Зокрема, можна взяти вектор $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, у якого всі координати є ненульовими. І в цьому випадку існує безліч стохастичних векторів $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ таких, що траєкторія $\{\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N\}$ збігається до $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$.

1. *Кошманенко В. Д.* Про теорему конфліктів для стохастичних векторів // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, №4. — С. 655 – 660.
2. *Koshmanenko V. D.* Theorem of conflicts for a pair of probability measures // Math. Meth. Oper. Res. — 2004. — **59**, №2. — P. 303 – 313.
3. *Кошманенко В. Д., Харченко Н. В.*Інваріантні точки динамічної системи конфлікту в просторі рівномірно розподілених мір // Укр. мат. журн. — 2004. – **56**, № 4. — С. 927 – 938.
4. *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.*Spectral properties of image measures under infinite conflict interaction // Positivity. — 2004. — **8**, №2.
5. *Koshmanenko V., Kharchenko N.*Spectral properties of image measures after conflict interactions // Theory Stochast. Process. – 2003.
6. *Hofbauer J., Sigmund K.*The theory of evolution and dynamical systems. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.
7. *Sigmund K.*The population dynamics of conflict and cooperation // Doc. Math. J. DMV. — 1998. — **1.** — P. 487 – 506.

Одержано 16.06.2004